



Les lois de Halphen en imagerie radar

Jean-Marie Nicolas

2016D003

avril 2016

Département Traitement du Signal et des Images
Groupe TII : Traitement et Interprétation des Images

1 Introduction

L’objectif de ce rapport est d’harmoniser les approches et les notations concernant diverses lois de probabilité utilisées en imagerie RSO (Radar à Synthèse d’Ouverture) en se plaçant dans le cadre formel des log-statistiques spécifique à ce type de lois définies sur \mathbb{R}^+ . Plus particulièrement il vise une comparaison exhaustive entre la loi de Fisher [6, 17] et la loi G_0 proposée par Frery [7]. La première (loi de Fisher) s’introduit de manière triviale dans l’univers des log-statistiques grâce à un opérateur méconnu : la convolution de Mellin. D’autre part Frery introduit sa loi G_0 à partir de la loi inverse-gaussienne généralisée (proposée sous ce nom en 1953 par Good [8]). Notons dès à présent que la loi inverse-gaussienne généralisée a été proposée antérieurement par Halphen ([10], 1941), et c’est sous le nom de lois de Halphen qu’elle est utilisée de manière courante en hydrologie [13]. Ce document redonnera donc à cette famille de lois le nom de son inventeur et est donc dédié en grande partie aux “lois de Halphen” : l’annexe A en rappelle les caractéristiques essentielles.

Lois de Halphen et lois de Fisher se fondent sur les mêmes hypothèses : l’utilisation privilégiée de la loi Gamma et de la loi Gamma Inverse. Si Halphen combine ces deux lois de manière multiplicative, l’approche des log-statistiques montre que Fisher les combine (sans le savoir) par une convolution de Mellin. Nous verrons que loi de Fisher et loi de Halphen couvrent des problématiques similaires : cependant certaines propriétés diffèrent, ce qui ouvre de nouvelles perspectives sur l’utilisation pratique de ces lois. En particulier, ce document se penche sur les modes des lois couramment utilisées : c’est en effet le paramétrage du mode qui a guidé le choix empirique d’Halphen pour définir sa loi (un des paramètres, α , est spécifiquement dédié pour l’ajustement du mode). Il était alors intéressant de se pencher de la manière la plus générale possible sur cette grandeur.

Les deux univers (celui du radar et celui de l’hydrologie) utilisent des notations presque toutes différentes : ce document contient donc un certain nombre de formules fastidieuses mais néanmoins utiles pour passer d’un univers à l’autre. Une fois ces passerelles établies, il est alors possible de mener des comparaisons –tant qualitatives que quantitatives– sur les familles de lois utilisées en radar –et plus précisément la loi de Fisher– et la loi de Halphen –dont une utilisation en présence de chatoiement conduit à la loi G_0 de Frery–. Si les lois de Fisher sont parfaitement adaptées à l’univers des log-statistiques de par leur construction sous forme de convolution de Mellin, en revanche, les lois de Halphen s’appuient sur des simples produits de fonction et se définissent en pratique par des heuristiques permettant d’ajuster le mode de ces lois. En annexe G (page 46), une piste originale fondée sur certaines propriétés de la transformée de Mellin permet d’aboutir, pour quelques cas particuliers –dont le noyau de la loi d’Halphen– à établir la transformée de Mellin de produits de lois de probabilité définies sur \mathbb{R}^+ , ce qui n’était pas a priori dans les gènes de la démarche d’Halphen. Ce calcul montre que l’univers des log-statistiques, a priori bien adapté à des lois construites par convolution de Mellin, peut aussi s’étendre à un cadre simplement multiplicatif.

Pour permettre une lecture de ce document plus aisée aux lecteurs peu familiers des log-statistiques, l’annexe E donne quelques rappels sur la transformée de Mellin et le rôle qu’elle joue dans les log-statistiques en permettant l’introduction des log-moments et des log-cumulants. En particulier, le rôle du diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ (c’est à dire le log-cumulant 3 tracé en fonction du log-cumulant 2) est rapidement résumé. Pour les non radaristes, l’annexe B donne des rappels sur les lois “classiques” en imagerie radar que sont les lois Gamma, Gamma Inverse et Gamma Généralisée, ainsi que les lois correspondantes applicables aux données en amplitude (dont la loi de Nakagami). L’annexe C en donne sous forme de fiches rapides leurs définitions et caractéristiques ainsi que celles des lois de Halphen. Enfin l’annexe D montre comment on peut étendre le système de Pearson pour y intégrer les lois de Halphen.

2 Les lois de Halphen (lois inverse-gaussienne généralisées)

Ce paragraphe redonne les formulations usuelles et les propriétés des différentes lois de probabilité utilisées dans ce rapport : loi Gamma généralisée, lois de Halphen, ... À partir de ces formulations, des comparaisons peuvent alors être menées entre les lois de Halphen et la loi de Fisher, tant sur les caractéristiques “à la Halphen” (étude des modes) que sur les caractéristiques des log-statistiques (diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$).

2.1 Loi Gaussienne Généralisée sur \mathbb{R}^+

On trouve dans la littérature la loi normale $\mathcal{N}[\mu_N, \sigma_N]$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{N}[\mu_N, \sigma_N](x) = \frac{1}{\sigma_N \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_N)^2}{2\sigma_N^2}} \quad (1)$$

Une variante consiste à en n'étudier que le cas $\mu_N = 0$ et que pour des valeurs positives de la variable x , ce qui donne la loi $\mathcal{N}^+[\sigma_N]$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\mathcal{N}^+[\sigma_N](x) = \frac{2}{\sigma_N \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_N^2}} \quad x \geq 0 \quad (2)$$

À partir de cette variante ($\mu_N = 0$ et x positif ou nul), une autre variante de la loi normale consiste à modifier la puissance de la variable x : on obtient alors la loi gaussienne généralisée (appelée aussi loi normale généralisée) $\mathcal{NG}^+[\sigma, \eta]$, qui, dans le cas $x \geq 0$ et $\eta > 0$ s'écrit :

$$\mathcal{NG}^+[\sigma, \eta](x) = \frac{\eta}{\sigma \Gamma\left(\frac{1}{\eta}\right)} e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\eta} \quad x \geq 0 \quad (3)$$

(voir par exemple [18], pour lequel le paramètre η correspond au *shape*, et le paramètre σ correspond au *scale*). Rappelons au passage que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Les log-statistiques traitent aisément cette loi puisque, à partir de la définition de la fonction Gamma :

$$\Gamma(s) = \mathcal{M}[e^{-x}]$$

et grâce aux propriétés élémentaires de la transformée de Mellin (voir annexe E.1), on a :

$$\mathcal{M}[e^{-\frac{x}{\sigma}}] = \sigma^s \Gamma(s)$$

ainsi que :

$$\mathcal{M}[e^{(-\frac{x}{\sigma})^\eta}] = \frac{\sigma^s}{\eta} \Gamma\left(\frac{s}{\eta}\right) \quad (4)$$

On peut alors établir la fonction caractéristique de deuxième espèce de $\mathcal{NG}^+[\sigma, \eta]$ puisque, par définition (voir relation 55), la fonction caractéristique de deuxième espèce d'une loi de probabilité en est la transformée de Mellin. Puisque l'on traite de lois de probabilités, il faut ajuster un paramètre de normalisation (la loi \mathcal{NG}^+ doit vérifier $\phi(s=1) = \int_0^\infty \mathcal{NG}^+[\sigma, \eta](x) dx = 1$). Au final, on obtient l'expression de la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi gaussienne généralisée :

$$\phi(s) = \frac{\sigma^{s-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{\eta}\right)} \Gamma\left(\frac{s}{\eta}\right)$$

Puisque la fonction génératrice des moments se déduit de la fonction caractéristique de deuxième espèce et correspond simplement, pour le moment d'ordre r , au cas $s = r + 1$ (si $\phi(s)$ est définie pour cette valeur), on en déduit les moments de la loi \mathcal{NG}^+ :

$$m_r = \frac{\sigma^r}{\Gamma\left(\frac{1}{\eta}\right)} \Gamma\left(\frac{1+r}{\eta}\right)$$

ainsi que ses log-moments et log-cumulants. En particulier :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 &= \log \sigma + \frac{\Psi(\frac{1}{\eta})}{\eta} \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{\Psi(1, \frac{1}{\eta})}{\eta^2} \\ \tilde{\kappa}_r &= \frac{\Psi(r-1, \frac{1}{\eta})}{\eta^r} \quad \forall r > 1 \end{cases} \quad (5)$$

La valeur de son mode est :

$$\text{mode}_{\mathcal{NG}^+} = 0$$

2.2 Variante : la loi Gamma Généralisée

Une loi utile consiste à multiplier cette fonction \mathcal{NG}^+ par une puissance α de la variable x , ce qui donne la loi $\mathcal{NGH}^+[\sigma, \eta, \alpha]$:

$$\mathcal{NGH}^+[\sigma, \eta, \alpha] \sim x^{\alpha-1} \mathcal{NG}^+[\sigma, \eta](x)$$

α pouvant être aussi bien positif que négatif (à condition que ni η , ni ε ne soient nuls).

Une fois trouvée la bonne normalisation (l'intégrale d'une pdf définie sur \mathbb{R}^+ doit donner 1), on montre que la loi ainsi construite est connue sous le nom de loi Gamma Généralisée, notée dans ce document \mathcal{GG} , et décrite en annexe B.3.

En effet, puisque les propriétés élémentaires de la transformée de Mellin et la relation 4 permettent d'écrire :

$$\mathcal{M}[x^{\alpha-1} e^{(\frac{x}{\sigma})^\eta}](s) = \mathcal{M}[e^{(\frac{x}{\sigma})^\eta}](s + \alpha - 1) = \frac{\sigma^{s-1+\alpha}}{\eta} \Gamma\left(\frac{s-1+\alpha}{\eta}\right)$$

cette expression imposant les conditions suivantes :

$$\frac{\alpha}{\eta} > 0$$

c'est à dire :

$$\begin{cases} \eta > 0 & \text{et } \alpha > 0 \\ \eta < 0 & \text{et } \alpha < 0 \end{cases}$$

On en déduit après normalisation la fonction caractéristique de deuxième espèce de $\mathcal{NGH}^+[\sigma, \eta, \alpha]$:

$$\phi(s) = \frac{\sigma^{s-1}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\eta}\right)} \Gamma\left(\frac{\alpha + s - 1}{\eta}\right)$$

ce qui donne la forme la plus générale possible de la loi recherchée¹ :

$$\mathcal{NGH}^+[\sigma, \eta, \alpha](x) = \frac{|\eta|}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\eta}\right) \sigma^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-(\frac{x}{\sigma})^\eta} \quad x \geq 0 \quad (6)$$

On en déduit alors ses moments :

$$m_r = \frac{\sigma^r}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\eta}\right)} \Gamma\left(\frac{\alpha + r}{\eta}\right) \quad \text{si } r > \frac{-\alpha}{\eta}$$

et ses log-moments et log-cumulants (pour $r \in \mathbb{N}$)². En particulier :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 &= \log \sigma + \frac{\Psi(\frac{\alpha}{\eta})}{\eta} \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{\Psi(1, \frac{\alpha}{\eta})}{\eta^2} \\ \tilde{\kappa}_r &= \frac{\Psi(r-1, \frac{\alpha}{\eta})}{\eta^r} \quad \forall r > 1 \end{cases} \quad (7)$$

1. On doit prendre la valeur absolue de η dans l'expression (6) pour garantir la positivité de la pdf pour $\eta < 0$.
2. Notons que ces grandeurs existent toujours en pratique dès lors que la pdf est définie, sauf cas pathologique.

Remarquons que le mode de la loi $\mathcal{NGH}^+[\sigma, \eta, \alpha]$ est donnée par la relation :

$$\begin{cases} \text{si } \eta > 0 & \begin{cases} \text{mode}_{\mathcal{NGH}^+} = \left(\frac{\alpha-1}{\eta}\right)^{\frac{1}{\eta}} \sigma & \text{si } \alpha > 1 \\ \text{mode}_{\mathcal{NGH}^+} = 0 & \text{si } \alpha \in [0; 1] \end{cases} \\ \text{si } \eta < 0 & \text{mode}_{\mathcal{NGH}^+} = \left(\frac{\alpha-1}{\eta}\right)^{\frac{1}{\eta}} \sigma \quad \forall \alpha < 0 \end{cases}$$

Pour $\alpha > 1$, le mode n'est plus en $x = 0$ comme dans le cas de la loi \mathcal{NG}^+ et se déplace vers des valeurs d'autant plus grandes que α est grand.

Les radaristes connaissent plusieurs cas particuliers de cette loi :

- le cas $\eta = 1$ et $\alpha = L$: on obtient alors, avec $\sigma = \mu/L$, la loi Gamma (voir l'annexe B.1).
- le cas $\eta = 2$ et $\alpha = 2L$: on obtient alors, avec $\sigma = \mu/\sqrt{L}$, la loi de Nakagami.
- le cas $\alpha = \eta$: on obtient alors la loi de Weibull $\mathcal{W}[\mu, \eta]$.
- le cas $\eta = -1$ et $\alpha = -M$: on obtient alors, avec $\sigma = \mu M$, la loi Gamma Inverse (voir l'annexe B.2).

De manière plus générale, pour η quelconque, en posant

$$\begin{cases} \alpha = \eta L \\ \sigma = \mu/L^{\frac{1}{\eta}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L = \frac{\alpha}{\eta} \\ \mu = \sigma \left(\frac{\alpha}{\eta}\right)^{\frac{1}{\eta}} \end{cases}$$

on obtient la loi Gamma Généralisée (voir B.3) :

$$\mathcal{GG}[\mu, L, \eta](x) = \frac{|\eta| L^{\frac{1}{\eta}}}{\mu \Gamma(L)} \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu}\right)^{\eta L - 1} e^{-\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu}\right)^{\eta}},$$

dont la fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit :

$$\phi_{\mathcal{GG}} = \mu^{s-1} \frac{\Gamma\left(L + \frac{s-1}{\eta}\right)}{L^{\frac{s-1}{\eta}} \Gamma(L)}$$

On en déduit ses moments d'ordre r (quand ils existent, c'est à dire pour des valeurs telles que $L + \frac{r}{\eta} > 0$) :

$$m_r = \mu^r \frac{\Gamma\left(L + \frac{r}{\eta}\right)}{L^{\frac{r}{\eta}} \Gamma(L)} \quad \text{si } L + \frac{r}{\eta} > 0$$

et ses log-moments (qui existent toujours) :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_1 &= \log(\mu) + \frac{\Psi(L) - \log(L)}{\eta} \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{\Psi(1, L)}{\eta^2} \\ \tilde{\kappa}_r &= \frac{\Psi(r-1, L)}{\eta^r} \end{aligned}$$

Remarquons que le mode de la loi $\mathcal{GG}[\mu, L, \eta]$ est donnée par la relation :

$$\begin{cases} \text{si } \eta L - 1 > 0 & \text{mode}_{\mathcal{GG}} = \left(\frac{\eta L - 1}{\eta L}\right)^{\frac{1}{\eta}} \mu \\ \text{si } \eta L - 1 \leq 0 & \text{mode}_{\mathcal{GG}} = 0 \end{cases}$$

2.3 Les lois inverse-gaussienne généralisées et les lois de Halphen

2.3.1 Les lois inverse-gaussienne généralisées

En 1953, Good [8] propose un certain nombre d'hypothèse concernant des lois possibles pour l'étude de population. Parmi celles-ci l'hypothèse “ H_4 ” (relation 50) s'écrit³ :

$$f(p) = A p^{\alpha'} e^{-\beta p - \varepsilon p^{-1}} \quad (8)$$

A étant un facteur de normalisation En pratique, il ne fait qu'évoquer cette hypothèse en déclarant qu'elle présente l'intérêt d'être un intermédiaire entre la loi de Pearson de type III (c'est à dire la loi Gamma) et la loi de Pearson de type V (c'est à dire la loi Gamma Inverse). Au final, Good n'en fait pas usage en invoquant les difficultés à l'aborder sur le plan analytique.

En réalité, ce fut Halphen [10]⁴ qui, en 1941, a souhaité exploiter des lois de probabilités permettant de traiter les queues de distribution et a donc proposé des lois sortant du système de Pearson. Son approche intuitive l'a conduit à associer par un produit loi exponentielle et loi exponentielle inverse, puis à rajouter un produit par une puissance de la variable : cette dernière étape permettant d'ajuster la position du mode. Malheureusement, bien que très largement utilisés en hydrologie, ses travaux sont tombés dans l'oubli et les lois de Halphen ont été finalement redécouvertes dans les années 70 par Ole Barndorff-Nielsen et sont plus connues sous le nom de lois inverse-gaussienne généralisées ou GIG *generalized Inverse Gaussian distribution*. A la suite des travaux de Ole Barndorff-Nielsen, Jorgensen [12] a consacré un ouvrage spécifique aux lois inverse-gaussienne généralisées en se cantonnant à une analyse classique (certaines relations sont reprises en annexe I). Le nom de lois inverse-gaussienne généralisées est lié au cas où la variable est prise avec une puissance de 2 (cas bien connu des radaristes où les données sont en amplitude et où on les traite de facto en intensité) et la loi s'écrit :

$$\mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda) = \frac{(\lambda/\gamma)^{\alpha/2}}{K_\alpha(2\sqrt{\lambda\gamma})} x^{2\alpha-1} e^{-\frac{\gamma}{x^2} - \lambda x^2} \quad (9)$$

expression utilisée exactement sous cette forme par Frery ([7], paragraphe III “Amplitude Backscatter”).

Nous allons voir que les lois de Halphen –dont un cas couvre celui de la loi inverse-gaussienne généralisée– peuvent s'analyser par le biais des statistiques de Mellin, ce qui conduit à une meilleure compréhension de ces lois ainsi qu'à des comparaisons instructives entre d'autres lois construites par convolution de Mellin (et non par produit).

2.3.2 La loi de Halphen (de type A)

Posons par définition⁵ l'expression de la loi de Halphen $\mathcal{H}[\alpha, \beta, \varepsilon]$:

$$\mathcal{H}[\alpha, \beta, \varepsilon](x) = A x^{\alpha-1} e^{-\beta x - \varepsilon x^{-1}} \quad (10)$$

A étant une constante de normalisation, les deux paramètres β et ε ne pouvant être simultanément nuls.

3. Pour être sûr qu'aucune confusion de variable puisse apparaître, le premier paramètre a été noté ici α' .

4. Cette référence a pour auteur Daniel Dugué, qui a présenté à la demande d'Etienne Halphen les travaux de ce dernier durant les heures sombres de la guerre de 39-45 alors que celui-ci ne pouvait publier de travaux sous son propre nom. A la fin de la guerre, Daniel Dugué a redonné à ces travaux la paternité d'Halphen. Notons aussi que le père d'Etienne Halphen, Louis Halphen, historien du haut Moyen Age, membre de l'Académie des inscriptions et belles-lettres, avait été écarté de son poste (professeur à la Sorbonne) en 1941.

5. L'article [10] pose $A x^\alpha e^{-\beta x - \varepsilon x^{-1}}$ mais ce choix de α au lieu de $\alpha - 1$ s'avère malheureux –comme nous le verrons par la suite– car il pose la valeur -1 comme cas particulier.

Or une curiosité de cette loi est de posséder une transformée de Mellin puisque l'on peut retrouver grâce aux tables de transformées de Mellin (postérieures aux travaux d'Halphen et de Good, comme celle d'Oberhettinger de 1974 [16]) la relation :

$$\mathcal{M}\left[e^{-\beta x - \varepsilon x^{-1}}\right](s) = 2\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{s}{2}} K_s\left(2\sqrt{\beta\varepsilon}\right)$$

Ce calcul est détaillé en annexe G.3.2

A partir de cette expression on en déduit :

$$\mathcal{M}[\mathcal{H}[\alpha, \beta, \varepsilon]](s) = 2A\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{s-1+\alpha}{2}} K_{\alpha+s-1}\left(2\sqrt{\beta\varepsilon}\right) \quad (11)$$

K_α étant la seconde fonction de Bessel (appelée aussi fonction de Bessel modifiée de troisième espèce, voir l'annexe H). Ce calcul est détaillé en annexe G.3.3.

La loi de Halphen peut donc s'analyser à l'aune des log-statistiques, ce qui permet en particulier :

- de déduire la constante A (puisque l'on doit avoir $\mathcal{M}[\mathcal{H}]|_{s=1} = 1$) :

$$A = \frac{1}{2\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{2}} K_\alpha\left(2\sqrt{\beta\varepsilon}\right)}$$

- de formaliser la fonction caractéristique de deuxième espèce :

$$\phi(s) = \frac{1}{K_\alpha\left(2\sqrt{\beta\varepsilon}\right)}\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{s-1}{2}} K_{\alpha+s-1}\left(2\sqrt{\beta\varepsilon}\right) \quad (12)$$

ce qui donne la fonction génératrice des moments.

Au final, on a l'expression complète de la loi de Halphen :

$$\mathcal{H}[\alpha, \beta, \varepsilon](x) = \frac{1}{2\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{2}} K_\alpha\left(2\sqrt{\beta\varepsilon}\right)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x - \frac{\varepsilon}{x}} \quad (13)$$

Cette expression analytique associée à l'expression de la fonction caractéristique de deuxième espèce (relation 12) permet :

- de déduire les moments :

$$m_r = \frac{1}{K_\alpha\left(2\sqrt{\beta\varepsilon}\right)}\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{r}{2}} K_{\alpha+r}\left(2\sqrt{\beta\varepsilon}\right)$$

Il faut remarquer que la loi de Halphen possède tous ses moments, aussi bien positifs (moments traditionnels) que négatifs (FLOM, *Fractional Low Order Moments*).

