



**Projet EFIDIR : aspects théoriques
en imagerie RSO
Lois statistiques des images « produits »
et des images « rapports »**

Jean-Marie Nicolas

2010D012

Avril 2010

Département Traitement du Signal et des Images
Groupe TII : Traitement et Interprétation des Images

Projet EFIDIR : aspects théoriques en imagerie RSO

Lois statistiques des images “produits” et des images “rapports”

Jean Marie Nicolas
Institut TELECOM, Télécom ParisTech, CNRS LTCI
46 rue Barrault, 75634 PARIS Cedex 13
jean-marie.nicolas@telecom-paristech.fr

Avril 2010

Le projet ANR EFIDIR¹ met en œuvre des images RSO (Radar à Synthèse d’Ouverture) qui, construites à partir d’une illumination électromagnétique cohérente, sont fortement marquées par le phénomène de chatoiement (*speckle*). Les traitements applicables sur ce type d’images sont alors fondamentalement différents de ceux utilisés couramment sur les images optiques. Dans le livrable 2.9 du projet [7], les techniques de corrélation employées prennent en compte cette spécificité.

Le chatoiement pouvant être considéré comme un bruit multiplicatif, il nous a semblé intéressant de rappeler dans ce rapport certains de ses outils d’analyse, comme les *statistiques de deuxième espèce* : celles ci offrent en effet un cadre idéal pour traiter les données entachées de chatoiement, et ouvrent des perspectives dès lors que l’on utilise des produits d’images (cas de la corrélation ou du filtre hermitien) ou des rapports d’images.

L’objectif de ce rapport est de proposer un certain nombre de résultats, certains plus ou moins connus, plus ou moins récents, d’autres originaux², ouvrant par exemple des perspectives nouvelles sur les traitements possibles sur des séquences multitemporelles d’images.

Après quelques rappels fondamentaux (en pratique tirés du rapport [3]), les lois suivies par les produits et les rapports de variables aléatoires suivant des lois “classiques” en imagerie cohérente seront établies, un paragraphe spécifique étant dédié au rapport de variables aléatoires décrivant des données en amplitude. Le dernier paragraphe propose une formulation simple et générale permettant des approximations tout à fait raisonnables dans la majorité des cas rencontrés en imagerie cohérente, et plus particulièrement RSO.

1 Introduction

1.1 Rappels

Dans le cadre des lois de probabilités correspondant à des données appartenant à \mathbb{R}^+ , une modélisation utile est celle des statistiques de deuxième espèce (que l’on peut appeler aussi *log-statistiques*) [3]. Dans ce formalisme, pour une densité de probabilité (ddp) $p_x(u)$ correspondant à la variable aléatoire x , on définit la fonction caractéristique de deuxième espèce $\phi_x(s)$ comme

¹Projet ANR-MDCO 2007 Extraction et Fusion d’Informations pour la mesure de Déplacements par Imagerie Radar, site <http://www.efidir.fr/>

²certains n’ayant probablement aucune application potentielle en imagerie cohérente

la transformée de Mellin de cette ddp :

$$\phi_x(s) = \mathcal{M}[p_x(u)](s) = \int_0^{+\infty} u^{s-1} p_x(u) du \quad (1)$$

avec s complexe. On définit de même la seconde fonction caractéristique de deuxième espèce $\psi_x(s)$ comme le logarithme népérien de la première fonction caractéristique de deuxième espèce :

$$\psi_x(s) = \log(\phi_x(s)) \quad (2)$$

On peut noter que $\phi_x(s)|_{s=1} = 1$ et que $\phi_x(s)|_{s=n+1}$ est en fait le moment d'ordre n : à ce titre, on peut interpréter la fonction caractéristique de deuxième espèce comme la fonction génératrice des moments dans la mesure où la variable s est réelle et que $\phi_x(s)|_{s=n+1}$ est défini dans un voisinage de s incluant le point $s = 1$.