- de déduire le mode :

$$m_{mode} = \begin{cases} \frac{(\alpha-1)+\sqrt{(\alpha-1)^2+4\varepsilon\beta}}{2\beta} & \text{si } \beta > 0 \\ \frac{\varepsilon}{1-\alpha} & \text{si } \beta = 0 \end{cases} \quad (14)$$

en notant que dans le cas $\beta = 0$ on doit avoir $\alpha < 1$ (ce cas correspond à une loi Gamma inverse).

Il est important de noter que le mode est toujours strictement positif.

On peut calculer la dérivée logarithmique de la loi de Halphen :

$$\frac{1}{f(x)} \frac{df(x)}{dx} = \frac{\varepsilon + (\alpha - 1)x - \beta x^2}{x^2}$$

que l'on peut réécrire pour permettre une comparaison avec le système de Pearson :

$$\frac{1}{f(x)} \frac{df(x)}{dx} = \begin{cases} -\frac{-\frac{\varepsilon}{\alpha-1} - x + \frac{\beta}{\alpha-1}x^2}{x^2} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\frac{-\varepsilon + \beta x^2}{x^2} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Ce calcul montre que cette loi ne vérifie pas la relation de Pearson si $\beta > 0$ et $\varepsilon > 0$: en effet le numérateur exhibe un carré de la variable x . Pour traiter le mieux possible les lois de Halphen, il faudrait étendre le système de Pearson, ce qui sera abordé en annexe D.3.

2.3.3 Exemples de la loi d'Halphen

Sur la figure 1 sont tracées plusieurs lois d'Halphen ayant les mêmes coefficients $\beta = 1$ et $\varepsilon = 1$, et avec α variant entre -3.5 et 3.5. Effectivement, le paramètre α ajuste la position du mode ainsi qu'Halphen le souhaitait. Cependant la forme des lois est elle aussi modifiée : pour des valeurs négatives de α , on remarque que la loi est localisée autour de son mode, alors que pour des valeurs positives de α , la loi s'étale autour de son mode et fait aussi apparaître une tendance "queue lourde". Cependant, comme une des propriétés essentielles de la loi de Halphen est de posséder tous ses moments, tant positifs que négatifs, on ne peut parler de "queue lourde" stricto sensu.

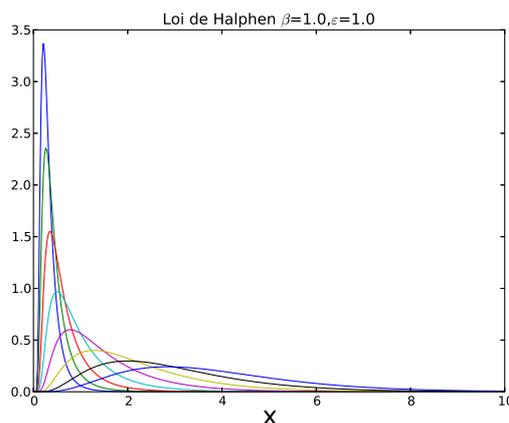


FIGURE 1 – Loi de Halphen avec $\beta = 1$, $\varepsilon = 1$ pour des valeurs de α entre 3.5 et -3.5 par pas de 1. On voit comment les variations du paramètre α permettent d'ajuster la position du mode.

2.3.4 Loi de Halphen Inverse

Si une variable aléatoire x suit une loi de Halphen $\mathcal{H}[\alpha, \beta, \varepsilon]$, alors la variable aléatoire $y = 1/x$ suit la loi de Halphen $\mathcal{H}[-\alpha, \varepsilon, \beta]$.

En effet, la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi de Halphen $\mathcal{H}[\alpha, \beta, \varepsilon]$ s'écrit (relation 12) :

$$\phi(s) = \frac{1}{K_\alpha(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{s-1}{2}} K_{\alpha+s-1}(2\sqrt{\beta\varepsilon})$$

Donc la fonction caractéristique de deuxième espèce de sa loi inverse s'écrit (annexe E relation 56)⁶ :

$$\begin{aligned} \phi_I(s) &= \phi(2-s) \\ &= \frac{1}{K_\alpha(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{1-s}{2}} K_{\alpha+1-s}(2\sqrt{\beta\varepsilon}) \end{aligned}$$

6. en prenant aussi en compte une propriété des secondes fonctions de Bessel : $K_\lambda = K_{-\lambda}$ –voir l'annexe H–

$$= \frac{1}{K_\alpha(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\beta}{\varepsilon}\right)^{\frac{s-1}{2}} K_{-\alpha+s-1}(2\sqrt{\beta\varepsilon})$$

On reconnaît la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi de Halphen $\mathcal{H}[-\alpha, \varepsilon, \beta]$. Donc la loi de Halphen Inverse est elle même une loi de Halphen.

2.3.5 Les cas limite de la loi de Halphen

Dans l'approche intuitive de Halphen, deux cas limite peuvent apparaître : celui où le rôle de la loi Gamma disparaît (cas $\beta = 0$) et celui où le rôle de loi la Gamma Inverse disparaît (cas $\varepsilon = 0$)

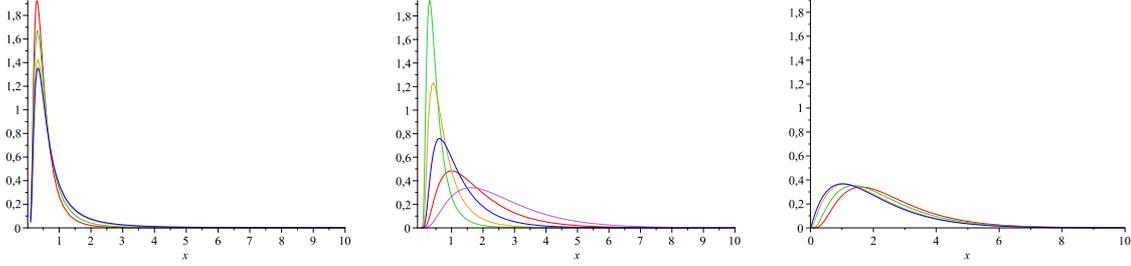


FIGURE 2 – Au centre : loi de Halphen avec $\beta = 1$, $\varepsilon = 1$ pour des valeurs de α entre 2 et -2 par pas de 1 (extraits de la figure 1). A droite : cas $\alpha = 2$ et ε variant entre 1 et 0. La valeur limite $\varepsilon = 0$ donne une loi Gamma. A gauche : cas $\alpha = -2$ et β variant entre 1 et 0. La valeur limite $\beta = 0$ donne une loi Gamma Inverse.

– Dans le cas $\beta \rightarrow 0$, on a alors :

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2 \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{2}} K_\alpha(2\sqrt{\beta\varepsilon})} x^{\alpha-1} e^{-\beta x - \frac{\varepsilon}{x}} \right) = \frac{1}{\varepsilon \Gamma(-\alpha)} \left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^{1-\alpha} e^{-\frac{\varepsilon}{x}}$$

et on reconnaît l'expression d'une loi Gamma Inverse (cas $M = -\alpha$, $\mu = \frac{\varepsilon}{-\alpha}$, voir annexe B.2), définie pour tout $\alpha < 0$.

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \mathcal{H}[\alpha, \beta, \varepsilon] = \mathcal{GI} \left[\frac{\varepsilon}{-\alpha}, -\alpha \right] \quad (15)$$

Si l'on considère les fonctions caractéristiques de deuxième espèce (celle de la loi de Halphen est donnée 12), on peut alors écrire :

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{1}{K_\alpha(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{s-1}{2}} K_{\alpha+s-1}(2\sqrt{\beta\varepsilon}) = \left(\frac{\varepsilon}{-\alpha}\right)^{1-s} \frac{\Gamma(-\alpha+1-s)}{(-\alpha)^{s-1}\Gamma(-\alpha)}$$

– Dans le cas $\varepsilon \rightarrow 0$, on a alors :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2 \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{2}} K_\alpha(2\sqrt{\beta\varepsilon})} x^{\alpha-1} e^{-\beta x - \frac{\varepsilon}{x}} \right) = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} (\beta x)^{\alpha-1} e^{-\beta x}$$

et on reconnaît l'expression d'une loi Gamma (Cas $L = \alpha$, $\mu = \frac{\alpha}{\beta}$, voir annexe B.1), définie pour tout $\alpha > 0$.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}[\alpha, \beta, \varepsilon] = \mathcal{G} \left[\frac{\alpha}{\beta}, \alpha \right] \quad (16)$$

Si l'on considère les fonctions caractéristiques de deuxième espèce, on peut alors écrire :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{K_\alpha(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{s-1}{2}} K_{\alpha+s-1}(2\sqrt{\beta\varepsilon}) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{s-1} \frac{\Gamma(\alpha+s-1)}{\alpha^{s-1}\Gamma(\alpha)}$$

On peut reformuler cette observation en analysant les trois cas suivants selon la valeur du paramètre α :

- Si $\alpha > 0$, alors on peut faire tendre le paramètre ε vers la valeur nulle et la loi de Halphen devient une loi Gamma (figure 2 droite).
- Si $\alpha < 0$, alors on peut faire tendre le paramètre β vers la valeur nulle et la loi de Halphen devient une loi Gamma Inverse (figure 2 gauche).
- Si $\alpha = 0$, alors on doit avoir $\beta > 0$ et $\varepsilon > 0$. On obtient un cas particulier de loi, $\mathcal{H}[\alpha = 0, \beta, \varepsilon]$:

$$\mathcal{H}[\alpha = 0, \beta, \varepsilon](x) = \frac{1}{2K_0(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \frac{1}{x} e^{-\beta x - \frac{\varepsilon}{x}}$$

et de fonction caractéristique de deuxième espèce :

$$\phi(s) = \frac{1}{K_0(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{s-1}{2}} K_{s-1}(2\sqrt{\beta\varepsilon})$$

dont l'inverse est la loi de Halphen $\mathcal{H}[\alpha = 0, \varepsilon, \beta]$

2.3.6 La loi de Halphen dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$

Considérons la loi de Halphen $\mathcal{H}[\alpha, \beta, \varepsilon]$: sa loi inverse est donc $\mathcal{H}[-\alpha, \varepsilon, \beta]$. Analysons son comportement dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ (la définition de ce diagramme est rappelée en annexe E.3). Pour commencer, prenons les exemples de la figure 1 pour lesquels $\beta = \varepsilon = 1$ et α varie entre 2.5 et -2.5. Puisque $\beta = \varepsilon$, et étant donné les caractéristiques de la loi inverse, le comportement de cette loi de Halphen dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ sera symétrique vis à vis de l'axe vertical.

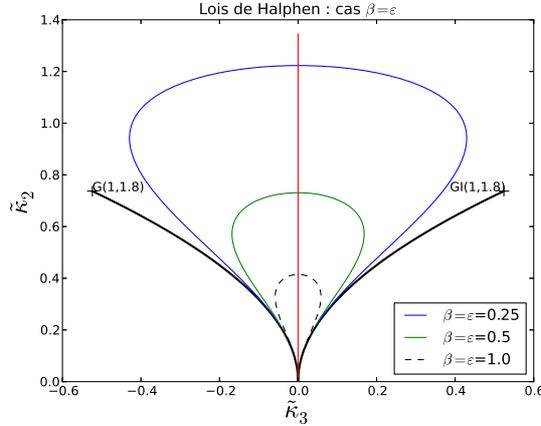


FIGURE 3 – Représentation dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ des lois de Halphen avec $\beta = \varepsilon$ pour des valeurs de α entre ∞ et $-\infty$. Le quadrant de gauche ($\tilde{\kappa}_3 < 0$) correspond à des valeurs $\alpha > 0$; le quadrant de droite ($\tilde{\kappa}_3 > 0$) correspond à des valeurs $\alpha < 0$. Sont représentées les lois $\beta = \varepsilon = 0.25$, $\beta = \varepsilon = 0.5$ et $\beta = \varepsilon = 1$ (voir figure 1 qui correspond à ce dernier cas). Les lois Gamma et Gamma Inverse de référence sont représentées pour des valeurs de L supérieures à 1.8. Le point origine correspond aux cas limites $\alpha \rightarrow \infty$ et $\alpha \rightarrow -\infty \forall \beta \in \mathbb{R}^+$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Toute la zone délimitée par ces deux lois Gamma et Gamma Inverse est donc représentée par une loi de Halphen unique avec $\beta = \varepsilon$, valeur qui conditionne la forme de la “raquette” (plus cette valeur est grande, plus la raquette est proche de l’origine).

2.4 Variantes de la loi de Halphen

2.4.1 Loi de Halphen généralisée

Comme pour bien d'autres lois de probabilité, on "généralise" la loi de Halphen $\mathcal{H}[\alpha, \beta, \varepsilon](x)$ définie pour la variable aléatoire x à la variable aléatoire y telle que : $x = y^\eta$. On a alors une nouvelle loi de probabilité, notée $\mathcal{HG}[\alpha, \beta, \varepsilon, \eta](y)$, que nous appellerons "loi de Halphen généralisée" et dont l'expression se déduit de la loi de Halphen initiale (voir annexe E, expression 58) :

$$\begin{aligned}\mathcal{HG}[\alpha, \beta, \varepsilon, \eta](y) &= |\eta| y^{(\eta-1)} \mathcal{H}[\alpha, \beta, \varepsilon](y^\eta) \\ &= |\eta| y^{(\eta-1)} \frac{1}{2 \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{2}} K_\alpha(2\sqrt{\beta\varepsilon})} y^{\eta(\alpha-1)} e^{-\beta y^\eta - \varepsilon y^{-\eta}} \\ &= |\eta| \frac{1}{2 \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{2}} K_\alpha(2\sqrt{\beta\varepsilon})} y^{\eta\alpha-1} e^{-\beta y^\eta - \varepsilon y^{-\eta}}\end{aligned}\quad (17)$$

la fonction caractéristique de deuxième espèce de la nouvelle loi, $\phi_\eta(s)$, se déduit alors de la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi initiale $\phi(s)$ grâce à l'utilisation de l'expression (voir annexe E, expression 59) :

$$\begin{aligned}\phi_{\mathcal{HG}}(s) &= \phi_{\mathcal{H}}\left(\frac{s + \eta - 1}{\eta}\right) \\ &= \frac{1}{K_\alpha(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{s-1}{2\eta}} K_{\alpha + \frac{s-1}{\eta}}(2\sqrt{\beta\varepsilon})\end{aligned}\quad (18)$$

Vu la forme analytique de cette fonction, définie pour $s \in \mathbb{R}$, tous ses moments, aussi bien positifs ($r > 0$) que négatifs ($r < 0$) sont définis dès lors que l'on a $\beta > 0$ et $\varepsilon > 0$.

$$m_r = \frac{1}{K_\alpha(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{r}{2\eta}} K_{\alpha + \frac{r}{\eta}}(2\sqrt{\beta\varepsilon})$$

Le mode de la loi de Halphen Généralisée est donné par la relation :

$$m_{mode} = \left(\frac{(\eta\alpha - 1) + \sqrt{(\eta\alpha - 1)^2 + 4\varepsilon\beta\eta^2}}{2\beta\eta}\right)^{\frac{1}{\eta}}\quad (19)$$

pour $\beta > 0$ (le case $\beta = 0$ correspond au cas particulier de la loi Gamma Inverse Généralisée que nous verrons au paragraphe 2.4.2).

A partir de l'expression de la fonction caractéristique de deuxième espèce, on peut trouver une expression équivalente de la loi de Halphen généralisée $\mathcal{HG}[\alpha, \beta, \varepsilon, \eta]$:

$$\begin{aligned}\phi_{\mathcal{HG}}(s) &= \frac{1}{K_\alpha(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{-\frac{s-1}{2\eta}} K_{\alpha + \frac{s-1}{\eta}}(2\sqrt{\beta\varepsilon}) \\ &= \frac{1}{K_\alpha(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{-\frac{s-1}{2(-\eta)}} K_{\alpha - \frac{s-1}{-\eta}}(2\sqrt{\beta\varepsilon}) \\ &= \frac{1}{K_\alpha(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\beta}{\varepsilon}\right)^{\frac{s-1}{2(-\eta)}} K_{-\alpha + \frac{s-1}{-\eta}}(2\sqrt{\beta\varepsilon})\end{aligned}$$

et on reconnaît l'expression de la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi de Halphen généralisée $\mathcal{HG}[-\alpha, \varepsilon, \beta, -\eta]$. On a la relation :

$$\mathcal{HG}[\alpha, \beta, \varepsilon, \eta] = \mathcal{HG}[-\alpha, \varepsilon, \beta, -\eta]\quad (20)$$

Cette relation montre que toute loi de Halphen Généralisée telle que $\beta \neq 0$ et $\varepsilon \neq 0$ peut être formellement représentée de deux manières différentes.

L'inverse de cette nouvelle loi peut s'analyser de deux manières différentes. Tout d'abord, soit une loi de Halphen généralisée $\mathcal{HG}[\alpha, \beta, \varepsilon, \eta]$, de fonction caractéristique de deuxième espèce donnée par la relation 18. Alors sa fonction caractéristique de deuxième espèce de son inverse s'écrit :

$$\begin{aligned}\phi(s) &= \phi_{\mathcal{HG}}(2-s) \\ &= \frac{1}{K_{\alpha}(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{1-s}{2\eta}} K_{\alpha+\frac{1-s}{\eta}}(2\sqrt{\beta\varepsilon}) \\ &= \frac{1}{K_{\alpha}(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{s-1}{2(-\eta)}} K_{\alpha+\frac{s-1}{-\eta}}(2\sqrt{\beta\varepsilon})\end{aligned}\quad (21)$$

sa loi inverse est la loi de Halphen généralisée $\mathcal{HG}[\alpha, \beta, \varepsilon, -\eta]$.

On aurait aussi pu écrire :

$$\begin{aligned}\phi(s) &= \phi_{\mathcal{HG}}(2-s) \\ &= \frac{1}{K_{\alpha}(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{1-s}{2\eta}} K_{\alpha+\frac{1-s}{\eta}}(2\sqrt{\beta\varepsilon}) \\ &= \frac{1}{K_{\alpha}(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\beta}{\varepsilon}\right)^{\frac{s-1}{2\eta}} K_{-(\alpha+\frac{s-1}{\eta})}(2\sqrt{\beta\varepsilon}) \\ &= \frac{1}{K_{-\alpha}(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\beta}{\varepsilon}\right)^{\frac{s-1}{2\eta}} K_{-\alpha+\frac{s-1}{\eta}}(2\sqrt{\beta\varepsilon})\end{aligned}$$

la dernière relation s'appuyant sur la propriété (relation 69) des BesselK.

De cette manière⁷, on a montré que la loi inverse de la loi de Halphen généralisée $\mathcal{HG}[\alpha, \beta, \varepsilon, \eta]$ est la loi de Halphen généralisée $\mathcal{HG}[-\alpha, \varepsilon, \beta, \eta]$.

2.4.2 Les cas limite de la loi de Halphen Généralisée

Soit une loi de Halphen généralisée $\mathcal{HG}[\alpha, \beta, \varepsilon, \eta]$.

– Dans le cas $\beta \rightarrow 0$, on a alors (voir l'annexe B.3) :

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \mathcal{HG}[\alpha, \beta, \varepsilon, \eta] = \mathcal{GG} \left[\left(\frac{\varepsilon}{-\alpha} \right)^{\frac{1}{\eta}}, -\alpha, -\eta \right]$$

Rappelons que le cas $\beta \rightarrow 0$ impose $\alpha < 0$.

– Dans le cas $\varepsilon \rightarrow 0$, on a alors :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{HG}[\alpha, \beta, \varepsilon, \eta] = \mathcal{GG} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{1}{\eta}}, \alpha, \eta \right]$$

Rappelons que le cas $\varepsilon \rightarrow 0$ impose $\alpha > 0$.

On en déduit que les cas limite de la loi de Halphen Généralisée sont des lois Gamma Généralisées.

2.4.3 Loi de Halphen en amplitude

Le cas particulier $\eta = 2$ de la loi de Halphen Généralisée peut se nommer "loi de Halphen en Amplitude" (en référence aux lois de l'univers radar), notée $\mathcal{HGA}[\alpha, \beta, \varepsilon]$. On a alors :

7. On aurait pu aussi invoquer directement la relation 20.

$$\mathcal{HGA}[\alpha, \beta, \varepsilon](x) = \frac{1}{K_\alpha(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\beta}{\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{2}} x^{2\alpha-1} e^{-\beta x^2 - \varepsilon x^{-2}} \quad (22)$$

dont la fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit :

$$\phi(s) = \frac{1}{K_\alpha(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{s-1}{4}} K_{\alpha+\frac{s-1}{2}}(2\sqrt{\beta\varepsilon}) \quad (23)$$

Notons que la loi de Halphen en Amplitude $\mathcal{HGA}[\alpha, \beta, \varepsilon]$ est définie pour toute valeur de α dès lors que $\beta > 0$ et $\varepsilon > 0$. En revanche, les cas limites $\varepsilon = 0$ ou $\beta = 0$ nécessitent une analyse plus détaillée :

- Si $\varepsilon = 0$, alors on doit avoir $\beta > 0$ et $\alpha > 0$, et on retrouve une loi de Nakagami qui s'exprime comme (voir B.4) :

$$\mathcal{RN}[\mu, L](x) = \frac{2\sqrt{L}}{\mu\Gamma(L)} \left(\frac{\sqrt{L}x}{\mu}\right)^{2L-1} e^{-\left(\frac{\sqrt{L}x}{\mu}\right)^2} = \frac{2\sqrt{L}}{\mu\Gamma(L)} \left(\frac{\sqrt{L}x}{\mu}\right)^{2L-1} e^{-\frac{Lx^2}{\mu^2}}$$

avec $L = \alpha > 0$ et $\mu = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$.

- Si $\beta = 0$, alors on doit avoir $\varepsilon > 0$ et $\alpha < 0$, et on retrouve une loi de Nakagami Inverse qui s'exprime comme (voir B.5) :

$$\mathcal{RN}\mathcal{I}[\mu, M](x) = \frac{2}{\mu\sqrt{M}\Gamma(M)} \left(\frac{\sqrt{M}\mu}{x}\right)^{2M+1} e^{-\left(\frac{\sqrt{M}\mu}{x}\right)^2} = \frac{2}{\mu\sqrt{M}\Gamma(M)} \left(\frac{x}{\sqrt{M}\mu}\right)^{-2M-1} e^{-\frac{M\mu^2}{x^2}}$$

avec $M = -\alpha > 0$ et $\mu = \sqrt{\frac{\varepsilon}{-\alpha}}$

Si l'on reprend l'expression de la loi inverse-gaussienne généralisée (relation 9)

$$\mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda) = \frac{(\lambda/\gamma)^{\alpha/2}}{K_\alpha(2\sqrt{\lambda\gamma})} x^{2\alpha-1} e^{-\frac{\gamma}{x^2} - \lambda x^2}$$

on retrouve exactement la loi de Halphen en amplitude (relation 22), avec la table de correspondance suivante qui permet de retrouver formellement l'expression du paragraphe III "Amplitude Backscatter" de l'article de Frery [7] :

Halphen	Frery
α	α
β	λ
ε	γ

et ses limitations dans l'espace des paramètres données en fonction du paramètre α (relation (1) de [7]) :

$$\begin{cases} \gamma > 0, \lambda \geq 0 & \text{si } \alpha < 0 & \text{cas limite : } \lambda = 0 : \mathcal{RN}\mathcal{I} \\ \gamma > 0, \lambda > 0 & \text{si } \alpha = 0 & \\ \gamma \geq 0, \lambda > 0 & \text{si } \alpha > 0 & \text{cas limite : } \gamma = 0 : \mathcal{RN} \end{cases} \quad (24)$$

2.5 La loi \mathcal{HM} : loi de Halphen modifiée

2.5.1 Le comportement du mode de la loi de Halphen

Halphen a défini sa loi en dédiant un paramètre pour ajuster la position du mode : c'est le paramètre α qui fait varier le mode dans $[0, \infty[$. Dans certaines disciplines, dont l'imagerie RSO, c'est la forme de la loi qui compte le plus, la valeur du premier moment ou du mode dépendant le plus souvent d'un gain arbitraire fixé lors du processus d'acquisition.

Considérons le mode de la loi de Halphen dans le cas $\beta > 0$ (relation 14) :

$$m_{mode} = \frac{(\alpha - 1) + \sqrt{(\alpha - 1)^2 + 4\varepsilon\beta}}{2\beta}$$

et choisissons une valeur particulière pour α :

$$\alpha = \beta - \varepsilon \quad (25)$$

Le mode prend alors la valeur :

$$m_{mode} = \frac{(\beta - \varepsilon - 1) + \sqrt{(\beta - \varepsilon - 1)^2 + 4\varepsilon\beta}}{2\beta} \quad (26)$$

et appartient au domaine $]0, 1]$. En effet, il est facile de montrer que le mode est une fonction croissante tant en β qu'en ε et que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} m_{mode} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} m_{mode} = 1$$

On a les cas limites⁸ :

$$\begin{aligned} \varepsilon \rightarrow 0 &\Rightarrow m_{mode} = \frac{(\beta-1) + \sqrt{(\beta-1)^2}}{2\beta} = \begin{cases} \frac{\beta-1}{\beta} & \text{si } \beta \geq 1 \\ 0 & \text{si } \beta \leq 1 \end{cases} \\ \beta \rightarrow 0 &\Rightarrow m_{mode} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} \end{aligned}$$

Dans ce contexte, la loi de Halphen s'écrit :

$$\mathcal{H}[\alpha = \beta - \varepsilon, \beta, \varepsilon](x) = \frac{1}{2 \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{\beta-\varepsilon}{2}} K_{\beta-\varepsilon}(2\sqrt{\beta\varepsilon})} x^{\beta-\varepsilon-1} e^{-\beta x - \frac{\varepsilon}{x}} \quad (27)$$

sa fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit :

$$\phi(s) = \frac{1}{K_{\beta-\varepsilon}(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{s-1}{2}} K_{\beta-\varepsilon+s-1}(2\sqrt{\beta\varepsilon}) \quad (28)$$

et son mode est borné et appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

2.5.2 Définition de la loi de Halphen modifiée

Puisque les lois traditionnellement utilisées en imagerie radar font intervenir un paramètre μ lié au premier moment et au mode, et qui peut aussi s'interpréter comme un facteur d'échelle, la loi de Halphen modifiée, notée \mathcal{HM} , se déduit de la loi de Halphen par les deux points suivants :

- le choix du paramètre α , imposé par la relation : $\alpha = \beta - \varepsilon$,
- l'introduction d'un paramètre μ jouant le rôle d'un facteur d'échelle.

En partant de l'expression 28 pour la fonction caractéristique de deuxième espèce, on a alors la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi de Halphen modifiée⁹ :

$$\phi_{\mathcal{HM}}(s) = \mu^{s-1} \frac{1}{K_{\beta-\varepsilon}(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{s-1}{2}} K_{\beta-\varepsilon+s-1}(2\sqrt{\beta\varepsilon}) \quad (29)$$

et on en déduit l'expression de la loi de Halphen modifiée, $\mathcal{HM}[\mu, \beta, \varepsilon]$:

$$\mathcal{HM}[\mu, \beta, \varepsilon](x) = \frac{1}{2\mu \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{\beta-\varepsilon}{2}} K_{\beta-\varepsilon}(\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{x}{\mu}\right)^{\beta-\varepsilon-1} e^{-\frac{\beta x}{\mu} - \frac{\varepsilon\mu}{x}} \quad (30)$$

On obtient ainsi une loi avec trois paramètres :

8. sachant que, par définition de la loi de Halphen –paragraphe 2.3.2–, β et ε ne peuvent être simultanément nuls.

9. L'effet "facteur d'échelle" donné au paramètre μ se fonde sur la propriété **TM 1** de la transformée de Mellin (voir annexe E.1).

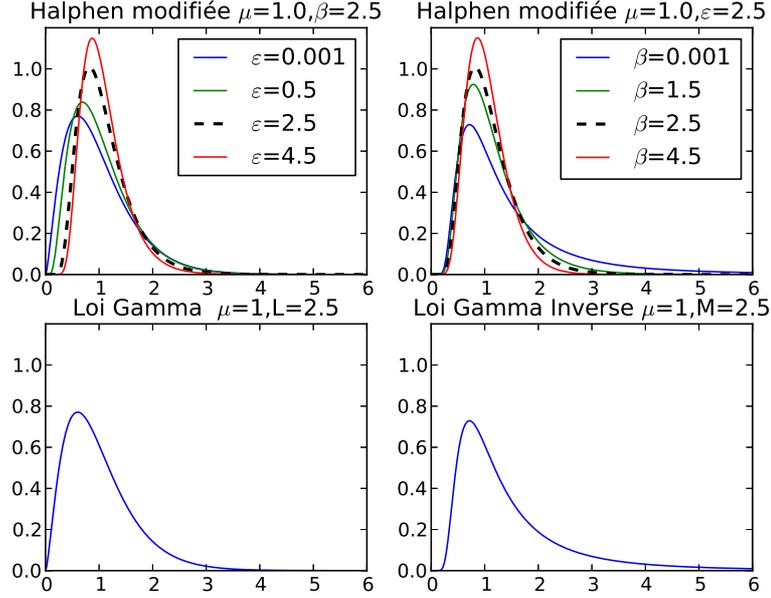


FIGURE 4 – A gauche : loi de Halphen modifiée avec $\beta = 2.5$, pour diverses valeurs de ε . Le cas $\varepsilon \sim 0$ donne une loi Gamma ($L = 2.5$, en bas). A droite : loi de Halphen modifiée avec $\varepsilon = 2.5$ et pour diverses valeurs de β . La valeur limite $\beta \sim 0$ donne une loi Gamma Inverse ($M = 2.5$, en bas). A gauche et à droite, les lois de Halphen modifiée avec $\beta = 2.5$ et $\varepsilon = 2.5$ sont tracées en pointillé. Rappelons que la loi de Halphen modifiée est construite à partir d'une loi de Halphen particulière : $\mathcal{H}[\alpha, \beta, \varepsilon]$ avec $\alpha = \beta - \varepsilon$.

- le premier, μ , est un facteur d'échelle et donne un ordre de grandeur pour le mode et les moments ;
- le second, β , donne à la loi de Halphen modifiée une allure de loi Gamma d'autant plus marquée que le coefficient ε est petit ;
- le troisième, ε , donne à la loi de Halphen modifiée une allure de loi Gamma Inverse d'autant plus marquée que le coefficient β est petit.

On retrouve le comportement de la loi de Fisher pour laquelle les deux paramètres L et M donnent un caractère plus ou moins important aux effets de la loi Gamma d'une part et de la loi Gamma Inverse d'autre part. Il faut noter que le paramètre α , introduit spécifiquement par Halphen pour ajuster le mode, a disparu et que c'est le paramètre μ qui joue ce rôle d'ajustement.

2.5.3 Propriétés

La loi de Halphen modifiée est une loi à 3 paramètres : elle peut donc s'exprimer sous la forme d'une loi de Halphen et on montre aisément que :

$$\mathcal{HM}[\mu, \beta, \varepsilon](x) = \mathcal{H}\left[\beta - \varepsilon, \frac{\beta}{\mu}, \varepsilon\mu\right](x) \quad (31)$$

On en déduit directement les cas limites de la loi de Halphen modifiée :

- Si on a $\beta \rightarrow 0$, on obtient (relation 15) :

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 0} \mathcal{HM}[\mu, \beta, \varepsilon] &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \mathcal{H}\left[\beta - \varepsilon, \frac{\beta}{\mu}, \varepsilon\mu\right] \\ &= \mathcal{GI}[\mu, \varepsilon] \end{aligned}$$

– Si on a $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient (relation 16) :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{HM}[\mu, \beta, \varepsilon] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}[\beta - \varepsilon, \frac{\beta}{\mu}, \varepsilon\mu] \\ &= \mathcal{G}[\mu, \beta] \end{aligned}$$

Par construction, pour $\beta > 0$ et $\varepsilon > 0$, son mode vérifie la relation :

$$mode_{\mathcal{HM}} = \frac{(\beta - \varepsilon - 1) + \sqrt{(\beta - \varepsilon - 1)^2 + 4\varepsilon\beta}}{2\beta} \mu$$

et appartient à l'intervalle borné $]0, \mu]$. Puisque le cas $\beta = 0$ correspond à la loi Gamma Inverse et le cas $\varepsilon = 0$ à la loi Gamma, on voit que le mode de la loi de Halphen Modifiée appartient à l'intervalle borné $[0, \mu]$ (voir figure 5).

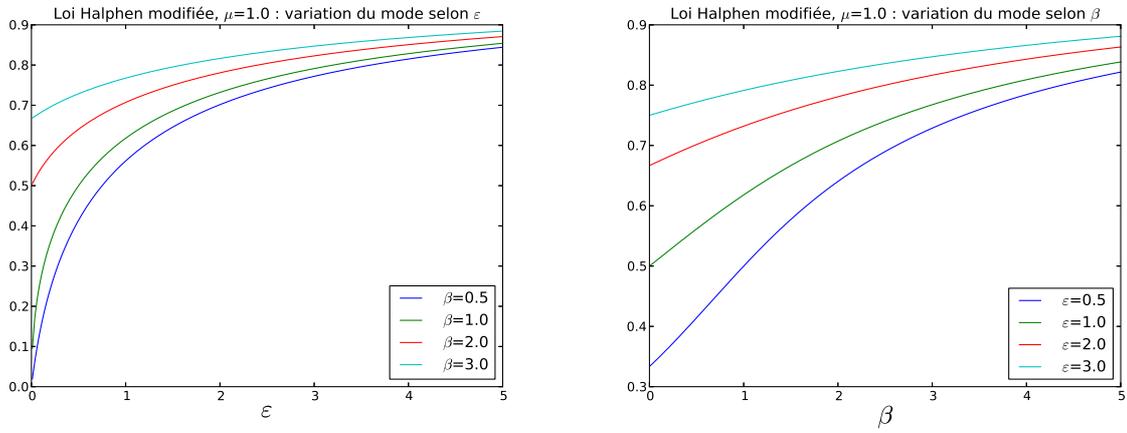


FIGURE 5 – Etude de la variation du mode de la loi de Halphen modifiée avec $\mu = 1$. A gauche : variation selon ε pour plusieurs valeurs de β (pour $\varepsilon = 0$, on retrouve le comportement de la loi Gamma). A droite : variation selon β pour plusieurs valeurs de ε (pour $\beta = 0$, on retrouve le comportement de la loi Gamma Inverse).

Une des propriétés importantes de la loi de Halphen modifiée repose dans l'expression de sa loi inverse. En effet, soit une loi de Halphen modifiée $\mathcal{HM}[\mu, \beta, \varepsilon]$; en notant $\mathcal{HMI}[\mu, \beta, \varepsilon]$ sa loi inverse, et en utilisant l'expression de la fonction caractéristique de seconde espèce (relation 29) et les propriétés des fonctions de Bessel, on a :

$$\mathcal{HMI}[\mu, \beta, \varepsilon] = \mathcal{HM}[\frac{1}{\mu}, \varepsilon, \beta]$$

La loi de Halphen modifiée est donc sa propre loi inverse (au même titre que la loi de Fisher qui est elle aussi sa propre loi inverse).

2.5.4 La loi de Halphen modifiée dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$

Considérons la loi de Halphen modifiée $\mathcal{HM}[\mu, \beta, \varepsilon]$: sa loi inverse est donc $\mathcal{HM}[\frac{1}{\mu}, \varepsilon, \beta]$. Analysons son comportement dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$. Pour commencer, prenons les exemples de la figure 4 pour lesquels on a analysé les évolutions de cette loi avec $\beta = 2.5$ pour plusieurs valeurs de ε ainsi que ses évolutions avec $\varepsilon = 2.5$ pour plusieurs valeurs de β . La figure 6 propose donc l'évolution de cette loi d'une part pour $\varepsilon = 2.5$ et $\beta \in [0; 2.5]$ et d'autre part pour $\beta = 2.5$ et $\varepsilon \in [0; 2.5]$. Etant donné les caractéristiques de la loi inverse, le comportement de ces lois de Halphen modifiées dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ sera symétrique vis à vis de l'axe vertical.

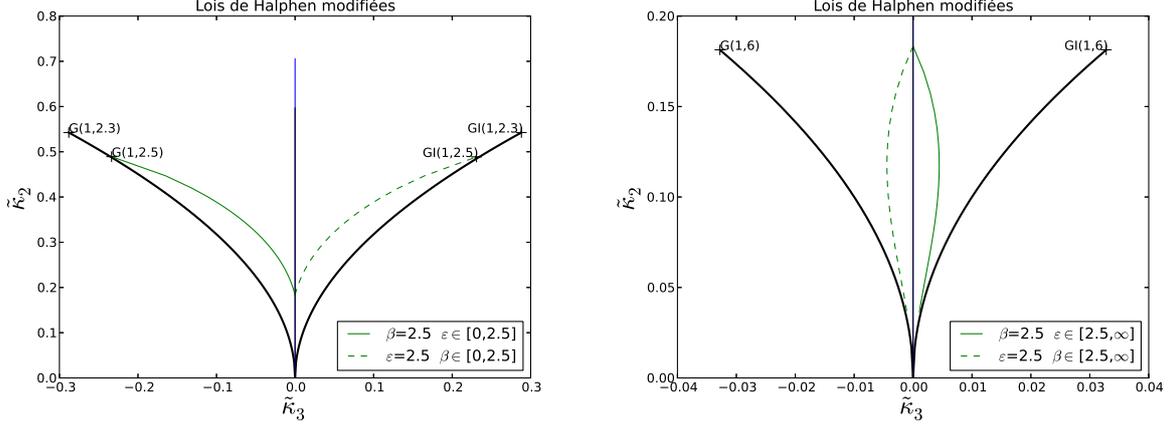


FIGURE 6 – A gauche : représentation dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ des lois de Halphen modifiées d’une part pour $\varepsilon = 2.5$ et $\beta \in [0; 2.5]$ (branche de droite, dans le quadrant “queue lourde”) et d’autre part pour $\beta = 2.5$ et $\varepsilon \in [0; 2.5]$ (branche de gauche). Les lois Gamma et Gamma Inverse de référence sont représentées pour des valeurs de L supérieures à 2.3. A droite : zoom sur le cas $\varepsilon = 2.5$ et $\beta \in [2.5; \infty]$ (la branche est passé dans le quadrant de droite) et le cas $\beta = 2.5$ et $\varepsilon \in [2.5; \infty]$ (la branche est passé dans le quadrant de gauche). Cette zone du diagramme correspond à des lois fortement localisées autour du mode.

2.6 Premières remarques sur les lois de Halphen

La loi de Halphen est paramétré par une variable, β , qui diminue d’autant plus l’allure “Loi Gamma” de la loi de Halphen que cette variable est petite. De même une autre variable de la loi de Halphen, ε , diminue d’autant plus l’allure “Loi Gamma Inverse” de la loi de Halphen que cette variable est petite. On peut s’attendre à ce que la loi de Halphen ait un comportement de “loi à queue lourde” (absence de moments à partir d’un certain ordre) dès que β est très petit puisque la loi Gamma Inverse est une loi à queue lourde. De même, on peut s’attendre à ce que la loi de Halphen ait un comportement de “loi à tête lourde” (absence de moments négatifs à partir d’un certain ordre) dès que ε est très petit puisque la loi Gamma est une loi à tête lourde.

Or, tant que β et ε sont non nuls, la loi de Halphen possède tous ses moments aussi bien positifs que négatifs, propriété que ne possède que très rarement les lois habituellement utilisées : en pratique, seule la loi log-normale est connue pour posséder cette propriété.

A ce stade, une comparaison approfondie avec la loi de Fisher s’impose. En effet, soit une loi de Fisher $\mathcal{F}[\mu_F, L, M]$: elle est obtenue par convolution de Mellin d’une loi Gamma et d’une loi Gamma Inverse :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mu_F, L, M](x) &= \mathcal{G}[\mu_F, L](x) \hat{\star} \mathcal{GI}[1, M](x) \\ &= \frac{L}{M\mu_F} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{\left(\frac{Lx}{M\mu_F}\right)^{L-1}}{\left(1 + \frac{Lx}{M\mu_F}\right)^{L+M}} \end{aligned}$$

On retrouve la démarche d’Halphen d’associer loi exponentielle et loi exponentielle inverse et on a les mêmes cas limite que pour la loi d’Halphen puisque que :

$$\begin{cases} \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{F}[\mu_F, L, M](x) = \mathcal{G}[\mu_F, L](x) \\ \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{F}[\mu_F, L, M](x) = \mathcal{GI}[\mu_F, M](x) \end{cases}$$

Cependant, les caractéristiques de la loi de Fisher conservent les propriétés intrinsèques des lois Gamma et Gamma inverse sous jacentes puisque, si on a la loi de Fisher $\mathcal{F}[\mu_F, L, M]$, celle ci a les propriétés suivantes :

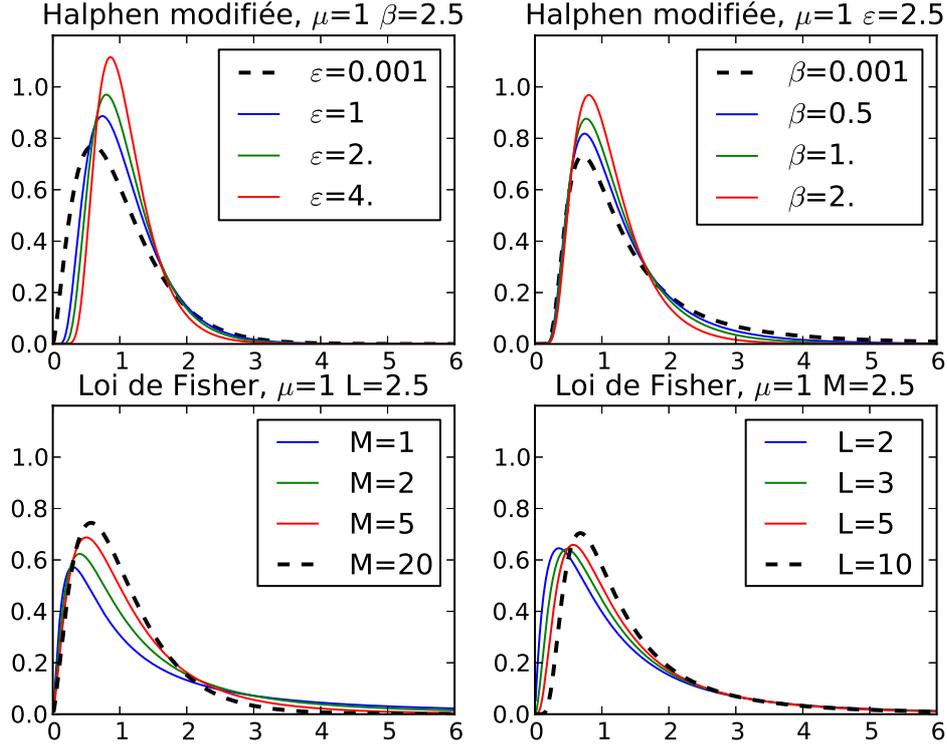


FIGURE 7 – A gauche, en haut : loi de Halphen modifiée avec $\beta = 2.5$, pour diverses valeurs de ε . Le cas $\varepsilon \sim 0$ donne une loi Gamma ($L = 2.5$, tracée en pointillé). A gauche, en bas : loi de Fisher avec $L = 2.5$, pour diverses valeurs de M . Le cas $M \rightarrow \infty$ donne une loi Gamma (le cas $L = 2.5, M = 20$ s'en approche et est tracé en pointillé). A droite, en haut : loi de Halphen modifiée avec $\varepsilon = 2.5$ et pour diverses valeurs de β . La valeur limite $\beta \sim 0$ donne une loi Gamma Inverse ($M = 2.5$, tracée en pointillé). A droite, en bas : loi de Fisher avec $M = 2.5$, pour diverses valeurs de L . Le cas $L \rightarrow \infty$ donne une loi Gamma Inverse (le cas $L = 10, M = 2.5$ s'en approche et est tracé en pointillé).