S'ensuivent les définitions des moments de deuxième espèce (ou log-moments) :

$$\tilde{m}_\nu = \left. \frac{d^\nu \phi_x(s)}{ds^\nu} \right|_{s=1}. \quad (3)$$

et des cumulants de deuxième espèce (ou log-cumulants) :

$$\tilde{\kappa}_r = \left. \frac{d^r \psi_x(s)}{ds^r} \right|_{s=1} \quad (4)$$

1.2 Lois inverses

1.2.1 Relations fondamentales

Toujours dans le formalisme des log-statistiques, on montre que, pour une variable aléatoire x de ddp $p_x(u)$ et de fonction caractéristique de deuxième espèce $\phi_x(s)$, on peut associer la variable aléatoire $y = \frac{1}{x}$, de ddp $p_y(u)$ et de fonction caractéristique de deuxième espèce $\phi_y(s)$. On a ainsi la définition de la loi inverse de p_x :

$$p_y(u) = p_{I,x}(u) = \frac{1}{u^2} p_x\left(\frac{1}{u}\right) \quad (5)$$

$$\phi_y = \phi_{I,x}(s) = \phi_x(2-s) \quad (6)$$

Il est alors aisé de montrer, à partir de la relation 6 que les log-moments de la loi inverse vérifient

$$\tilde{m}_{I,r} = (-1)^r \tilde{m}_r \quad (7)$$

et que les log-cumulants de la loi inverse vérifient

$$\tilde{\kappa}_{I,r} = (-1)^r \tilde{\kappa}_r \quad (8)$$

1.2.2 Un cas particulier

Nous rencontrerons ultérieurement un cas particulier : celui d'une loi strictement identique à sa loi inverse³. On a alors les propriétés suivantes :

- puisque les log moments de la loi et de la loi inverse sont identiques, la relation 7 permet de déduire :

$$\tilde{m}_{I,2r+1} = 0 \quad \forall r > 0 \quad (9)$$

- puisque les log cumulants de la loi et de la loi inverse sont identiques, la relation 8 permet de déduire :

$$\tilde{\kappa}_{I,2r+1} = 0 \quad \forall r > 0 \quad (10)$$

³Dans cette note il faudra bien distinguer le cas où loi et loi inverse sont identiques (même loi, même paramètres) et le cas où loi et loi inverse ont la même formulation analytique (même loi, paramètres différents).

Ce type de loi a aussi une autre propriété très curieuse concernant la médiane. En effet, soit $p(x)$ une ddp telle que $p_I(x) = p(x)$. Développons l'intégrale de $p(x)$ entre 0 et l'infini (égale à 1 par définition) :

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty p(x)dx &= \int_0^1 p(x)dx + \int_1^\infty p(x)dx \\
 &= \int_0^1 p(x)dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2} p\left(\frac{1}{x}\right) dx \\
 &= \int_0^1 p(x)dx + \int_0^1 p_I(x)dx \\
 &= 2 \int_0^1 p(x)dx \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

On en déduit

$$\int_0^1 p(x)dx = 0.5 \tag{11}$$

ce qui signifie que la médiane a la valeur 1.

Toutes ces propriétés sont à rapprocher de celles d'une ddp $q(x)$ définie sur \mathbb{R} telle que $q(-x) = q(x)$. On montrerait aisément que ses moments impairs sont nuls, que ses cumulants impairs sont nuls et que sa médiane est en 0.

1.3 Convolution de Mellin, produits de variables aléatoires, rapports de variables aléatoires

1.3.1 Produit de variables aléatoires

Le formalisme des statistiques de deuxième espèce trouve toute son utilité dans le cadre de l'étude de produit de variable aléatoire. En effet, considérons deux variables aléatoires indépendantes x et y , de densités de probabilité p_x et p_y . Pour tout tirage X de la variable aléatoire x et pour tout tirage Y de la variable aléatoire y , on peut considérer la variable aléatoire z dont un tirage Z est défini par le produit des tirages de x et y :

$$Z = X Y$$

On peut alors écrire la densité de probabilité vérifiée par la variable aléatoire z :

$$p_z(u) = \int_0^\infty \frac{1}{\beta} p_x\left(\frac{u}{\beta}\right) p_y(\beta) d\beta \tag{12}$$

et on reconnaît dans cette expression une convolution de Mellin (notée $\hat{\star}$), ce qui permet d'établir la relation fondamentale suivante :

$$\begin{aligned}
 p_z(u) &= p_x(u) \hat{\star} p_y(u) \\
 &= \int_0^\infty \frac{1}{\beta} p_x\left(\frac{u}{\beta}\right) p_y(\beta) d\beta \\
 &= \int_0^\infty \frac{1}{\beta} p_x(\beta) p_y\left(\frac{u}{\beta}\right) d\beta
 \end{aligned} \tag{13}$$