- propriété de queue lourde de la loi Gamma inverse $\mathcal{GI}[\mu_F, M]$: les moments d'ordre supérieurs ou égal à M ne sont pas définis ;
- propriété de tête lourde de la loi Gamma $\mathcal{G}[\mu_F, L]$: les moments d'ordre inférieurs ou égal à $-L$ ne sont pas définis.

La figure 7 illustre bien cette propriété : seule la loi de Fisher semble donner une loi à queue lourde, alors que la loi de Halphen modifiée concentre sa pdf autour du mode. De manière plus précise, on peut remarquer que (images de gauche) :

- Pour $\beta = 2.5$ et en partant du cas limite $\varepsilon \sim 0$ (c'est à dire la loi Gamma $L = 2.5$), les lois de Halphen modifiées construites en faisant croître la valeur de ε donnent des lois de mieux en mieux localisées autour du mode, qui tend vers la valeur $\mu = 1$. En effet, sur le mode, la valeur de la densité de probabilité croît quand ε croît.
- Pour $L = 2.5$ et en partant du cas limite $M \rightarrow \infty$ (c'est à dire la loi Gamma $L = 2.5$), les lois de Fisher construites en faisant décroître la valeur de M donnent des lois qui ont une tendance "queue lourde" et dont le mode s'écarte de la valeur $\mu = 1$ pour atteindre le mode de la loi Gamma inverse ($\frac{M}{M+1}\mu$, voir annexe C.5), c'est à dire ici la valeur 0.5 pour le cas $M = 1$. Notons que ce cas ($L = 2.5, M = 1$) n'admet pas de moments d'ordre égal ou supérieur à 1, ce qu'illustre bien la tendance "queue lourde" de la loi.

2.7 Comparaison des lois de Halphen modifiées, des lois Gamma Généralisées et des lois de Fisher dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2\text{-}\tilde{\kappa}_3$

Pour permettre une comparaison plus aisée des lois de Halphen modifiées, des lois Gamma Généralisées et des lois de Fisher, nous allons nous placer dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2\text{-}\tilde{\kappa}_3$ et choisir des familles de lois permettant de passer continûment des lois Gamma (branche de gauche) aux lois Gamma Inverses (branche de droite). Pour cela nous allons définir les familles de lois suivantes :

- les lois de Halphen modifiées $\mathcal{HM}[\mu, \beta, \varepsilon]$ telles que

$$\varepsilon + \beta = Cste$$

et pour lesquelles on fait varier β entre la valeur 0 (cas de la loi Gamma Inverse de paramètre de forme $M = \varepsilon$) et la constante (cas de la loi Gamma de paramètre de forme $L = \beta$).

- les lois Gamma Généralisées $\mathcal{GG}[\mu, L, \eta]$, caractérisées par un paramètre *sigma* unique tel que

$$L = \frac{1}{\eta^2 \sigma^2}$$

et pour lesquelles on fait varier η entre les valeurs 1 (cas de la loi Gamma) et -1 (cas de la loi Gamma Inverse). Ce choix¹⁰ du paramètre de forme L permet d'exprimer le cas limite $\eta = 0$ comme une loi Log-normale¹¹ :

$$\lim_{\eta=0} \mathcal{GG}[\mu, L, \eta] = \mathcal{L}[\log(\mu), \sigma_{LN}]$$

avec $\sigma_{LN} = L$.

- les lois de Fisher $\mathcal{F}[\mu_F, L, M]$ telles que :

$$\frac{1}{L} + \frac{1}{M} = \frac{1}{L_0} = Cste$$

et pour lesquelles on fait varier M entre l'infini (cas de la loi Gamma de paramètre de forme L_0) et la valeur L_0 (cas de la loi Gamma Inverse de paramètre de forme L_0).

En comparant ces trois familles, on peut noter que le cas des lois de Halphen modifiées coupe l'axe des ordonnées en des points correspondant à des lois au mode beaucoup plus fortement marqué que dans le cas des lois Gamma Généralisées et que dans le cas des lois de Fisher.

2.8 Etude comparative des modes de la loi de Halphen modifiée et de la loi de Fisher

Pour approfondir cette dernière observation, étudions donc les modes de ces lois, et plus spécifiquement les modes de la loi de Halphen modifiée et ceux de la loi de Fisher (l'annexe D.2.2 est dédié aux modes des lois du système de Pearson, donc des lois usuelles en imagerie radar).

On trouve facilement l'expression des modes de la loi de Halphen modifiée (puisqu'elle appartient au système de Pearson étendu), donnée par la relation 26 :

$$m_{\text{mode, HM}} = \left(\frac{(\beta - \varepsilon - 1) + \sqrt{(\beta - \varepsilon - 1)^2 + 4\varepsilon\beta}}{2\beta} \right) \mu$$

10. Notons que dans le cas général, aucune loi Gamma Généralisée ne peut se représenter sur l'axe des ordonnées dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2\text{-}\tilde{\kappa}_3$. Cet axe représente une discontinuité pour ces lois qui correspond au fait que le paramètre η –qui apparaît en valeur absolue dans la définition de la loi Gamma Généralisée– est négatif dans le quadrant de gauche et positif dans le quadrant de droite.

11. Cette loi a comme caractéristique d'avoir ses log-cumulants identiquement nuls à partir de l'ordre 3.

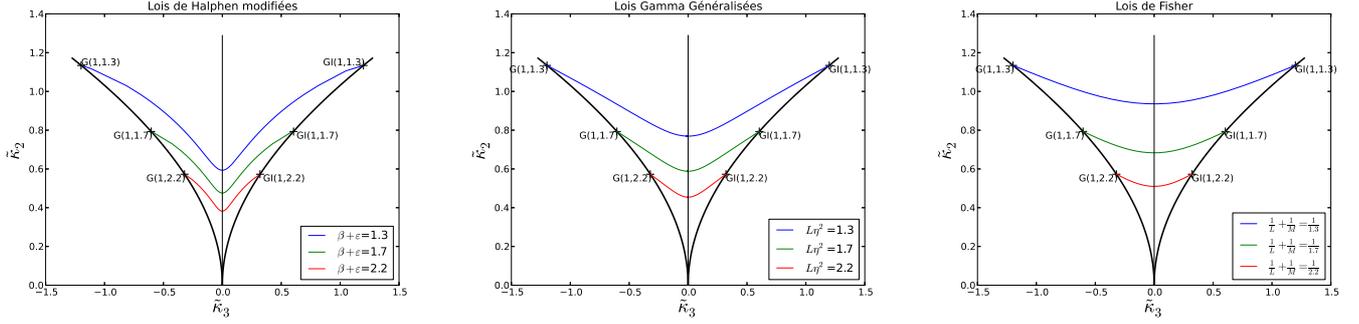


FIGURE 8 – A gauche : représentation dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ des lois de Halphen modifiées dans le cas $\varepsilon + \beta = Cste$. Au milieu : représentation dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ des lois Gamma Généralisées dans le cas $L\eta^2 = Cste$. A droite : représentation dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ des lois de Fisher dans le cas $\frac{1}{L} + \frac{1}{M} = Cste$.

De même les modes de la loi de Fisher (qui appartient au système de Pearson) sont donnés par (tableau 1) :

$$m_{\text{mode},F} = \frac{(L-1)M}{L(M+1)}\mu_F$$

En se plaçant dans les cas suivants :

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \beta \\ M &= L\end{aligned}$$

on obtient :

$$m_{\text{mode},HM} = \frac{\sqrt{1+4\beta^2} - 1}{2\beta} \mu \quad m_{\text{mode},F} = \begin{cases} \frac{L-1}{L+1} \mu_F & \text{si } L \geq 1 \\ 0 & \text{si } L < 1 \end{cases}$$

et on observe que pour les deux lois le mode appartient à l'intervalle $[0; 1]$. La figure 9 permet de comparer les comportements du mode en fonction des paramètres $\varepsilon = \beta$ pour la loi de Halphen et $L = M$ pour la loi de Fisher. Si la position du mode suit une courbe tout à fait comparable dans l'intervalle $[0; 1]$, les courbes des lois correspondantes sont beaucoup plus resserrées autour du mode pour les lois de Halphen que pour les lois de Fisher : une fois de plus, le fait que les lois de Halphen possèdent tous leurs moments (aussi bien positifs que négatifs) influe l'allure de cette loi qui n'est donc ni à queue lourde ni à tête lourde.

3 L'extention "Compound Halphen" et la loi \mathcal{G}_A de Frery

3.1 Texture définie par une loi de Halphen et chatoisement pleinement développé

Goodman parle dans son ouvrage [9] de "Compound speckle" construit à partir d'une texture sur laquelle on ajoute un bruit multiplicatif (lié au chatoisement). L'objectif de ce paragraphe est donc de construire des lois à partir des lois de Halphen en faisant opérer par convolution de Mellin une loi de chatoisement classique : la loi Gamma.

Soient des données en amplitude. On suppose donc que la texture suit la loi $\mathcal{HG}[\alpha, \beta, \varepsilon, \eta = 2](x)$ et que le speckle suit la loi de Nakagami $\mathcal{RN}[1, N]$

Le chatoisement agissant multiplicativement, on a directement la fonction caractéristique de deuxième espèce de cette nouvelle loi en multipliant les fonctions caractéristiques de deuxième espèce de la loi de Halphen généralisée et de la loi de Nakagami, ce qui donne :

$$\phi(s) = \left[\frac{1}{K_\alpha (2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\varepsilon}{\beta} \right)^{\frac{s-1}{4}} K_{\alpha+\frac{s-1}{2}} (2\sqrt{\beta\varepsilon}) \right] \left[\frac{\Gamma(N + \frac{s-1}{2})}{N^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(N)} \right] \quad (32)$$

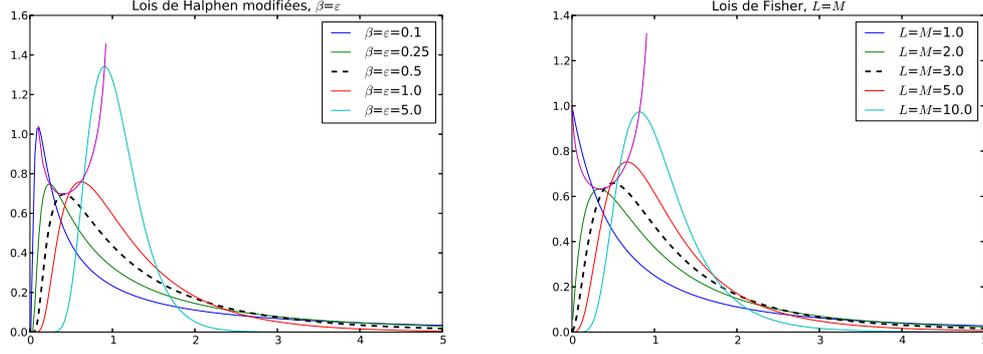


FIGURE 9 – A gauche : lois de Halphen modifiées dans les cas particuliers $\varepsilon = \beta$. La position du mode est localisée dans l'intervalle $[0; 1]$ et les lois sont bien resserrées autour de leur mode. A droite : lois de Fisher dans le cas particulier $L = M$. Là aussi la position du mode est localisée dans l'intervalle $[0; 1]$, mais la tendance “queue lourde” des lois de Fisher fait s'étaler la loi de manière plus ou moins marquée.

que l'on réécrit sous la forme :

$$\phi(s) = \frac{1}{K_\alpha (2\sqrt{\beta\varepsilon})} \frac{N^N}{\Gamma(N)} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta}}\right)^{-N} \frac{1}{N^{N+\frac{s-1}{2}}} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta}}\right)^{N+\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(N + \frac{s-1}{2}\right) K_{(\alpha-N)+N+\frac{s-1}{2}}(2\sqrt{\beta\varepsilon})$$

Considérons maintenant l'expression :

$$\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta}}\right)^{\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right) K_{(\alpha-N)+\frac{s-1}{2}}(2\sqrt{\beta\varepsilon})$$

Comme on trouve dans les tables de transformée de Mellin Inverse ([16], relation 7.102) la relation suivante :

$$\mathcal{M}^{-1}\left(\left(\frac{2a}{b}\right)^{\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) K_{\nu+\frac{z}{2}}(ab)\right) = 2a^{-\nu} (a^2 + x^2)^{\frac{z}{2}} K_\nu(b\sqrt{a^2 + x^2})$$

on effectue l'identification suivante :

$$\begin{cases} \frac{2a}{b} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta}} \\ \frac{z}{2} = \frac{s-1}{2} \\ \nu + \frac{z}{2} = \frac{s-1}{2} + \alpha - N \\ ab = 2\sqrt{\beta\varepsilon} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{\varepsilon} \\ b = 2\sqrt{\beta} \\ z = s-1 \\ \nu = \alpha - N \end{cases} \quad (33)$$

on obtient la transformée de Mellin inverse suivante :

$$\mathcal{M}^{-1}\left[\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta}}\right)^{\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right) K_{\frac{s-1}{2}+\alpha-N}(2\sqrt{\beta\varepsilon})\right] = 2(\sqrt{\varepsilon})^{N-\alpha} (\varepsilon + x^2)^{\frac{\alpha-N}{2}} K_{-\alpha+N}(2\sqrt{\beta}(\varepsilon + x^2))$$

Ensuite, passer de la variable de Mellin $(s-1)/2$ à la variable de Mellin $(s-1)/2 + N$, il faut utiliser la propriété **TM 2**, ce qui permet d'écrire :

$$\mathcal{M}^{-1}\left[\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta}}\right)^{\frac{s+N-1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+N-1}{2}\right) K_{\frac{s-1}{2}+\alpha}(2\sqrt{\beta\varepsilon})\right] = 2(\sqrt{\varepsilon})^{N-\alpha} x^{2N-1} (\varepsilon + x^2)^{\frac{\alpha-N}{2}} K_{-\alpha+N}(2\sqrt{\beta}(\varepsilon + x^2))$$

Et enfin, pour prendre en compte le facteur $1/N^{\frac{s-1}{2}}$, on utilise la propriété **TM 1** (annexe E.1), et on en déduit que la loi recherchée s'écrit :

$$\mathcal{HG}[\alpha, \beta, \varepsilon, \eta = 2] \hat{\star} \mathcal{RN}[1, N] = \frac{2}{K_\alpha(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \frac{N^N}{\Gamma(N)} (\sqrt{\beta})^N (\sqrt{\varepsilon})^{-\alpha} x^{2N-1} (\varepsilon + Nx^2)^{\frac{\alpha-N}{2}} K_{-\alpha+N} \left(2\sqrt{\beta(\varepsilon + Nx^2)} \right) \quad (34)$$

La fonction génératrice des moments s'exprime grâce à la relation 32, ce qui donne :

$$m_r = \frac{1}{K_\alpha(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\varepsilon}{\beta} \right)^{\frac{r}{4}} K_{\alpha+\frac{r}{2}} \left(2\sqrt{\beta\varepsilon} \right) \frac{\Gamma(N + \frac{r}{2})}{N^{\frac{r}{2}} \Gamma(N)} \quad (35)$$

3.2 Les cas limites

Comme précédemment dans l'étude des lois de Halphen, nous allons étudier les cas limites que sont $\beta \rightarrow 0$ et $\varepsilon \rightarrow 0$.

– si on a $\varepsilon \rightarrow 0$, alors $\mathcal{HG}[\alpha, \beta, \varepsilon, \eta = 2] \rightarrow \mathcal{RN} \left[\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \alpha \right]$ et la loi devient :

$$\mathcal{RN} \left[\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \alpha \right] \hat{\star} \mathcal{RN}[1, N]$$

on reconnaît une loi \mathcal{K} en amplitude. Celle ci a pour limite $\mathcal{RN}[1, N]$ si $\beta \rightarrow 0$.

– si on a $\beta \rightarrow 0$, alors $\mathcal{HG}[\alpha, \beta, \varepsilon, \eta = 2] \rightarrow \mathcal{RN}\mathcal{I} \left[\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}}, -\alpha \right]$ et la loi devient :

$$\mathcal{RN}\mathcal{I} \left[\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}}, -\alpha \right] \hat{\star} \mathcal{RN}[1, N]$$

on reconnaît une loi de Fisher en amplitude. Celle ci a pour limite $\mathcal{RN}[1, N]$ si $\varepsilon \rightarrow 0$.

3.3 Une construction d'une loi à 4 paramètres par convolution de Mellin : la loi U

3.3.1 Loi U

Les approches de Halphen sont fondées sur un produit de loi Gamma et de loi Gamma Inverse. Si l'on se place dans le contexte où ces deux lois opèrent par convolution de Mellin, nous avons vu que l'on obtenait une loi de Fisher :

$$\mathcal{F}[\mu, L, M] = \mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, M]$$

Si l'on suppose alors que l'on rajoute un bruit multiplicatif suivant une loi Gamma unitaire de paramètre N , on obtient la loi U :

$$Q_U[\mu, L, M, N] = \mathcal{F}[\mu, L, M] \hat{\star} \mathcal{G}[1, N]$$

proposée par Delignon [5].

Cette loi s'écrit à l'aide d'une fonction de Whittaker[15]¹² :

$$Q_U[\mu, M, N] = \frac{\Gamma(L+M) \Gamma(M+N)}{\Gamma(L) \Gamma(M) \Gamma(N)} \frac{LN}{M\mu} \left(\frac{LNx}{M\mu} \right)^{\frac{L+N-3}{2}} e^{\frac{LNx}{2M\mu}} W_{\frac{1-L-2M-N}{2}, \frac{L-N}{2}} \left(\frac{LNx}{M\mu} \right)$$

dont la fonction caractéristique de deuxième espèce (donc la fonction génératrices des moments) s'écrit :

$$\phi_U(s) = \mu^{(s-1)} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s} \Gamma(M)} \frac{\Gamma(N+s-1)}{N^{s-1} \Gamma(N)}$$

12. Les deux paramètres L et N peuvent s'échanger, la convolution de Mellin étant commutative, et la fonction de Whittaker ayant la propriété suivante : $W_{\lambda, \mu} = W_{\lambda, -\mu}$

Dans cette formulation, L et N jouent un rôle identique (influence de la loi Gamma, effet de “tête lourde”) alors que M joue un rôle de “queue lourde” (loi Gamma Inverse).

Les moments de cette loi sont donc définis pour $r \in [-\min(L, N); M[$:

$$m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L+r)}{L^r \Gamma(L)} \frac{M^r \Gamma(M-r)}{\Gamma(M)} \frac{\Gamma(N+r)}{N^r \Gamma(N)}$$

Les log-cumulants ont une expression analytique assez sympathique :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_1 &= \log \mu + (\Psi(L) - \log L) - (\Psi(M) - \log M) + (\Psi(N) - \log N) \\ \tilde{\kappa}_2 &= \Psi(1, L) + \Psi(1, M) + \Psi(1, N) \\ \tilde{\kappa}_r &= \Psi(r-1, L) + (-1)^r \Psi(r-1, M) + \Psi(r-1, N) \quad \forall r > 1 \end{aligned}$$

D’une part cette expression montre que, dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$, la loi U est localisée dans la même zone que la loi de Fisher. D’autre part, étant donnée la monotonie des fonctions polygammas, elle permet une inversion numérique donnant une estimation des paramètres si l’on connaît expérimentalement les 4 premiers log-cumulants.

3.3.2 Loi U en amplitude

La loi U peut s’étendre à des données dites en amplitude, c’est à dire à des valeurs y telles que $y^2 = x$: cela revient à définir la loi U généralisée et à se cantonner au cas $\eta = 2$. En se fondant sur les relations 62 et 63 (dans l’annexe E dédiée à des rappels sur la transformée de Mellin), et en notant $Q_{U,A}[\mu, L, M, N](y)$ cette loi, on a alors l’expression de cette loi de probabilité :

$$Q_{U,A}[\mu, L, M, N](y) = \frac{\Gamma(L+M) \Gamma(M+N)}{\Gamma(L) \Gamma(M) \Gamma(N)} \frac{2}{\mu} \sqrt{\frac{LN}{M}} \left(\sqrt{\frac{LN}{M}} \frac{y}{\mu} \right)^{L+N-2} e^{\frac{LN}{2M} \frac{y^2}{\mu^2}} W_{\frac{1-L-2M-N}{2}, \frac{L-N}{2}} \left(\frac{LN}{M} \frac{y^2}{\mu^2} \right)$$

l’expression de sa fonction caractéristique de deuxième espèce :

$$\phi_{U,A}(s) = \mu^{\frac{s-1}{2}} \frac{\Gamma(L + \frac{s-1}{2})}{L^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M + \frac{1-s}{2})}{M^{\frac{1-s}{2}} \Gamma(M)} \frac{\Gamma(N + \frac{s-1}{2})}{N^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(N)} \quad (36)$$

Dans cette formulation, L et N jouent un rôle identique (influence de la loi de Nakagami, effet de “tête lourde”) alors que M joue un rôle de “queue lourde” (loi Nakagami Inverse). En fait, il faut se rappeler que l’on peut écrire la loi U en amplitude sous la forme de convolutions de Mellin mettant en jeu des lois de Nakagami et Nakagami Inverses :

$$Q_{U,A}[\mu, L, M, N] = \mathcal{RN}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{RN}\mathcal{I}[\mu, M] \hat{\star} \mathcal{RN}[1, N]$$

Les moments de cette loi se déduisent de 36 sont donc définis pour $r \in [-\min(L, N); M[$:

$$m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L + \frac{r}{2})}{L^{\frac{r}{2}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M - \frac{r}{2})}{M^{-\frac{r}{2}} \Gamma(M)} \frac{\Gamma(N + \frac{sr}{2})}{N^{\frac{r}{2}} \Gamma(N)} \quad (37)$$

L’expression de ses log-cumulants est donnée par :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_1 &= \log \mu + \frac{1}{2} ((\Psi(L) - \log L) - (\Psi(M) - \log M) + (\Psi(N) - \log N)) \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{1}{4} (\Psi(1, L) + \Psi(1, M) + \Psi(1, N)) \\ \tilde{\kappa}_r &= \frac{1}{2^r} (\Psi(r-1, L) + (-1)^r \Psi(r-1, M) + \Psi(r-1, N)) \quad \forall r > 1 \end{aligned}$$

Là aussi, étant donnée la monotonie des fonctions polygammas, une inversion numérique est possible, donnant une estimation des paramètres si l’on connaît expérimentalement les 4 premiers log-cumulants.

3.3.3 Comparaison de la loi U en amplitude et de la loi “Compound Halphen”

Commençons par comparer les moments de ces lois à 4 paramètres (expressions 35 et 37) :

Compound Halphen	$m_r = \frac{1}{K_\alpha(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{r}{4}} K_{\alpha+\frac{r}{2}}(2\sqrt{\beta\varepsilon}) \frac{\Gamma(N+\frac{r}{2})}{N^{\frac{r}{2}} \Gamma(N)}$
Loi U	$m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L+\frac{r}{2})}{L^{\frac{r}{2}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M-\frac{r}{2})}{M^{-\frac{r}{2}} \Gamma(M)} \frac{\Gamma(N+\frac{r}{2})}{N^{\frac{r}{2}} \Gamma(N)}$

On voit que le chatoiement joue un rôle identique (terme en $\frac{\Gamma(N+\frac{r}{2})}{N^{\frac{r}{2}} \Gamma(N)}$). Il joue un rôle majeur sur la loi Compound Halphen puisque cette loi ne possède pas ses moments négatifs pour $r \leq -2N$ alors que la loi de Halphen possède tous ses moments aussi bien positifs que négatifs. Ce changement de comportement s’observe sur la figure 10 où l’on voit qu’à l’origine on passe d’une pente nettement nulle pour la loi de Halphen à une pente non nulle pour la loi Compound Halphen.

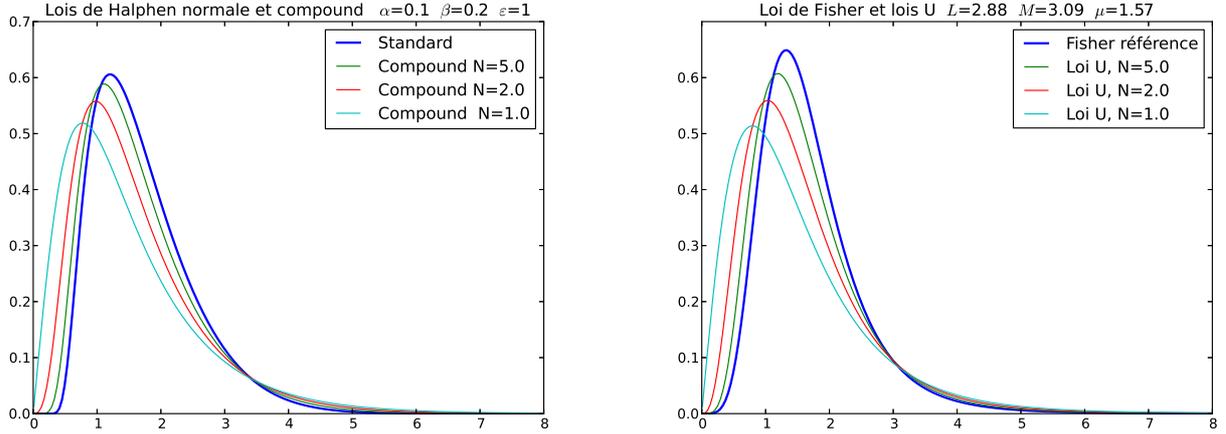


FIGURE 10 – A gauche : lois “Compound Halphen” construites à partir d’une loi de Halphen $\mathcal{H}[\alpha, \beta, \varepsilon]$ et un chatoiement paramétré par N . A droite : loi U en amplitude, construite à partir d’une loi de Fisher en amplitude ayant les mêmes log-cumulants que la loi de Halphen $\mathcal{H}[\alpha, \beta, \varepsilon]$. Rajouter le chatoiement modifie la loi de Halphen de sorte, qu’à l’origine, son comportement ne lui permet plus d’avoir tous ses moments négatifs. En revanche, dans le cas de la loi U : $\mathcal{UA}[\mu, L, M, N]$, sa composante “loi Gamma” lui interdisait déjà d’avoir des moments d’ordre $r < -2L$.

Ensuite, connaissant les paramètres de la Compound Halphen, on peut en calculer les 4 premiers moments. Il est alors possible de résoudre numériquement le système ainsi établi pour retrouver les 4 paramètres de la loi U. Donc on peut trouver une loi U ayant les mêmes quatre premiers moments qu’une loi Compound Halphen donnée. Le problème est que la loi U est une loi à queue lourde et que ses moments ne sont pas définis à partir d’un certain ordre.

Si l’on peut obtenir numériquement les log-cumulants de la Compound Halphen (Python par exemple permet ce genre d’opérations sans problème), alors il est préférable d’utiliser l’inversion par les log-cumulants pour obtenir une loi U ressemblant à une Compound Halphen : c’est par cette méthode qu’ont été tracées les lois U de la figure 10.

Sur le plan pratique, en situation expérimentale, on peut aussi estimer les 4 premiers log-cumulants pour retrouver les paramètres de la loi U sous-jacente. En revanche, faute d’expression

analytique pour les log-cumulants, on ne peut appliquer cette méthode pour la loi Compound Halphen.

Pour terminer cette comparaison, à partir des lois tracées figure 10, traçons pour comparaisons sur le même graphique la loi compound Halphen et la loi U correspondante (figure 11). On remarque que les lois sont de plus en plus ressemblantes au fur et à mesure que le bruit de type chatoisement augmente (c'est à dire pour de faibles valeurs de N).

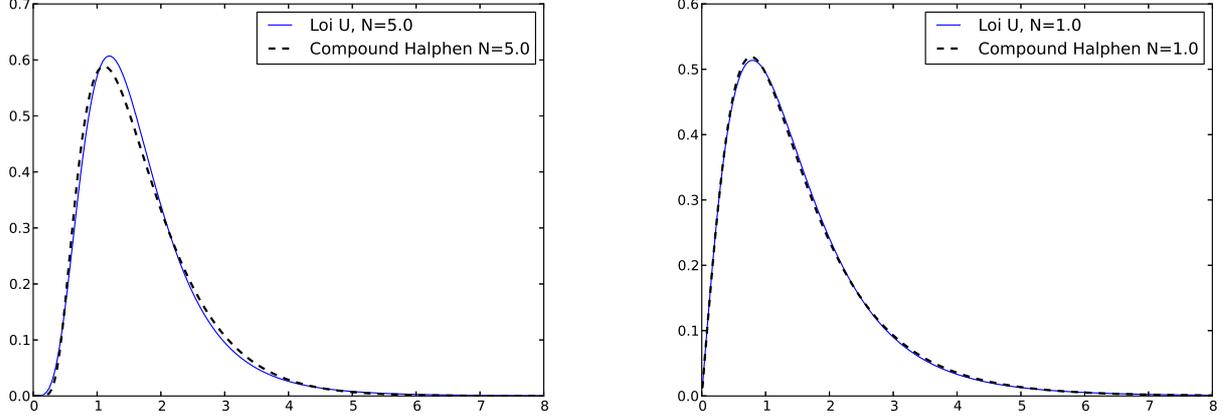


FIGURE 11 – Courbes extraites de la figure 10 : on constate que la loi compound Halphen peut être approchée par une loi U de manière d’autant plus réaliste que le chatoisement est marqué (faibles valeurs de N).

3.4 “Heterogeneous clutter” et “Extremely heterogeneous clutter” (Frery)

Sous ces étiquettes, Frery[7] tente de caractériser des familles de lois de distribution spécifiques à des données radar pour lesquelles le chatoisement est omni-présent et agit multiplicativement sur la loi de texture. Nous allons voir que sa démarche conduit aux lois “Compound Halphen”.

3.4.1 Lois des données en complexe

Tout d’abord, en supposant que l’amplitude de rétrodiffusion liée à la texture s’écrit sous une forme de loi de Halphen $\mathcal{H}[\alpha, \lambda, \gamma]$ –c’est à dire la loi inverse-gaussienne généralisée $\mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)$, voir paragraphe 2.4.3–, Frery exprime la contribution du chatoisement par ses parties réelle et imaginaire, liées par l’expression de la loi gaussienne bivariée centrée en 0 et de variance $1/2$: $\mathcal{N}2(0, 1/2)$.

On obtient ainsi la loi de probabilité que suivent partie réelle et partie imaginaire ([7], paragraphe IV Complex return) dans le cas de données “ monovues complexes ” :

$$\frac{1}{K_\alpha(2\sqrt{\lambda\gamma})} \sqrt{\frac{(\lambda/\gamma)^\alpha}{\pi}} \left(\frac{\gamma + x^2}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha-1/2}{2}} K_{\alpha-1/2}\left(2\sqrt{\lambda(\gamma + x^2)}\right) \quad x \in \mathbb{R}$$

3.4.2 Lois en amplitude

Dans le cadre des données en amplitude multivues (le chatoisement y intervient avec un paramètre de forme n), Frery suppose que la texture suit une loi de Halphen $\mathcal{H}[\alpha, \lambda, \gamma]$ –c’est à dire la loi inverse-gaussienne généralisée $\mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)$, voir paragraphe 2.4.3– et que le chatoisement est un “speckle à la Goodman” suivant une loi de Nakagami $\mathcal{RN}[1, n]$, notée $\Gamma^{1/2}(n, n)$:

$$\Gamma^{1/2}(n, n) = \frac{2n^n}{\Gamma(n)} y^{2n-1} e^{-ny^2}$$

En partant de l'expression 34 (loi Compound Halphen), et en opérant les changements de variables suivants :

Halphen	Frery
α	α
β	λ
ε	γ
N	n

on obtient la loi sous la forme :

$$\frac{2}{K_\alpha(2\sqrt{\lambda\gamma})} \frac{n^n}{\Gamma(n)} (\sqrt{\lambda})^n (\sqrt{\gamma})^{-\alpha} x^{2n-1} (\gamma + nx^2)^{\frac{\alpha-n}{2}} K_{-\alpha+n} \left(2\sqrt{\lambda(\gamma + nx^2)} \right)$$

C'est exactement l'expression (6) de Frery pour sa loi $\mathcal{G}_A(\alpha, \gamma, \lambda, n)$ qui représente la situation la plus générale possible.

A ce niveau, il faut rappeler certaines contraintes des lois de Halphen Généralisées (paragraphe 2.4.2), rappelées ici avec le choix de notations de Frery (voir relation 24) :

- le cas $\gamma \rightarrow 0$ impose $\alpha > 0$: la loi est une loi à tête lourde,
- le cas $\lambda \rightarrow 0$ impose $\alpha < 0$: la loi est une loi à queue lourde,
- si $\lambda > 0$ et $\gamma > 0$, α peut prendre n'importe quelle valeur (tous les moments, tant positifs que négatifs, existent).

Ces contraintes conduisent Frery à étudier séparément les cas particuliers de la loi $\mathcal{G}_A(\alpha, \gamma, \lambda, n)$ en considérant les deux cas suivants (relation (7) de [7]) :

- $\gamma \rightarrow 0$. C'est le cas "hétérogène", avec $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$. La loi \mathcal{G}_A est alors une loi \mathcal{K} .
- $\lambda \rightarrow 0$. C'est le cas "extrêmement hétérogène", avec $\alpha < 0$ et $\gamma > 0$. La loi \mathcal{G}_A est alors une loi notée \mathcal{G}'_A .

Dans les deux cas, on obtient au final la loi homogène $\Gamma^{1/2}$ (c'est à dire un chatolement homogène suivant une loi de Nakagami : la scène a une texture homogène) si :

- dans le cas "hétérogène" en faisant tendre α et λ vers l'infini, avec la contrainte α/λ fini,
- dans le cas "extrêmement hétérogène" en faisant tendre $-\alpha$ et γ vers l'infini, avec la contrainte $-\alpha/\gamma$ fini.

4 Conclusion

A travers ce document, plusieurs axes d'étude et de réflexions sur les lois d'Halphen ont été approfondis, que l'on peut synthétiser de la manière suivante :

- l'approche d'Halphen vise à privilégier le paramétrage du mode d'une loi de probabilité. Ce choix présente certaines limites, en particulier le fait que le mode n'est pas borné et que son expression n'est pas aisée à interpréter (relation 14) puisqu'elle associe de manière compliquée les trois paramètres de la loi.
- Le choix multiplicatif pour associer exponentielle décroissante et exponentielle décroissante inverse a une conséquence importante : la loi de Halphen possède tous ses moments, tant positifs que négatifs, dans la mesure où $\beta > 0$ et $\varepsilon > 0$. La forme de la loi a alors un caractère très particulier à l'origine (pente nulle) et vers l'infini (pas de comportement type "queue lourde").
- dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$, la loi de Halphen a un comportement particulier lorsque l'effet "exponentielle décroissante" et l'effet "exponentielle décroissante inverse" sont comparables : dans ce cas ($\tilde{\kappa}_3 = 0$), la loi est très resserrée autour de son mode, ce qui est rarement observé pour des lois empiriques.
- L'estimation des paramètres à partir des moments est une tâche a priori redoutable puisque la formulation des moments fait intervenir une fonction de Bessel dont le paramètre prend en compte le paramètre α de la loi.

- Les cas limites de la loi de Halphen ($\beta \rightarrow 0$ ou $\beta \rightarrow \infty$) donnent des lois Gamma ou Gamma Inverse : il y a alors un net changement de comportement puisque l'on passe d'une famille de lois pour lesquelles tous les moments sont définis (lois de Halphen) à des lois ayant des limitations sur les moments. Cette transition brusque n'est pas un gage d'universalité pour ce type de lois.
- En comparant la loi de Halphen avec la loi de Fisher, on se rend compte de la bien plus grande souplesse de la loi de Fisher, en particulier pour traiter des données réelles. Les capacités à prendre en compte les valeurs extrêmes (outliers) font de cette loi un bon outil passe partout : en contrepartie, la loi de Fisher ne possède pas tous ses moments, mais cela n'est pas un problème puisque l'on connaît tous ses log-moments et tous ses log-cumulants, ce qui permet d'estimer ses paramètres de manière robuste.
- la loi "compound Halphen", construite par convolution de Mellin à partir de la loi de Halphen, est à comparer avec la loi U, construite par convolution de Mellin à partir de la loi de Fisher. En pratique, la loi U semble pouvoir approcher suffisamment bien la loi "compound Halphen" pour la remplacer dans les cas pratiques, l'inversion des log-cumulants s'avérant faisable, alors que l'inversion des moments (qui font intervenir des fonctions de Bessel) semble redoutable.

Pour résumer le plus succinctement possible, la loi de Fisher semble d'un emploi plus réaliste en imagerie radar que la loi d'Halphen et possède, comme la loi de Halphen, l'intéressante propriété d'avoir comme cas limites la loi Gamma et la loi Gamma Inverse. Il serait donc intéressant de savoir si, en hydrologie, la loi de Fisher peut apporter des réponses à des questions mal résolues par les lois de Halphen, grâce en particulier à ses capacités d'inversion de paramètres dues aux propriétés de ses log-cumulants.

A La famille des lois de Halphen [13]

Historiquement Halphen a proposé une nouvelle loi sous la forme ([10], 1941) :

$$H[\alpha, \beta, \varepsilon](x) = A x^\alpha e^{-\beta x - \varepsilon x^{-1}}$$

Par la suite, il a proposé quelques variantes et il est d'usage de considérer la famille des lois de Halphen comme étant constituée de trois cas¹³ :

– les lois du type A et qui s'écrivent sous la forme :

$$\sim x^{\gamma-1} e^{-a\left(\frac{x}{\mu} + \frac{\mu}{x}\right)} \quad a > 0 \quad \mu > 0$$

– les lois du type B et qui s'écrivent sous la forme :

$$\sim x^{2\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\mu}\right)^2 + b\frac{x}{\mu}} \quad \alpha > 0 \quad \mu > 0$$

– les lois du type B⁻¹ et qui s'écrivent sous la forme :

$$\sim x^{-2\alpha-1} e^{-\left(\frac{\mu}{x}\right)^2 + b\frac{\mu}{x}} \quad \alpha > 0 \quad \mu > 0$$

et qui sont les lois inverses des lois de type B.

En marge de ces travaux, on peut toutefois noter que le type B (et partant le type B⁻¹) peut se réécrire :

$$\sim x^{2\alpha-1} e^{-\left(\frac{x-c}{\mu}\right)^2} \quad \alpha > 0 \quad \mu > 0$$

avec $c = \frac{b}{2}$. La loi ainsi exprimée a une certaine analogie avec la loi de Rice mais n'a jamais été –semble-t-il– analysée sous cet angle.

13. la notation utilisée par la suite en hydrologie n'est pas très unifiée, ni pratique.

B Rappels rapides sur la loi exponentielle décroissante, la loi Gamma et la loi Gamma Généralisée

ATTENTION : Pour permettre une écriture plus concise nous prendrons comme notation pour la loi de Halphen

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \mathcal{H}[\alpha, \beta, \varepsilon] \rightarrow \mathcal{H}[\alpha, \beta = 0, \varepsilon]$$

et pour la loi de Halphen Généralisée

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \mathcal{HG}[\alpha, \beta, \varepsilon, \eta] \rightarrow \mathcal{HG}[\alpha, \beta = 0, \varepsilon, \eta]$$

B.1 La loi exponentielle décroissante et la loi Gamma

La loi exponentielle décroissante dépend d'un unique paramètre μ et s'écrit :

$$\frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} \quad \mu > 0$$

Elle modélise parfaitement le chatoiement pleinement développé de valeur moyenne (premier moment) μ . Son mode est à l'origine :

$$\text{mode} = 0$$

La loi exponentielle décroissante présente la propriété que la somme de L tirages de cette loi suit une loi appelée loi Gamma. Son expression analytique s'écrit :

$$\mathcal{G}[\mu, L](x) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{Lx}{\mu}\right)^{L-1} e^{-\frac{Lx}{\mu}} \quad L \geq 0 \quad \mu > 0 \quad (38)$$

Son mode est donné par la relation :

$$\text{mode}_{\mathcal{G}} = \begin{cases} \frac{(L-1)}{L} \mu & \text{si } L \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et se positionne en pratique entre les valeurs 0 ($L = 1$) et μ ($L \rightarrow \infty$). C'est à cause de cette propriété d'additivité que le monde des radaristes s'est emparé de ce formalisme de la loi Gamma, même si la variable requise est alors l'intensité des données (le carré de l'amplitude).

Il existe une autre manière de construire la loi Gamma. A partir de la loi exponentielle décroissante et en plagiant la démarche d'Halphen, on peut multiplier la loi exponentielle décroissante par une puissance $\alpha - 1$ de la variable pour déplacer le mode. La dépendance en x de cette nouvelle loi s'écrit :

$$\sim x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\mu}} \quad (39)$$

ce qui permet de calculer son mode :

$$\text{mode} = (\alpha - 1) \mu$$

et on peut voir la valeur de α comme une variable permettant d'ajuster le mode entre 0 ($\alpha = 1$) et ∞ ($\alpha \rightarrow \infty$). En identifiant la dépendance selon la variable x , on voit aisément que cette loi est la loi Gamma $\mathcal{G}[\mu', L]$ avec

$$\begin{cases} L & = & \alpha \\ \mu' & = & \alpha \mu \end{cases}$$

Dans ses publications, Halphen utilise le paramètre β pour ajuster la décroissance de l'exponentielle. En reprenant cette notation, posons la loi décrite par la relation (39) sous la forme :

$$\sim x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \quad (40)$$

dont le mode s'écrit :

$$\text{mode} = \frac{\alpha - 1}{\beta}$$

La valeur de α permet bien d'ajuster le mode entre 0 et ∞ .

Une identification triviale (à l'aide du mode entre autres) montre cette loi est une loi Gamma $\mathcal{G}[\mu', L]$ avec

$$\begin{cases} L = \alpha \\ \mu' = \frac{\alpha}{\beta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = L \\ \beta = \frac{L}{\mu'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{G}\left[\frac{\alpha}{\beta}, \alpha\right] = \mathcal{H}[\alpha, \beta, \varepsilon = 0] \\ \mathcal{G}[\mu, L] = \mathcal{H}\left[L, \frac{L}{\mu'}, \varepsilon = 0\right] \end{cases}$$

En reportant dans (38), on obtient la p.d.f. correspondant à la dépendance en x donnée par la relation (40) :

$$\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} (\beta x)^{\alpha-1} e^{-\beta x} = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$$

B.2 La loi exponentielle décroissante inverse et la loi Gamma Inverse

La loi exponentielle décroissante inverse dépend d'un unique paramètre μ et nous la noterons :

$$\frac{\mu}{x^2} e^{-\frac{\mu}{x}} \quad \mu > 0$$

C'est par définition l'inverse de la loi exponentielle décroissante vue au paragraphe précédent.