Il est alors aisé de déduire directement des propriétés de la convolution de Mellin les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \phi_z(s) &= \phi_x(s) \phi_y(s) \\
 m_{z,\nu} &= m_{x,\nu} m_{y,\nu} \quad \forall \nu
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_z(s) &= \psi_x(s) + \psi_y(s) \\
 \tilde{\kappa}_{z(r)} &= \tilde{\kappa}_{x(r)} + \tilde{\kappa}_{y(r)} \quad \forall r
 \end{aligned} \tag{15}$$

1.3.2 Rapport de variables aléatoires

Pour tout tirage X de la variable aléatoire x et pour tout tirage Y de la variable aléatoire y , on peut considérer la variable aléatoire z dont un tirage Z est défini par le rapport des tirages de x et y . Si l'on considère la variable aléatoire y' inverse de la variable aléatoire y , le tirage Z est alors défini par le produit des tirages X et Y' des variables aléatoires x et y' . En partant de la définition de la convolution de Mellin (qui est associé naturellement au produit de deux variables aléatoires), et en utilisant la relation 5, on obtient :

$$\begin{aligned}
 p_z(u) &= p_x(u) \hat{\star} p_{y'}(u) \\
 &= \int_0^\infty p_x\left(\frac{u}{\beta}\right) p_{y'}(\beta) \frac{1}{\beta} d\beta \\
 &= \int_0^\infty p_x\left(\frac{u}{\beta}\right) p_y\left(\frac{1}{\beta}\right) \frac{1}{\beta^3} d\beta \\
 &= \int_0^\infty p_x(\alpha u) p_y(\alpha) \alpha d\alpha
 \end{aligned} \tag{16}$$

cette dernière relation se trouvant par exemple dans Papoulis [5].

A partir des propriétés des fonctions caractéristiques de deuxième espèce d'une loi inverse, on a :

$$\begin{aligned}
 \phi_z(s) &= \phi_x(s) \phi_{y'}(s) \\
 &= \phi_x(s) \phi_y(2-s) \\
 \tilde{\kappa}_{z(r)} &= \tilde{\kappa}_{x(r)} + (-1)^r \tilde{\kappa}_{y(r)} \quad \forall r
 \end{aligned} \tag{17}$$

1.3.3 Convolution de Mellin et loi inverse

L'expression multiplicative des fonctions caractéristiques de deuxième espèce permet d'obtenir directement une propriété utile : la loi inverse d'une ddp exprimée par une convolution de Mellin de ddp est la convolution de Mellin des ddp inverses.

En effet, soit une ddp $p(x)$ s'exprimant par une convolution de Mellin de n ddp q_i :

$$p = q_1 \hat{\star} q_2 \hat{\star} \dots \hat{\star} q_n$$

Sa fonction caractéristique s'écrit sous la forme d'un produit :

$$\phi_p(s) = \prod_i \phi_{q_i}(s)$$

La fonction caractéristique de sa loi inverse s'écrit

$$\phi_{p_I}(s) = \phi_p(2-s) = \prod_i \phi_{q_i}(2-s) = \prod_i \phi_{q_{I,i}}(s)$$

ce qui permet alors d'écrire

$$p_I = q_{I,1} \hat{\star} q_{I,2} \hat{\star} \dots \hat{\star} q_{I,n}$$

1.4 Lois en intensité, lois en amplitude

1.4.1 Passage de données en amplitude à des données en intensité

Les données fournies par un système peuvent être en amplitude (désignées ici par la variable u) ou en intensité (désignées ici par la variable v). Il est aisé de passer d'une représentation à une autre. On rappelle ici les principales propriétés de ce passage.