La loi Gamma Inverse est par définition l'inverse de la loi Gamma. Nous la noterons avec le formalisme suivant :

$$\mathcal{GI}[\mu, M](x) = \frac{1}{\Gamma(M)} \frac{1}{M\mu} \left(\frac{M\mu}{x}\right)^{M+1} e^{-\frac{M\mu}{x}} \quad M \geq 0 \quad \mu > 0 \quad (41)$$

Son mode est en :

$$\text{mode}_{\mathcal{GI}} = \frac{M}{M+1} \mu$$

et se positionne entre 0 (pour $M \rightarrow 0$)¹⁴ et μ (pour $M \rightarrow \infty$).

En plagiant la démarche d'Halphen, on remarque que la loi Gamma Inverse est le résultat d'une multiplication de la loi exponentielle décroissante inverse par une puissance négative de la variable pour déplacer le mode.

Donc, en reprenant la notation d'Halphen

$$\sim x^{\alpha-1} e^{-\frac{\varepsilon}{x}} \quad (42)$$

pour des α négatif, avec un mode :

$$\text{mode} = \frac{\varepsilon}{1-\alpha}$$

tel que le paramètre α permet d'en ajuster la position entre 0 ($\alpha \rightarrow -\infty$) et ε ($\alpha = 0$). on voit aisément que cette loi est une loi Gamma Inverse $\mathcal{G}[\mu, M]$ avec

$$\begin{cases} M = -\alpha \\ \mu = \frac{\varepsilon}{-\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -M \\ \varepsilon = M\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{GI}\left[\frac{\varepsilon}{-\alpha}, -\alpha\right] = \mathcal{H}[\alpha, \beta = 0, \varepsilon] \\ \mathcal{GI}[\mu, M] = \mathcal{H}[-M, \beta = 0, M\mu] \end{cases}$$

En reportant dans (41), on obtient la p.d.f. correspondant à la dépendance en x donnée par la relation (42) :

$$\frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^{1-\alpha} e^{-\frac{\varepsilon}{x}} = \frac{\varepsilon^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{\varepsilon}{x}}$$

14. Attention, la loi Gamma Inverse ne possède ses moments d'ordre r que si $r < M$.

B.3 La loi Gamma Généralisée

Si, comme Halphen¹⁵, on souhaite changer la puissance de la variable x , et que l'on paramètre par η cette puissance, on obtient une loi à 3 paramètres : la loi Gamma Généralisée, notée $\mathcal{GG}[\mu, L, \eta]$, valable pour $\eta \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{GG}[\mu, L, \eta](x) = \frac{|\eta| L^{\frac{1}{\eta}}}{\mu \Gamma(L)} \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu} \right)^{\eta L - 1} e^{-\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu} \right)^{\eta}}.$$

Elle permet de représenter aussi bien les lois Gamma et les lois Gamma Inverse.

Son mode est donné par la relation :

$$\text{mode}_{\mathcal{GG}} = \left(\frac{\eta L - 1}{\eta L} \right)^{\frac{1}{\eta}} \mu$$

Si l'on souhaite que cette loi corresponde à une loi de Halphen Généralisée (voir équation 17), la dépendance selon la variable x s'écrit :

$$\sim x^{\eta\alpha - 1} e^{-\beta x^{\eta} - \varepsilon x^{-\eta}}$$

On trouve alors une première méthode pour identifier une loi de Halphen Généralisée avec une loi Gamma Généralisée en prenant $\varepsilon = 0$, d'où :

$$\begin{cases} L = \alpha \\ \mu = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{1}{\eta}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = L \\ \beta = \frac{L}{\mu^{\eta}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{GG} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{1}{\eta}}, \alpha, \eta \right] = \mathcal{HG}[\alpha, \beta, \varepsilon = 0, \eta] \\ \mathcal{GG}[\mu, L, \eta] = \mathcal{HG}[L, \frac{L}{\mu^{\eta}}, \varepsilon = 0, \eta] \end{cases}$$

Connaissant par ailleurs la relation 20 :

$$\mathcal{HG}[\alpha, \beta, \varepsilon, \eta] = \mathcal{HG}[-\alpha, \varepsilon, \beta, -\eta]$$

on peut aussi choisir comme loi de Halphen Généralisée identifiable avec la loi Gamma Généralisée $\mathcal{GG}[\mu, L, \eta]$, et prendre $\beta = 0$, c'est à dire la loi $\mathcal{HG}[-L, \beta = 0, \frac{L}{\mu^{-\eta}}, -\eta]$. On a alors :

$$\begin{cases} L = -\alpha \\ \mu = \left(\frac{\varepsilon}{-\alpha} \right)^{\frac{1}{\eta}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -L \\ \varepsilon = L\mu^{\eta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{GG} \left[\left(\frac{\varepsilon}{-\alpha} \right)^{\frac{1}{\eta}}, -\alpha, -\eta \right] = \mathcal{HG}[\alpha, \beta = 0, \varepsilon, \eta] \\ \mathcal{GG}[\mu, L, \eta] = \mathcal{HG}[-L, \beta = 0, L\mu^{\eta}, -\eta] \end{cases}$$

B.4 La loi de Nakagami

Un cas très pratiqué en imagerie RSO est la loi de Nakagami $\mathcal{RN}[\mu, L]$, c'est à dire le cas de la loi Gamma Généralisée avec $\eta = 2$: cela revient à passer des données en intensité aux données en amplitude. Cette loi s'exprime :

$$\mathcal{RN}[\mu, L](x) = \frac{2 \sqrt{L}}{\mu \Gamma(L)} \left(\frac{\sqrt{L} x}{\mu} \right)^{2L-1} e^{-\left(\frac{\sqrt{L} x}{\mu} \right)^2} = \frac{2 \sqrt{L}}{\mu \Gamma(L)} \left(\frac{\sqrt{L} x}{\mu} \right)^{2L-1} e^{-\frac{Lx^2}{\mu^2}}$$

Son mode est donné par la relation :

$$\text{mode}_{\mathcal{RN}} = \sqrt{\frac{2L-1}{2L}} \mu$$

Si l'on souhaite que cette loi corresponde à une loi de Halphen en amplitude (voir équation 22), la dépendance selon la variable x s'écrit :

$$\sim x^{2\alpha-1} e^{-\beta x^2}$$

15. et comme aussi les radaristes puisqu'ils traitent traditionnellement les données en amplitude ou en intensité.

ce qui donne :

$$\begin{cases} L = \alpha \\ \mu = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = L \\ \beta = \frac{L}{\mu^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{RN}\left[\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \alpha\right] = \mathcal{HGA}[\alpha, \beta, \varepsilon = 0] \\ \mathcal{RN}[\mu, L] = \mathcal{HGA}\left[L, \frac{L}{\mu^2}, \varepsilon = 0\right] \end{cases}$$

B.5 La loi de Nakagami-Inverse

A partir de la loi de Nakagami, on déduit la loi de Nakagami Inverse, $\mathcal{RN}\mathcal{I}[\mu, M]$:

$$\mathcal{RN}\mathcal{I}[\mu, M](x) = \frac{2}{\mu} \frac{1}{\sqrt{M}\Gamma(M)} \left(\frac{\sqrt{M}\mu}{x}\right)^{2M+1} e^{-\left(\frac{\sqrt{M}\mu}{x}\right)^2} = \frac{2}{\mu} \frac{1}{\sqrt{M}\Gamma(M)} \left(\frac{\sqrt{M}\mu}{x}\right)^{2M+1} e^{-\frac{M\mu^2}{x^2}}$$

Si l'on souhaite que cette loi corresponde à une loi de Halphen en amplitude (voir équation 22), la dépendance selon la variable x s'écrit :

$$\sim x^{2\alpha-1} e^{-\varepsilon x^{-2}}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} M = -\alpha \\ \mu = \sqrt{\frac{\varepsilon}{-\alpha}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -M \\ \varepsilon = M\mu^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{RN}\mathcal{I}\left[\sqrt{\frac{\varepsilon}{-\alpha}}, -\alpha\right] = \mathcal{HGA}[\alpha, \beta = 0, \varepsilon] \\ \mathcal{RN}\mathcal{I}[\mu, M] = \mathcal{HGA}[-M, \beta = 0, M\mu^2] \end{cases}$$

B.6 Une tentative d'analyse synthétique des lois de l'imagerie radar

En comparant ces lois, on peut noter quelques points importants spécifiques aux lois de l'imagerie radar :

- Un des paramètres, μ , est généralement apparenté à une notion de “valeur moyenne”, et est directement lié au premier moment. Ce paramètre apparaît multiplicativement dans l'expression du mode.
- Les log-fonctions caractéristiques font apparaître multiplicativement un terme en μ^{s-1} et le paramètre μ n'intervient que dans ce terme.
- Par conséquent, pour tout r , l'expression du moment d'ordre r (s'il existe) fait apparaître multiplicativement la grandeur μ^r .
- Le mode est borné.
- On montre que les log-cumulants d'ordre supérieur ou égal à 2 ne dépendent pas du paramètre μ .
- Les paramètres autres que μ définissent la forme de la loi.

Ces observations soulignent toutes les différences avec les lois d'Halphen pour lesquelles :

- Le paramètre α a pour but de positionner le mode dans $[0; \infty[$: le mode n'est pas borné.
- La log-fonction caractéristique ne peut être séparée multiplicativement en termes ne dépendant que d'un seul paramètre.

On voit ainsi que l'interprétation des paramètres pour les lois de Halphen se réduisent aux trois points suivants :

- Le paramètre α sert à régler la position du mode.
- Le paramètre β est relatif à la caractéristique de “tête lourde” de la loi. Ce caractère ne sera acquis que si $\varepsilon = 0$.
- Le paramètre ε est relatif à la caractéristique de “queue lourde” de la loi. Ce caractère ne sera acquis que si $\beta = 0$.

C Fiches descriptives rapides des lois de Halphen et des lois usuelles du radar

Dans ces tableaux récapitulatifs, la loi $\mathcal{H}[\mu]$ est un “Dirac Mellin” centré en μ : c’est un simple gain sur la variable x .

C.1 Loi de Halphen

$\mathcal{H}[\alpha, \beta, \varepsilon](x)$	$\frac{1}{2\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{2}} K_{\alpha}(2\sqrt{\beta\varepsilon})} x^{\alpha-1} e^{-\beta x - \frac{\varepsilon}{x}}$
Loi inverse	$\mathcal{H}[-\alpha, \varepsilon, \beta]$
Cas limite $\beta \rightarrow 0$	$\mathcal{GI}\left[\frac{\varepsilon}{-\alpha}, -\alpha\right]$
Cas limite $\varepsilon \rightarrow 0$	$\mathcal{G}\left[\frac{\alpha}{\beta}, \alpha\right]$
Log-fonction caractéristique	$\frac{1}{K_{\alpha}(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{s-1}{2}} K_{s-1+\alpha}(2\sqrt{\beta\varepsilon})$
Mode	$\frac{(\alpha-1) + \sqrt{(\alpha-1)^2 + 4\varepsilon\beta}}{2\beta} \in [0; \infty[$

C.2 Loi de Halphen modifiée

$\mathcal{HM}[\mu, \beta, \varepsilon](x)$	$\frac{1}{2\mu\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{\beta-\varepsilon}{2}} K_{\beta-\varepsilon}(\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{x}{\mu}\right)^{\beta-\varepsilon-1} e^{-\frac{\beta x}{\mu} - \frac{\varepsilon\mu}{x}}$
Loi inverse	$\mathcal{HM}[\mu', \varepsilon, \beta]$
Cas limite $\beta \rightarrow 0$	$\mathcal{GI}[\mu, \varepsilon]$
Cas limite $\varepsilon \rightarrow 0$	$\mathcal{G}[\mu, \beta]$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{1}{K_{\beta-\varepsilon}(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{s-1}{2}} K_{s-1+\beta-\varepsilon}(2\sqrt{\beta\varepsilon})$
Mode	$\frac{(\beta-\varepsilon-1) + \sqrt{(\beta-\varepsilon-1)^2 + 4\varepsilon\beta}}{2\beta} \mu \in [0; \infty[$

C.3 Loi de Halphen Généralisée

$\mathcal{HG}[\alpha, \beta, \varepsilon, \eta](y)$	$ \eta \frac{1}{2\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{2}} K_{\alpha}(2\sqrt{\beta\varepsilon})} y^{\eta\alpha-1} e^{-\beta y^{\eta} - \varepsilon y^{-\eta}}$
Loi inverse	$\mathcal{HG}[-\alpha, \varepsilon, \beta, \eta]$ $\mathcal{HG}[\alpha, \beta, \varepsilon, -\eta]$
Cas limite $\beta \rightarrow 0$	$\mathcal{GG}\left[\left(\frac{\varepsilon}{-\alpha}\right)^{\frac{1}{\eta}}, -\alpha, -\eta\right]$
Cas limite $\varepsilon \rightarrow 0$	$\mathcal{GG}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{\eta}}, \alpha, \eta\right]$
Log-fonction caractéristique	$\frac{1}{K_{\alpha}(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{s-1}{2\eta}} K_{\alpha+\frac{s-1}{\eta}}(2\sqrt{\beta\varepsilon})$
Mode	$\left(\frac{(\eta\alpha-1)+\sqrt{(\eta\alpha-1)^2+4\varepsilon\beta\eta^2}}{2\beta\eta}\right)^{\frac{1}{\eta}} \in [0; \infty[$

C.4 Loi Gamma

$\mathcal{G}[\mu, L](x)$	$\frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{Lx}{\mu}\right)^{L-1} e^{-\frac{Lx}{\mu}}$
Loi inverse	$\mathcal{GI}[\mu, L]$
Cas limite $L \rightarrow \infty$	$\mathcal{H}[\mu]$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)}$
Mode	$\begin{cases} \frac{(L-1)}{L} \mu & \text{si } L \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \in [0; \mu[$

C.5 Loi Gamma Inverse

$\mathcal{GI}[\mu, L](x)$	$\frac{1}{\Gamma(M)} \frac{1}{M\mu} \left(\frac{M\mu}{x}\right)^{M+1} e^{-\frac{M\mu}{x}}$
Loi inverse	$\mathcal{G}[\mu, M]$
Cas limite $M \rightarrow \infty$	$\mathcal{H}[\mu]$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s} \Gamma(M)}$
Mode	$\frac{M}{M+1}\mu \in [0; \mu[$

C.6 Loi Gamma Généralisée

$\mathcal{GG}[\mu, L, \eta](x)$	$\frac{ \eta }{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{\Gamma(L)} \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu}\right)^{\eta L-1} e^{-\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu}\right)^{\eta}}$
Loi inverse	$\mathcal{GG}[\mu, L, -\eta]$
Cas particuliers	$\begin{cases} \eta = 1 & \mathcal{G}[\mu, L](x) \\ \eta = -1 & \mathcal{GI}[\mu, L](x) \\ L = 1 & \mathcal{W}[\mu, \eta](x) \end{cases}$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L + \frac{s-1}{\eta})}{L^{\frac{s-1}{\eta}} \Gamma(L)}$
Mode	$\begin{cases} \left(\frac{\eta L - 1}{\eta L}\right)^{\frac{1}{\eta}} \mu & \text{si } \eta L \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \in [0; \mu[$

C.7 Loi de Fisher

$\mathcal{F}[\mu, L, M](x)$	$\frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{\left(\frac{Lx}{M\mu}\right)^{L-1}}{\left(1+\frac{Lx}{M\mu}\right)^{L+M}}$
Loi inverse	$\mathcal{F}[\mu, M, L]$
Cas limite $L \rightarrow \infty$	$\mathcal{GI}[\mu, M]$
Cas limite $M \rightarrow \infty$	$\mathcal{G}[\mu, L]$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1}\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s}\Gamma(M)}$
Mode	$\begin{cases} \frac{(L-1)M}{L(M+1)} \mu & \text{si } L \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \in [0; \mu[$

C.8 Loi Log-normale

$\mathcal{L}[\mu, \sigma](x)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}} e^{\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$
Loi inverse	$\mathcal{L}[-\mu, \sigma]$
Cas limite $\sigma \rightarrow 0$	$\mathcal{H}[\mu]$
Log-fonction caractéristique	$e^{\mu(s-1)} e^{\left(\frac{\sigma^2(s-1)^2}{2}\right)}$
Mode	$e^{\mu-\sigma^2} \in]0; e^\mu[$

D Liens entre le système de Pearson et les modes des lois usuelles

D.1 Introduction

La démarche de Halphen présente un caractère empirique qui mérite d'être généralisé. En effet, son objectif était de modifier une loi pour permettre d'en ajuster le mode et c'est ce qui l'a conduit à ajouter un produit par une puissance α de la variable.

Le mode de la loi de Halphen est donc donné par la relation 14

$$m_{mode} = \frac{(\alpha - 1) + \sqrt{(\alpha - 1)^2 + 4\varepsilon\beta}}{2\beta}$$

et nous en avons étudié les caractéristiques au paragraphe 2.5.1. La figure 12 droite complète cette analyse : en particulier on peut y observer qu'étant donné un couple de paramètres β et ε , le paramètre α ajuste le mode sur $]\varepsilon, \infty[$ (analytiquement, on a bien $\lim_{\varepsilon \rightarrow -\infty} = \varepsilon$).

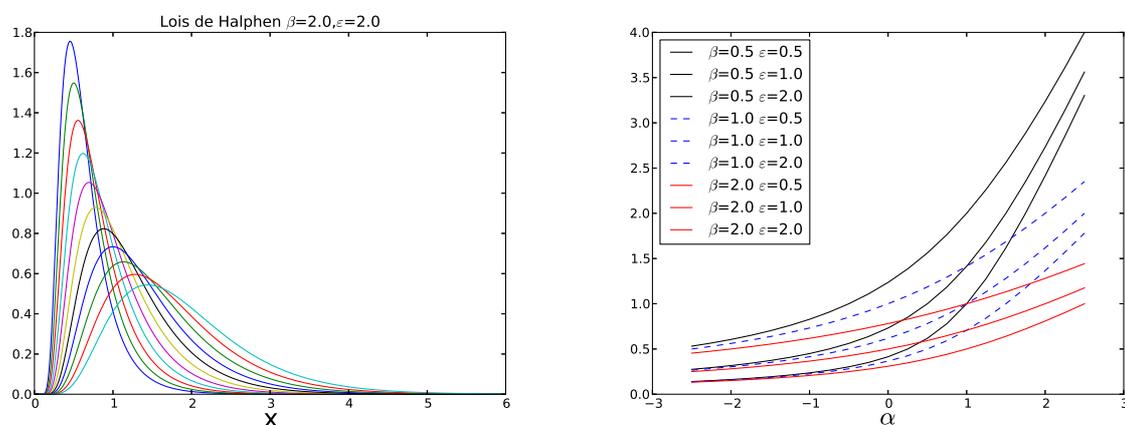


FIGURE 12 – A gauche : Loi de Halphen avec $\beta = 1$, $\varepsilon = 1$ pour des valeurs de α entre 2.5 et -2.5 par pas de 0.5. Le paramètre α permet d'ajuster la position du mode. A droite : pour différentes valeurs des paramètres β et ε , la courbe illustre la position du mode en fonction du paramètre α .

D.2 Système de Pearson

D.2.1 Définition

Parmi les lois de probabilités décrites par un faible nombre de paramètres, une famille bien connue est celle qui vérifie le Système de Pearson [11]. Ce Système de Pearson décrit les lois de probabilités $P_P(u)$ vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\frac{1}{P_P(u)} \frac{dP_P(u)}{du} = -\frac{a + u}{c_0 + c_1u + c_2u^2}. \quad (43)$$

En imagerie radar, un certain nombre de lois appartiennent à ce système : la loi Gamma, la loi Gamma Inverse, la loi de Fisher, la loi Beta et la loi Beta Inverse : la correspondance entre les paramètres de ces lois et les coefficients de Pearson est donnée au tableau 1, sachant que dans tous ces cas $c_0 = 0$.

D.2.2 Les modes des lois du Système de Pearson

Le fait qu'une loi appartienne au Système de Pearson détermine son mode : il s'obtient simplement en annulant le numérateur de 43 (et en vérifiant au passage que le dénominateur ne

	a	c_1	c_2
Type III (Gamma)	$a = -\frac{L-1}{L}\mu$	$c_1 = \frac{1}{L}\mu$	0
Type V (Gamma Inverse)	$a = -\frac{L}{L+1}\mu$	0	$c_2 = \frac{1}{L+1}$
Type VI (Fisher)	$a = -\frac{(L-1)M}{L(M+1)}\mu$	$c_1 = \frac{M}{L(M+1)}\mu$	$c_2 = \frac{1}{M+1}$
Type I (Beta)	$a = -\frac{(L-1)M}{L(M-2)}\mu$	$c_1 = \frac{M}{L(M-2)}\mu$	$c_2 = -\frac{1}{M-2}$
Type I inverse (Beta inverse)	$a = -\frac{L}{L+1}\mu$	$c_1 = -\frac{L}{M(L+1)}\mu$	$c_2 = \frac{1}{L+1}$

TABLE 1 – Paramètres de Pearson en fonction des paramètres des lois. Notons que le mode d'une loi suivant le système de Pearson est donné par $m_{\text{mode}} = -a$.

s'annule pas pour la valeur trouvée). On a alors tout simplement :

$$m_{\text{mode}} = \begin{cases} -a & \text{si } a < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (44)$$

D.2.3 Dépendance du mode en fonction des paramètres des lois usuelles

Le mode d'une loi appartenant au Système de Pearson est donc donné par la relation 44. Des exemples sont donnés figure 13 (on ne traite pas la loi Beta, puisqu'elle est par définition à support borné). On peut noter que le mode est borné à l'aide du paramètre μ : l'expression des fonction caractéristiques de deuxième espèce confirme le rôle essentiel de ce paramètre, puisque μ en est un facteur multiplicatif.

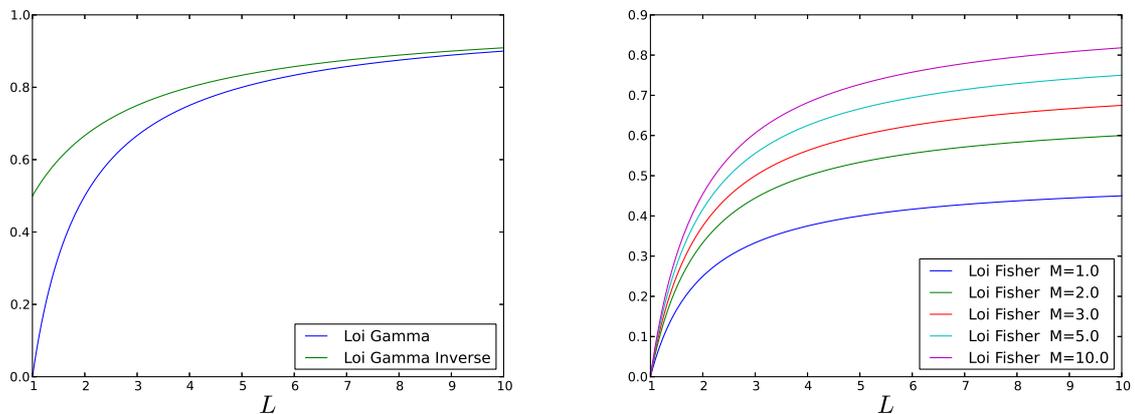


FIGURE 13 – Etude de la variation du mode selon le paramètre L des lois Gamma et Gamma Inverse (à gauche) et de la loi de Fisher (à droite), dans le cas $\mu = 1$.

Dans le cas de la loi K, obtenue par convolution de Mellin de deux lois Gamma, il n'existe

pas d'expression analytique du mode. Puisque la loi K est définie par :

$$\mathcal{K}[\mu, L, M] = \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{2LM}{\mu} \left(\frac{LMu}{\mu}\right)^{\frac{M+L}{2}-1} K_{M-L} \left[2 \left(\frac{LMu}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (45)$$

on peut en établir la dérivée :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \left(\frac{2LM}{\mu}\right)^2 \left(\left(\frac{M+L}{2} - 1\right) \left(\frac{LMu}{\mu}\right)^{\frac{M+L}{2}-2} K_{M-L} \left[2 \left(\frac{LMu}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \right. \\ & \left. - \left(\frac{LMu}{\mu}\right)^{\frac{M+L-1}{2}-1} \left(K_{M-L+1} \left[2 \left(\frac{LMu}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \right] + K_{M-L-1} \left[2 \left(\frac{LMu}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \right) \right) \end{aligned}$$

et on peut obtenir le mode par résolution numérique (par exemple en python avec `scipy.optimize.brentq`).

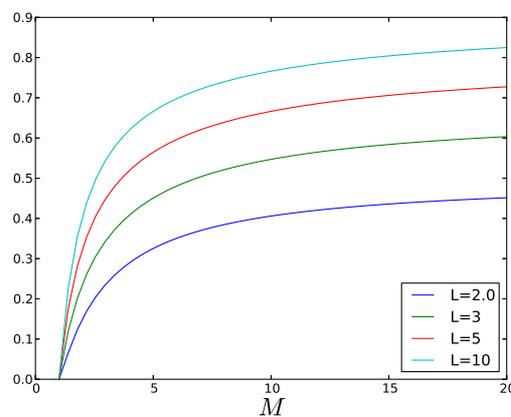


FIGURE 14 – Etude de la variation du mode selon le paramètre M de la loi K pour plusieurs valeurs du paramètre L , dans le cas $\mu = 1$.

D.3 Système de Pearson Etendu

D.3.1 Définition

Pour intégrer les lois de Halphen au modèle de Pearson, il suffit d'ajouter au dénominateur de la formule de Pearson un terme en u^2 :

$$\frac{1}{P_P(u)} \frac{dP_P(u)}{du} = -\frac{a_0 + a_1 u + a_2 u^2}{c_0 + c_1 u + c_2 u^2}. \quad (46)$$

Les lois du système initial vérifient $a_1 = 1$ et $a_2 = 0$.

D.3.2 Les modes des lois du Système de Pearson Etendu

Pour une loi appartenant au Système de Pearson Etendu, le mode est donné par la solution du polynôme du second degré si elle existe :

$$a_2 m_{\text{mode}}^2 + a_1 m_{\text{mode}} + a_0 = 0$$

c'est à dire :

$$m_{\text{mode}} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4 a_0 a_2}}{2a_2} \quad (47)$$

	a_0	a_1	a_2	c_1	c_2
Gamma	$-\frac{L-1}{L}\mu$	1	0	$\frac{1}{L}\mu$	0
Gamma Inverse	$-\frac{L}{L+1}\mu$	1	0	0	$\frac{1}{L+1}$
Fisher	$-\frac{(L-1)M}{L(M+1)}\mu$	1	0	$\frac{M}{L(M+1)}\mu$	$\frac{1}{M+1}$
Beta	$-\frac{(L-1)M}{L(M-2)}\mu$	1	0	$\frac{M}{L(M-2)}\mu$	$-\frac{1}{M-2}$
Beta inverse	$-\frac{L}{L+1}\mu$	1	0	$-\frac{L}{M(L+1)}\mu$	$\frac{1}{L+1}$
Halphen	$-\varepsilon$	$-(\alpha - 1)$	β	0	1
Halphen modifié	$-\varepsilon\mu$	$-(\beta - \varepsilon - 1)$	$\frac{\beta}{\mu}$	0	1

TABLE 2 – Paramètres du Système de Pearson Etendu en fonction des paramètres des lois, avec $c_0 = 0$.

le signe du discriminant étant choisi pour avoir un mode solution positif (nous sommes dans le cadre des lois définies sur \mathbb{R}^+). Dans le cas de la loi d’Halphen, à partir de l’équation 47 et du tableau 2, on retrouve directement l’expression 14 :

$$m_{mode} = \frac{(\alpha - 1) + \sqrt{(\alpha - 1)^2 + 4\varepsilon\beta}}{2\beta}$$

ce qui donne pour une loi de Halphen modifiée (c’est à dire avec $\alpha = \beta - \varepsilon$) :

$$m_{mode} = \frac{(\beta - \varepsilon - 1) + \sqrt{(\beta - \varepsilon - 1)^2 + 4\varepsilon\beta}}{2\beta}$$

Notons qu’en prenant $a_2 = 0$ dans la relation 47, on retrouve les modes des lois suivant le Système de Pearson (relation 44).

D.4 Les modes des lois généralisées du système de Pearson

Une curiosité analytique permet de déduire les moments de lois construites comme des “généralisations” des lois du Système de Pearson, c’est à dire telles que la variable x s’écrive comme :

$$x^\eta = y$$

avec la variable y suivant une loi du Système de Pearson Etendu¹⁶, notée $p(y)$. On a alors la loi $p_\eta(x)$ suivie par la variable x (relation 59 de l’annexe E) :

$$p_\eta(x) = |\eta| x^{(\eta-1)} p(x^\eta) \quad (48)$$

16. La démonstration implique bien évidemment les lois du Système de Pearson standard puisqu’il suffit de poser $a_1 = 1$ et $a_2 = 0$

Pour en obtenir le mode, il suffit de dériver la relation 48 et de trouver la valeur de x annulant cette relation. On obtient (en se plaçant pour simplifier la démonstration dans le cas $\eta > 0$) :

$$\frac{dp_\eta(x)}{dx} = x^{\eta-2}\eta((\eta-1)p(x^\eta) + \eta x^\eta p'(x^\eta)) \quad (49)$$

et puisque $p(y)$ est une loi du Système de Pearson Étendu (avec $c_0 = 0$), on a :

$$\frac{p'}{p} = -\frac{a_0 + a_1u + a_2u^2}{c_1u + c_2u^2}$$

ce qui permet de réécrire l'expression 49 :

$$\begin{aligned} \frac{dp_\eta(x)}{dx} &= x^{\eta-2}\eta((\eta-1)p(x^\eta) + \eta x^\eta p'(x^\eta)) \\ &= x^{\eta-2}\eta p(x^\eta) \left((\eta-1) + \eta x^\eta \frac{p'(x^\eta)}{p(x^\eta)} \right) \\ &= x^{\eta-2}\eta p(x^\eta) \left((\eta-1) - \eta x^\eta \frac{a_0 + a_1x^\eta + a_2(x^\eta)^2}{c_1x^\eta + c_2(x^\eta)^2} \right) \\ &= x^{\eta-2}\eta p(x^\eta) \left((\eta-1) - \eta \frac{a_0 + a_1x^\eta + a_2(x^\eta)^2}{c_1 + c_2x^\eta} \right) \end{aligned}$$

ce qui donne son numérateur sous la forme :

$$(\eta-1)(c_1 + c_2x^\eta) - \eta(a_0 + a_1x^\eta + a_2(x^\eta)^2)$$

c'est à dire :

$$(c_1(\eta-1) - \eta a_0) + ((\eta-1)c_2 - \eta a_1)x^\eta - \eta a_2(x^\eta)^2$$

On voit qu'il faut chercher les racines de la variable $z = x^\eta$, le système étant une équation du second degré si $a_2 \neq 0$. On obtient finalement le mode :

$$m_{\text{mode}}^\eta = \begin{cases} \frac{(\eta-1)c_2 - \eta a_1 + \sqrt{((\eta-1)c_2 - \eta a_1)^2 + 4\eta a_2(c_1(\eta-1) - \eta a_0)}}{2\eta a_2} & \text{si } \eta a_2 > 0 \\ \frac{(\eta-1)c_2 - \eta a_1 - \sqrt{((\eta-1)c_2 - \eta a_1)^2 + 4\eta a_2(c_1(\eta-1) - \eta a_0)}}{2\eta a_2} & \text{si } \eta a_2 < 0 \end{cases} \quad (50)$$

En posant $\eta = 1$, on remarque que le rôle des coefficients c_1 et c_2 disparaît : tout revient à trouver les racines du numérateur du système de Pearson étendu (relation 47).

Si on a $a_2 = 0$ (c'est à dire une loi appartenant au Système de Pearson classique), on a simplement :

$$m_{\text{mode}}^\eta = -\frac{c_1(\eta-1) - \eta a_0}{(\eta-1)c_2 - \eta a_1} \quad (51)$$

En posant $\eta = 1$, on retrouve la valeur du mode pour une loi appartenant au Système de Pearson classique, c'est à dire $m_{\text{mode}} = -a$.

Si l'on se place dans le cas de la loi de Halphen, dans le cas¹⁷ $\eta a_2 = \eta\beta > 0$, on obtient à partir de la relation 50 :

$$\begin{aligned} m_{\text{mode}}^\eta &= \frac{(\eta-1)c_2 - \eta a_1 + \sqrt{((\eta-1)c_2 - \eta a_1)^2 + 4\eta a_2(c_1(\eta-1) - \eta a_0)}}{2\eta a_2} \\ &= \frac{(\eta-1) + \eta(\alpha-1) + \sqrt{((\eta-1) + \eta(\alpha-1))^2 + 4\eta\beta(\eta\varepsilon)}}{2\eta\beta} \\ &= \frac{(\eta\alpha-1) + \sqrt{(\eta\alpha-1)^2 + 4\eta^2\beta\varepsilon}}{2\eta\beta} \end{aligned} \quad (52)$$

17. Les autres cas se calculent selon le même principe

on retrouve la relation 19 (qui elle même donne le mode de la loi de Halphen en posant $\eta = 1$).

Comme autre exemple, on peut aussi partir de la loi Gamma et de la relation 51, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 m_{\text{mode}}^\eta &= -\frac{c_1(\eta - 1) - \eta a_0}{(\eta - 1)c_2 - \eta a_1} \\
 &= \frac{\frac{\mu}{L}(\eta - 1) + \eta \frac{\mu(L-1)}{L}}{\eta} \\
 &= \frac{\mu(\eta L - 1)}{\eta L}
 \end{aligned} \tag{53}$$

et on retrouve le mode de la loi Gamma Généralisée (en redéfinissant le paramètre μ).

En résumé, si l'expression analytique du mode existe pour une loi appartenant au système de Pearson (classique ou étendu), alors le mode de la loi généralisée possède une expression analytique.

E Rappels sur la transformée de Mellin et ses propriétés [14]

E.1 Propriétés fondamentales de la transformée de Mellin

La transformée de Mellin d'une fonction $f(x)$ définie sur \mathbb{R}^+ est la fonction analytique $\phi(s)$, avec $s \in \mathbb{C}$, définie par :

$$\phi(s) = \mathcal{M}[f(x)](s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) dx \quad (54)$$

la variable complexe s appartenant généralement à un ouvert particulier¹⁸ de \mathbb{C} .

Ses propriétés fondamentales sont les suivantes :

$\mathcal{M}[f(ax)](s)$	$= a^{-s} \phi(s)$	TM 1
$\mathcal{M}[x^a f(x)](s)$	$= \phi(s + a)$	TM 2
$\mathcal{M}[f(x^a)](s)$	$= \frac{1}{a} \phi\left(\frac{s}{a}\right)$	TM 3
$\mathcal{M}\left[\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)\right](s)$	$= \phi(1 - s)$	TM 4
$\mathcal{M}[f'(x)](s)$	$= (-1)(s - 1)\phi(s - 1)$	TM 5
$\mathcal{M}[f(x)(\log x)^n](s)$	$= \phi^{(n)}(s)$	TM 6

E.2 Rappels sur la fonction caractéristique de deuxième espèce (log-fonction caractéristique) et ses propriétés

Soit une densité de probabilité, notée $p(x)$. Sa fonction caractéristique de deuxième espèce (log-fonction caractéristique) est par définition sa transformée de Mellin si elle existe :

$$\phi_p(s) = \mathcal{M}[p(x)](s) \quad (55)$$

et se doit d'être définie pour $s = 1$. En effet, pour $p(x)$ densité de probabilité, on a :

$$\phi_p(s)|_{s=1} = \mathcal{M}[p(x)](s)|_{s=1} = \int_0^\infty p(x) dx = 1$$

Dans ce cas, en prenant s réel, la fonction caractéristique de deuxième espèce devient la fonction génératrice des moments dans la mesure où elle est définie pour tout $s \in [1; r + 1]$ si $r > 0$, ou $s \in [r + 1; 1]$ si $r < 0$:

$$m_r = \int_0^\infty x^r f(x) dx = \phi_p(s)|_{s=r+1}$$

Sa seconde fonction caractéristique de deuxième espèce est par définition le logarithme népérien de la log-fonction caractéristique :

$$\psi_p(s) = \log(\phi_p(s))$$

Si $p(x)$ est une loi de probabilité dont la log-fonction caractéristique $\phi_p(s)$ existe sur un ouvert contenant la valeur $s = 1$, alors elle possède une loi de probabilité inverse $q(x)$ (c'est à dire la loi que suit la variable aléatoire $\frac{1}{x}$), dont la log-fonction caractéristique $\phi_q(s)$, définie dans un ouvert contenant la valeur $s = 1$, s'écrit :

$$\phi_q(s) = \phi_p(2 - s) \quad (56)$$

E.3 Le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$

Soit $p(x)$ une loi de probabilité. A partir de sa seconde fonction caractéristique de deuxième espèce $\psi_p(s)$, on définit ses log-cumulants par la relation :

$$\tilde{\kappa}_{p,r} = \left. \frac{d^r \psi_p(s)}{ds^r} \right|_{s=1}$$

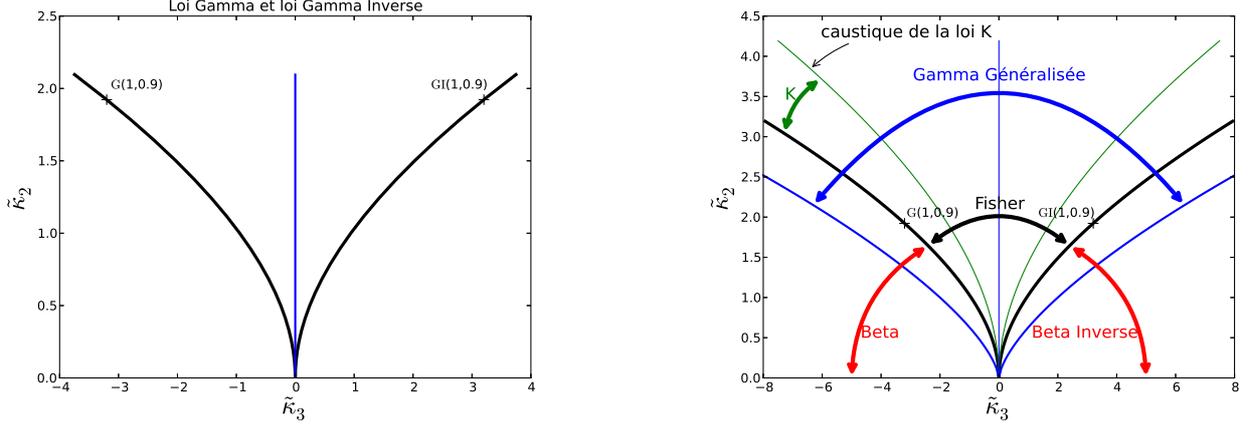


FIGURE 15 – A gauche : représentation dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ des lois Gamma et Gamma Inverse pour $L \in [0.85; \infty[$ et de la loi lognormale qui correspond à l'axe des ordonnées. A droite : représentation dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ des domaines des lois de Fisher, Beta et Beta inverse, Gamma Généralisées et K.

Soit $q(x)$ sa loi inverse : on note son log-cumulant d'ordre r sous la forme $\tilde{\kappa}_{q,r}$.

Deux propriétés sont alors à souligner :

- $\tilde{\kappa}_{p,2}$ et $\tilde{\kappa}_{q,2}$ sont positifs ou nuls ;
- Si $\tilde{\kappa}_{p,3}$ est le troisième log-cumulant de la loi $p(x)$, et $\tilde{\kappa}_{q,3}$ le troisième log-cumulant de la loi $q(x)$, c'est à dire la loi inverse de $p(x)$, alors :

$$\tilde{\kappa}_{q,3} = -\tilde{\kappa}_{p,3} \quad (57)$$

Il est alors possible de caractériser une loi de probabilité en plaçant ses second et troisième log-cumulants dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$. Deux lois se placent naturellement dans ce diagramme : la loi Gamma et la loi Gamma Inverse, ainsi que la loi log-normale qui a pour propriété essentielle d'avoir tous ses log-cumulants d'ordre supérieur ou égal à 3 nuls.

La figure 15 (gauche) illustre le positionnement des lois Gamma, Gamma Inverse et Log-normale dans ce diagramme. Sur la même figure (à droite) sont indiqués les domaines des lois de Fisher, Gamma Généralisées, Beta et Beta Inverse ainsi que la loi \mathcal{K} .

E.4 Les lois généralisées et la transformée de Mellin

Soit une variable aléatoire y décrite par sa distribution de probabilité $p(y)$ et soit $\phi_p(s)$ sa fonction caractéristique de deuxième espèce, c'est à dire sa transformée de Mellin.

Considérons une nouvelle variable aléatoire x telle que $y = x^\eta$. Soit $p_\eta(x)$ la loi de probabilité correspondant à cette nouvelle variable, et $\phi_\eta(s)$ sa fonction caractéristique de deuxième espèce. On a alors les relations fondamentales :

$$p_\eta(x) = |\eta| x^{(\eta-1)} p(x^\eta) \quad (58)$$

$$\phi_\eta(s) = \phi_p\left(\frac{s + \eta - 1}{\eta}\right) \quad (59)$$

En particulier :

18. Une des difficultés de la transformée de Mellin est que deux fonctions peuvent avoir la même formulation analytique comme transformée de Mellin, mais deux domaines disjoints comme domaine d'existence pour s .

- pour $\eta = -1$, c'est à dire le cas où on cherche la loi inverse $q(v)$ d'une loi $p(u)$ (c'est à dire la loi de $v = 1/x$), on montre :

$$q(v) = \frac{1}{v^2} p\left(\frac{1}{v}\right) \quad (60)$$

$$\phi_q(s) = \phi_p(2 - s) \quad (61)$$

- pour $\eta = 2$, c'est à dire la variable y telle que $x = y^2$, y représente l'amplitude et x l'intensité. On note p_A la distribution de probabilité de l'amplitude y et on a :

$$p_A(x) = 2x p(x^2) \quad (62)$$

$$\phi_{p_A}(s) = \phi_p\left(\frac{s+1}{2}\right) \quad (63)$$

F Le diagramme $\delta_1 - \delta_2$

Outre les lois de Halphen, l'hydrologie semble un domaine très riche dans le domaines des lois statistiques : c'est dans ce cadre que Bobee [3] propose une représentation s'appuyant sur les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique.

On montre facilement que si ces moyennes existent, elles s'écrivent :

- pour la moyenne arithmétique comme le moment d'ordre 1
- pour la moyenne harmonique, comme l'inverse du moment d'ordre -1
- pour la moyenne géométrique comme l'exponentielle du log-moment d'ordre 1

On ne peut donc traiter que des lois qui possèdent à la fois leur moment d'ordre 1 et leur moment d'ordre -1.

En notant M la moyenne arithmétique, H la moyenne harmonique et G la moyenne géométrique, et en posant :

$$\delta_1 = \log\left(\frac{M}{G}\right)$$

$$\delta_2 = \log\left(\frac{G}{H}\right)$$

Bobee propose un diagramme d'abscisse δ_1 et d'ordonnée δ_2 dans lequel la loi log-normale joue un rôle privilégié (première diagonale) et dans lequel lois Gamma et Gamma inverse jouent un rôle symétrique vis à vis de la loi Log-normale : sur ces points, la configuration ressemble donc beaucoup au diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$.

Un exemple en est donné figure 16.