Soit une distribution de probabilité $p_{\mathcal{A}}(u)$ correspondant à la loi en amplitude, et soit $\phi_{\mathcal{A}}$ sa fonction caractéristique de deuxième espèce. Considérons la variable $v = u^2$ (ce qui revient à

dire que $u = v^{1/2}$). Nous appellerons $p_{\mathcal{I}}(v)$ la loi de probabilité en intensité, et $\phi_{\mathcal{I}}$ la fonction caractéristique correspondante. On a alors les relations suivantes :

$$p_{\mathcal{A}}(u) = 2 u p_{\mathcal{I}}(u^2) \quad (18)$$

$$\phi_{\mathcal{A}}(s) = \phi_{\mathcal{I}}\left(\frac{s+1}{2}\right) \quad (19)$$

Moments et log-cumulants s'en déduisent aisément :

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{A},2n} &= m_{\mathcal{I},n}, \\ \tilde{\kappa}_{p_{\mathcal{A}},u(r)} &= \left(\frac{1}{2}\right)^r \tilde{\kappa}_{p_{\mathcal{I}},v(r)} \end{aligned}$$

1.4.2 Convolution de Mellin et passage de données en amplitude à des données en intensité

Le caractère multiplicatif des fonctions caractéristiques de deuxième espèce permet de traiter le cas où l'on souhaite passer de données en amplitude décrites par une ddp exprimée par une convolution de Mellin à des données en intensité. En effet, soit une variable en amplitude dont la ddp, $p_{\mathcal{A}}$, s'exprime sous forme d'une convolution de Mellin de n ddp $q_{\mathcal{A},i}$:

$$p_{\mathcal{A}} = q_{\mathcal{A},1} \hat{\star} q_{\mathcal{A},2} \hat{\star} \dots \hat{\star} q_{\mathcal{A},n}$$

Sa fonction caractéristique s'écrit sous la forme d'un produit :

$$\phi_{p_{\mathcal{A}}}(s) = \prod_i \phi_{q_{\mathcal{A},i}}(s)$$

Or chaque $\phi_{q_{\mathcal{A},i}}$ (loi en amplitude) peut s'exprimer en fonction de $\phi_{q_{\mathcal{I},i}}$ (loi en intensité) grâce à la relation 19 :

$$\phi_{q_{\mathcal{A},i}}(s) = \phi_{q_{\mathcal{I},i}}\left(\frac{s+1}{2}\right)$$

On en déduit la relation globale de passage :

$$\phi_{p_{\mathcal{A}}}(s) = \prod_i \phi_{q_{\mathcal{I},i}}\left(\frac{s+1}{2}\right) = \phi_{p_{\mathcal{I}}}\left(\frac{s+1}{2}\right)$$

ce qui revient à écrire :

$$p_{\mathcal{I}} = q_{\mathcal{I},1} \hat{\star} q_{\mathcal{I},2} \hat{\star} \dots \hat{\star} q_{\mathcal{I},n}$$

1.4.3 Cas général : loi puissance η de l'amplitude

On peut généraliser cette approche à des données obtenues en élevant l'intensité à une puissance $1/\eta$ quelconque. Si v est l'intensité, on a lors une nouvelle variable $u = v^{1/\eta}$, de ddp $p(u)$ telle que $v = u^\eta$. On a alors les relations suivantes :

$$\begin{aligned} p(u) &= \eta u^{\eta-1} p_{\mathcal{I}}(u^\eta) \\ \phi(s) &= \phi_{\mathcal{I}}\left(\frac{s+\eta-1}{\eta}\right) \\ \tilde{\kappa}_{p,u(r)} &= \left(\frac{1}{\eta}\right)^r \tilde{\kappa}_{p_{\mathcal{I}},v(r)} \end{aligned}$$

On vérifie aisément qu'en prenant $\eta = 2$, on retrouve les résultats du précédent paragraphe (passage de l'amplitude à l'intensité).