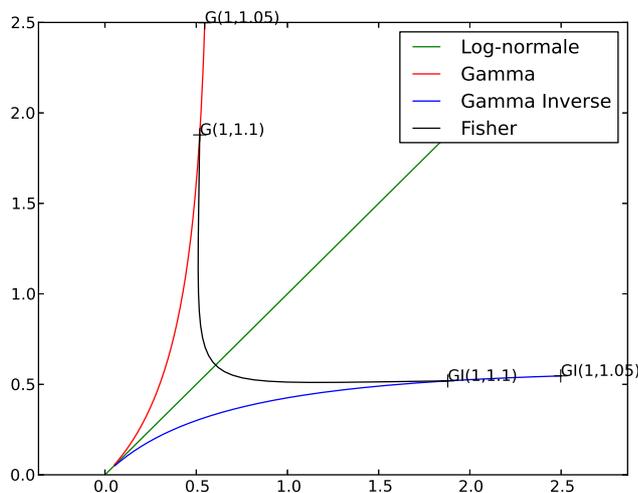


FIGURE 16 – Représentation dans le diagramme δ_1 - δ_2 des lois Gamma, Gamma inverse, log-normale et Fisher.

G Transformée de Mellin de produits

G.1 Formulation analytique

La loi de Halphen est un exemple où l'on construit une nouvelle loi de probabilité à partir du produit de deux lois connues.

On trouve dans la littérature ([4]) le théorème suivant¹⁹ :

Si $\phi(s)$ est la transformée de Mellin de la fonction $f(x)$, et $\psi(s)$ est la transformée de Mellin de la fonction $g(x)$, alors la transformée de Mellin de la fonction $h(x) = f(x)g(x)$ s'écrit :

$$\mathcal{M}[h(x)](s) = \frac{1}{2j\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \phi(s-w) \psi(w) dw \quad (64)$$

En première lecture, on constate que la relation 64 est une "vraie" convolution. Cependant, ce n'est pas sous cette forme qu'il est aisé de l'utiliser. En effet, effectuons quelques changements de notations en introduisant une variable auxiliaire r de sorte que la relation 64 puisse s'écrire sous la forme d'une transformée inverse de Mellin :

$$M(s, r) = \frac{1}{2j\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} r^{-w} \phi(s-w) \psi(w) dw$$

prise en $r = 1$, ce qui donne :

$$\mathcal{M}[h(x)](s) = M(s, r)|_{r=1} = \frac{1}{2j\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} r^{-w} \phi(s-w) \psi(w) dw \Big|_{r=1}$$

La transformée de Mellin inverse auxiliaire est donc définie dans un espace de variables telles que :

- l'espace 'direct' est décrit par une variable r ,
- l'espace Mellin est décrit par la variable w

et, au final, le résultat est à prendre pour la valeur $r = 1$.

G.2 Exemple de deux lois Gamma

Considérons une variable x : nous désignerons l'espace comme étant l'espace $\{x, s\}$, avec s comme notation de la variable dans l'espace Mellin.

Prenons le cas où $f(x) = e^{-x}$. On sait alors que $\phi(s) = \Gamma(s)$. Considérons le cas où $g(x) = e^{-x}$. On sait alors que $\psi(s) = \Gamma(s)$.

Le calcul à mener est alors de déterminer l'expression :

$$\frac{1}{2j\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} r^{-w} \Gamma(s-w) \Gamma(w) dw$$

c'est à dire, en mettant²⁰ $w = z$ et $s = a$, de déterminer la transformée de Mellin inverse de $\Gamma(a-z) \Gamma(z)$, à prendre en $r = 1$.

Les tables donnent le résultat suivant :

$$\mathcal{M}^{-1} [\Gamma(\alpha + z) \Gamma(\beta - z)] = \Gamma(\alpha + \beta) x^\alpha (1+x)^{-\alpha-\beta}$$

ce qui permet d'écrire (dans l'espace $\{r, z\}$) :

$$\mathcal{M}^{-1} [\Gamma(z) \Gamma(a-z)] = \Gamma(a) (1+r)^{-a}$$

19. dont on omet les conditions pour aérer le texte

20. Les tables de Mellin utilisent parfois s , parfois z pour la variable de Mellin

dont il faudra prendre la valeur en $r = 1$, ce qui donne :

$$\frac{\Gamma(a)}{2^a}$$

En repassant dans l'espace initial $\{x, s\}$, on obtient :

$$\mathcal{M}[f(x)g(x)](s) = \frac{\Gamma(s)}{2^s}$$

On reconnaît l'expression de la transformée de Mellin de $h(x) = e^{-2x}$, c'est à dire effectivement la transformée de Mellin de $f(x)g(x) = h(x)$.

G.3 Exemple du produit d'une loi Gamma et d'une loi Gamma Inverse

G.3.1 Cas simple

Considérons une variable x : nous désignerons l'espace comme étant l'espace $\{x, s\}$, avec s comme notation de la variable dans l'espace Mellin.

- Prenons le cas où $g(x) = e^{-x}$. On sait alors que $\psi(s) = \Gamma(s)$.
- Considérons le cas où $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$. On sait alors que $\phi(s) = \Gamma(-s)$.

Etudions maintenant la fonction $h(x)$:

$$h(x) = f(x)g(x) = e^{-x} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-x-\frac{1}{x}} \quad (65)$$

Le calcul à mener est alors de déterminer l'expression :

$$\frac{1}{2j\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} r^{-w} \phi(s-w) \psi(w) dw = \frac{1}{2j\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} r^{-w} \Gamma(-s+w) \Gamma(w) dw$$

c'est à dire, en mettant $w = z$ et $s = a$, de déterminer la transformée de Mellin inverse de $\Gamma(z-a) \Gamma(z)$, à prendre en $r = 1$.

Les tables de Transformées de Mellin Inverse ([16], formule 5.39) donnent le résultat suivant :

$$\mathcal{M}^{-1}[\Gamma(z+\alpha) \Gamma(z+\beta)] = 2x^{\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta} K_{\alpha-\beta}(2\sqrt{x})$$

ce qui permet d'écrire (dans l'espace $\{r, z\}$), avec $\beta = 0$ et $\alpha = -a$:

$$\mathcal{M}^{-1}[\Gamma(z-a) \Gamma(z)] = 2r^{-\frac{1}{2}a} K_a(2\sqrt{r})$$

dont il faudra prendre la valeur en $r = 1$, ce qui donne :

$$2K_a(2)$$

En repassant dans l'espace initial $\{x, s\}$, on obtient :

$$\mathcal{M}[f(x)g(x)](s) = 2K_s(2)$$

Les tables de Transformées de Mellin Inverse ([16], formule 7.107) nous permettent de reconnaître l'expression de la transformée de Mellin de $h(x) = e^{-x-1/x}$, c'est à dire effectivement la transformée de Mellin de $f(x)g(x) = h(x)$ (relation 65).

G.3.2 Cas général

Prenons maintenant le cas général (le terme exponentiel de la loi de Halphen)

$$f(x) = e^{-\beta x - \varepsilon x^{-1}} \quad (66)$$

et on a de manière triviale :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left[e^{-\beta x} \right] (s) &= \frac{\Gamma(s)}{\beta^s} \\ \mathcal{M} \left[e^{-\varepsilon x^{-1}} \right] (s) &= \varepsilon^s \Gamma(-s) \end{aligned}$$

Le calcul à mener (relation 64) est alors de déterminer l'expression :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2j\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} r^{-w} \phi(s-w) \psi(w) dw &= \frac{1}{2j\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} r^{-w} \frac{\Gamma(w)}{\beta^w} \varepsilon^{s-w} \Gamma(w-s) dw \\ &= \frac{1}{2j\pi} \varepsilon^s \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} r^{-w} (\varepsilon\beta)^{-w} \Gamma(w) \Gamma(w-s) dw \quad (67) \end{aligned}$$

c'est à dire, en mettant $w = z$ et $s = a$, de déterminer la transformée de Mellin inverse de :

$$(\beta\varepsilon)^{-z} \Gamma(z) \Gamma(z-a)$$

à prendre en $r = 1$.

Puisque

$$\mathcal{M}^{-1} [\Gamma(z) \Gamma(z-a)] = 2r^{-\frac{1}{2}a} K_a (2\sqrt{r})$$

on a (propriété élémentaire de la Transformée de Mellin) :

$$\mathcal{M}^{-1} [(\beta\varepsilon)^{-z} \Gamma(z) \Gamma(z-a)] = 2(\beta\varepsilon r)^{-\frac{1}{2}a} K_a (2\sqrt{\beta\varepsilon r})$$

ce qui permet d'obtenir en $r = 1$ et en posant $a = s$:

$$2(\beta\varepsilon)^{-\frac{s}{2}} K_s (2\sqrt{\beta\varepsilon})$$

et au final la Transformée de Mellin de l'expression 66 :

$$2 \left(\frac{\varepsilon}{\beta} \right)^{\frac{s}{2}} K_s (2\sqrt{\beta\varepsilon}) \quad (68)$$

G.3.3 Loi de Halphen

Si l'on connaît $\phi(s)$ la transformée de Mellin d'une fonction $f(x)$, alors $\phi(s-1+\alpha)$ est la transformée de Mellin de la fonction $x^{\alpha-1} f(x)$. En appliquant ce principe à la fonction $e^{-\beta x - \varepsilon x^{-1}}$, dont la transformée de Mellin est la relation 68, on obtient :

$$\mathcal{M} \left[A x^{\alpha-1} e^{-\beta x - \varepsilon x^{-1}} \right] (s) = 2 A \left(\frac{\varepsilon}{\beta} \right)^{\frac{s-1+\alpha}{2}} K_{s-1+\alpha} (2\sqrt{\beta\varepsilon})$$

A étant une constante ne dépendant que des paramètres de la loi de Halphen et qui permet de vérifier la condition d'une loi de probabilité, c'est à dire que la fonction caractéristique de deuxième espèce (c'est à dire la transformée de Mellin) en $s = 1$ est égale à 1. On montre facilement :

$$A = \frac{1}{2 \left(\frac{\varepsilon}{\beta} \right)^{\frac{\alpha}{2}} K_{\alpha} (2\sqrt{\beta\varepsilon})}$$

H Variations sur la fonction de Bessel modifiée de troisième espèce : la fonction K

Dans la table de transformées de Mellin du projet Bateman [1], on trouve la relation (6.3,(17)) :

$$\mathcal{M} \left[e^{-\alpha x^h - \beta x^{-h}} \right] = \frac{2}{h} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2} \frac{s}{h}} K_{\frac{s}{h}} \left(2\sqrt{\alpha\beta} \right)$$

avec $K_\nu(z)$ la fonction de Bessel modifiée de troisième espèce (*modified Bessel function of the third kind*, [2]), appelée aussi fonction de Basset (que l'on appelle parfois seconde fonction de Bessel) et que Colombo [4] définit comme :

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z \operatorname{ch}(t) - \nu t} dt$$

Mais il faut aussi voir que $K_\nu(z)$ est défini à partir des fonctions de Hankel (que l'on nomme parfois fonction de Bessel de troisième espèce) par l'expression :

$$K_\nu(z) = \frac{i\pi}{2} e^{i\frac{\pi}{2}\nu} H_\nu^{(1)}(iz)$$

sachant que

$$H_\nu^{(1)}(iz) = J_\nu(z) + i N_\nu(z)$$

avec J_ν et N_ν les fonctions de Bessel de première et de seconde espèces.

Notons que sous Maple, l'appel se fait avec l'ordre `BesselK`, et que le *help* nomme cette fonction *Bessel function of the second kind*, ce qui semble incorrect (*second Bessel function* aurait été plus judicieux).

La fonction "BesselK" possède d'intéressantes propriétés [12] :

$$K_\lambda = K_{-\lambda} \tag{69}$$

$$K_{\lambda+1}(\omega) = \frac{2\lambda}{\omega} K_\lambda(\omega) + K_{\lambda-1}(\omega) \tag{70}$$

$$K_{\lambda-1}(\omega) + K_{\lambda+1}(\omega) = -2K'_\lambda(\omega) \tag{71}$$

I Ouvrage de Jorgensen sur la loi inverse-gaussienne généralisée [12]

Jorgensen définit la loi inverse-gaussienne généralisée par la relation ²¹

$$\frac{\left(\frac{\Psi}{\chi}\right)^{\frac{\lambda}{2}}}{2K_{\lambda}(\sqrt{\chi\Psi})} x^{\lambda-1} e^{-\frac{1}{2}(\chi x^{-1} + \Psi x)} \quad (72)$$

Cette loi est unimodale et on a :

$$m = \begin{cases} \frac{\lambda-1+\sqrt{(\lambda-1)^2+\chi\Psi}}{\Psi} & \text{si } \Psi > 0 \\ \frac{\chi}{2(\lambda-1)} & \text{si } \Psi = 0 \end{cases}$$

En posant :

$$\begin{cases} \omega & = \sqrt{\chi\Psi} \\ \eta & = \sqrt{\frac{\chi}{\Psi}} \end{cases}$$

on a

$$\frac{\eta^{-\lambda}}{2K_{\lambda}(\omega)} x^{\lambda-1} e^{-\frac{1}{2}\omega(\eta x^{-1} + \eta^{-1}x)} \quad (73)$$

dont les moments s'écrivent :

$$m_k = \frac{K_{\lambda+k}(\omega)}{K_{\lambda}(\omega)} \eta^k$$

Jorgensen introduit les deux fonctions suivantes :

$$R_{\lambda}(\omega) = \frac{K_{\lambda+1}(\omega)}{K_{\lambda}(\omega)} \quad (74)$$

$$D_{\lambda}(\omega) = \frac{K_{\lambda+1}(\omega)K_{\lambda-1}(\omega)}{(K_{\lambda}(\omega))^2} \quad (75)$$

Ainsi on a une autre écriture de la variance :

$$\begin{aligned} \sigma &= \eta^2 \left(\frac{K_{\lambda+2}(\omega)}{K_{\lambda}(\omega)} - \left(\frac{K_{\lambda+1}(\omega)}{K_{\lambda}(\omega)} \right)^2 \right) \\ &= \eta^2 (R_{\lambda}(\omega))^2 (D_{\lambda+1}(\omega) - 1) \end{aligned}$$

ainsi que du coefficient de variation :

$$\sqrt{D_{\lambda+1}(\omega) - 1}$$

Le tableau suivant permet les concordances entre les définitions de Jorgensen, celles de Frery et celles adoptées dans ce document (voir formule 10).

Jorgensen	Halphen	Frery
λ	α	α
Ψ	2β	2λ
χ	2ε	2γ

21. Remarquons que la puissance de x est $\lambda - 1$, ce qui montre que Jorgensen a voulu modifier la formulation initiale de Halphen de manière identique à celle vue au paragraphe 2.3.2.

Références

- [1] H. Bateman *Table of integral transforms, vol. 1* McGraw-Hill, 1954
- [2] H. Bateman *Higher transcendental functions, volume II* McGraw-Hill, 1953
- [3] B. Bobee, L. Perreault *Two kinds of moment ratio diagrams and their applications in hydrology* Stochastic Hydrology and Hydraulics, vol 7 (1993), 41-65
- [4] S. Colombo *Les transformations de Mellin et de Hankel* Centre National de la Recherche Scientifique, 1959
- [5] Y Delignon, R Garello, A Hillion *Statistical modelling of ocean SAR images* Radar, Sonar and Navigation, IEE Proceedings- 144 (6), 348-354
- [6] R.A. Fisher *On a distribution yielding the error functions of several well known statistics* Proceedings of the International Congress of Mathematics, Toronto, 2 :805-813, 1924
- [7] A.J.Frery, H-J Muller, C. Yanasse, S. Sant'Anna *A model for extremely heterogeneous clutter* IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol 35, no 3, 648-659, 1997.
- [8] I.J. Good *The Population Frequencies of Species and the Estimation of Population Parameters* Biometrika, Vol. 40, no. 3/4. , pp. 237-264, 1953
- [9] J.W. Goodman *Speckle phenomena in optics : Theory and applications..* Roberts & Company, 2007.
- [10] D. Dugué *Sur un nouveau type de courbe de fréquence* Compte rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Vol. 213, p.634-635,1941
- [11] Norman N. Johnson, Samuel Klotz *Continuous univariate distributions-1* John Wiley & Sons, 1970
- [12] B. Jorgensen *Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution* Springer-Verlag 1982
- [13] G. Morlat *Les lois de probabilités de Halphen* Revue de statistique appliquée, tome 4, no 3, pp21-26, 1956
- [14] J-M Nicolas, *Introduction aux statistiques de deuxième espèce : applications des logs-moments et des logs-cumulants à l'analyse des lois d'images radar*, Traitement du signal, vol 19, No 3, pp 139-167, 2002.
- [15] J.M. Nicolas *Application de la transformée de Mellin : étude des lois statistiques de l'imagerie cohérente* , Rapport TélécomParisTech 2006D010
- [16] F. Oberhettinger *Tables of Mellin Transform* Springer Verlag, 1974
- [17] Tison, C., Nicolas, J., Tupin, F., et Maître, H. (2004). A new statistical model of urban areas in high resolution SAR images for Markovian segmentation. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*. Special issue on IGARSS'03, vol 42, n°10.
- [18] M. N. Do, M. Vetterli *Wavelet-Based Texture Retrieval Using Generalized Gaussian Density and Kullback-Leibler Distance* IEEE Transactions on Image Processing, vol 11, no 2, 146-158, 2002.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Les lois de Halphen (lois inverse-gaussienne généralisées)	2
2.1	Loi Gaussienne Généralisée sur \mathbb{R}^+	2
2.2	Variante : la loi Gamma Généralisée	3
2.3	Les lois inverse-gaussienne généralisées et les lois de Halphen	5
2.3.1	Les lois inverse-gaussienne généralisées	5
2.3.2	La loi de Halphen (de type A)	5
2.3.3	Exemples de la loi d'Halphen	7
2.3.4	Loi de Halphen Inverse	7
2.3.5	Les cas limite de la loi de Halphen	8
2.3.6	La loi de Halphen dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$	9
2.4	Variantes de la loi de Halphen	10
2.4.1	Loi de Halphen généralisée	10
2.4.2	Les cas limite de la loi de Halphen Généralisée	11
2.4.3	Loi de Halphen en amplitude	11
2.5	La loi \mathcal{HM} : loi de Halphen modifiée	12
2.5.1	Le comportement du mode de la loi de Halphen	12
2.5.2	Définition de la loi de Halphen modifiée	13
2.5.3	Propriétés	14
2.5.4	La loi de Halphen modifiée dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$	15
2.6	Premières remarques sur les lois de Halphen	16
2.7	Comparaison des lois de Halphen modifiées, des lois Gamma Généralisées et des lois de Fisher dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$	18
2.8	Etude comparative des modes de la loi de Halphen modifiée et de la loi de Fisher	18
3	L'extention "Compound Halphen" et la loi \mathcal{G}_A de Frery	19
3.1	Texture définie par une loi de Halphen et chatoiement pleinement développé	19
3.2	Les cas limites	21
3.3	Une construction d'une loi à 4 paramètres par convolution de Mellin : la loi U	21
3.3.1	Loi U	21
3.3.2	Loi U en amplitude	22
3.3.3	Comparaison de la loi U en amplitude et de la loi "Compound Halphen"	23
3.4	"Heterogeneous clutter" et "Extremely heterogeneous clutter" (Frery)	24
3.4.1	Lois des données en complexe	24
3.4.2	Lois en amplitude	24
4	Conclusion	25
A	La famille des lois de Halphen [13]	27
B	Rappels rapides sur la loi exponentielle décroissante, la loi Gamma et la loi Gamma Généralisée	28
B.1	La loi exponentielle décroissante et la loi Gamma	28
B.2	La loi exponentielle décroissante inverse et la loi Gamma Inverse	29
B.3	La loi Gamma Généralisée	30
B.4	La loi de Nakagami	30
B.5	La loi de Nakagami-Inverse	31
B.6	Une tentative d'analyse synthétique des lois de l'imagerie radar	31

C	Fiches descriptives rapides des lois de Halphen et des lois usuelles du radar	32
C.1	Loi de Halphen	32
C.2	Loi de Halphen modifiée	32
C.3	Loi de Halphen Généralisée	33
C.4	Loi Gamma	33
C.5	Loi Gamma Inverse	34
C.6	Loi Gamma Généralisée	34
C.7	Loi de Fisher	35
C.8	Loi Log-normale	35
D	Liens entre le système de Pearson et les modes des lois usuelles	36
D.1	Introduction	36
D.2	Système de Pearson	36
D.2.1	Définition	36
D.2.2	Les modes des lois du Système de Pearson	36
D.2.3	Dépendance du mode en fonction des paramètres des lois usuelles	37
D.3	Système de Pearson Etendu	38
D.3.1	Définition	38
D.3.2	Les modes des lois du Système de Pearson Etendu	38
D.4	Les modes des lois généralisées du système de Pearson	39
E	Rappels sur la transformée de Mellin et ses propriétés [14]	42
E.1	Propriétés fondamentales de la transformée de Mellin	42
E.2	Rappels sur la fonction caractéristique de deuxième espèce (log-fonction caractéristique) et ses propriétés	42
E.3	Le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$	42
E.4	Les lois généralisées et la transformée de Mellin	43
F	Le diagramme $\delta_1 - \delta_2$	45
G	Transformée de Mellin de produits	46
G.1	Formulation analytique	46
G.2	Exemple de deux lois Gamma	46
G.3	Exemple du produit d'une loi Gamma et d'une loi Gamma Inverse	47
G.3.1	Cas simple	47
G.3.2	Cas général	48
G.3.3	Loi de Halphen	48
H	Variations sur la fonction de Bessel modifiée de troisième espèce : la fonction K	49
I	Ouvrage de Jorgensen sur la loi inverse-gaussienne généralisée [12]	50

Dépôt légal : 2016 – 2^e trimestre
Imprimé à Télécom ParisTech – Paris
ISSN 0751-1345 ENST D (Paris) (France 1983-9999)