1.5 Chatoisement et loi Gamma

En imagerie cohérente, le phénomène de chatoisement pleinement développé (speckle) joue un rôle prépondérant. On montre que sur une zone de texture homogène, la valeur d'un pixel peut être vu comme le tirage de la ddp caractéristique de ce phénomène. Or, pour les données en intensité, la loi suivie par le chatoisement est tout simplement la loi Gamma. Cette loi est très connue et s'écrit

$$\mathcal{G}[\mu, L](u) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{Lu}{\mu}\right)^{L-1} e^{-\frac{Lu}{\mu}} \quad (20)$$

Ses moments ont une formulation très simple permettant facilement d'obtenir des formulations explicites pour les deux paramètres μ et L à partir des deux premiers moments, ce qui fait que l'on a tendance à aborder le problème du chatoisement en analysant les données en intensité.

Cependant, nous avons vu que, dans le formalisme des statistiques de deuxièmes espèces, il n'y a pas de différences fondamentales entre les expressions des log-cumulants : passer de données en amplitude aux données en intensité requiert donc dans ce formalisme un minimum d'effort. On pourrait traiter le chatoisement sur les données en amplitude et on obtiendrait la loi de Rayleigh-Nakagami :

$$\mathcal{RN}[\mu, L](u) = \frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{L}}{\Gamma(L)} \left(\frac{\sqrt{L}u}{\mu}\right)^{2L-1} e^{-\left(\frac{\sqrt{L}u}{\mu}\right)^2}. \quad (21)$$

Cette loi est moins usitée que la loi Gamma : la raison en est que ses moments font intervenir la fonction de Pochhammer et, de ce fait, il n'y a pas d'expressions explicites entre les paramètres de cette loi et ses deux premiers moments. Cependant, ses log-moments ont la même forme analytique que les log-moments de la loi Gamma. Néanmoins, la majorité des auteurs préfère en rester aux données en intensité, quitte à élever au carré leurs données.

Eu égard à cette tradition du monde du Radar, ce document va d'abord traiter les données en intensité, puis généralisera les résultats pour les données en amplitude.

Notons aussi que la loi de Weibull $\mathcal{WG}[\mu, L, \eta]$:

$$\mathcal{WG}[\mu, L, \eta](u) = \frac{|\eta|}{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{\Gamma(L)} \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}}u}{\mu}\right)^{\eta L-1} e^{-\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}}u}{\mu}\right)^{\eta}}. \quad (22)$$

correspond, pour une valeur de η donnée, la manière de traiter une puissance quelconque d'une grandeur dont on connaît l'intensité (resp. l'amplitude), celle-ci suivant une loi Gamma (resp. une loi de Nakagami). Pour ces lois, la méthode des moments s'avère totalement inefficace. La méthode des log-moments permet de retrouver sans trop de difficultés les trois paramètres μ , L et η , même si le système obtenu est implicite.

1.6 La boîte à outils : loi Gamma, loi Gamma Inverse et loi lognormale

Pour les données d'imagerie cohérente "en intensité", les deux distributions "standard" (à l'instar de la gaussienne pour les lois de probabilité définies sur \mathbb{R}) sont la loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L]$ et la loi Gamma Inverse $\mathcal{GI}[\mu', M]$.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}[\mu, L](u) &= \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{Lu}{\mu}\right)^{L-1} e^{-\frac{Lu}{\mu}} \\ \mathcal{GI}[\mu', M](u) &= \frac{1}{\Gamma(M)} \frac{1}{M\mu'} \left(\frac{M\mu'}{u}\right)^{M+1} e^{-\frac{M\mu'}{u}} \end{aligned}$$

Dans ce rapport, on a effectué un choix spécifique de la loi Gamma Inverse (consistant schématiquement à prendre $\mu' = 1/\mu$ pour dans les deux cas garder un terme "sans dimension"

comme $\frac{u}{\mu}$ ou $\frac{\mu'}{u}$). On en déduit les fonctions caractéristiques de deuxième espèce :

$$\begin{aligned}\phi_{\mathcal{G}}(s) &= \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \\ \phi_{\mathcal{GI}}(s) &= \mu'^{1-s} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s} \Gamma(M)}\end{aligned}$$

ce qui permet de déduire les log-cumulants :

	Loi Gamma	Loi Gamma Inverse
$\tilde{\kappa}_1$	$\log \mu + \Psi(L) - \log L$	$\log \mu' - \Psi(M) + \log M$
$\tilde{\kappa}_2$	$\Psi(1, L)$	$\Psi(1, M)$
$\tilde{\kappa}_n$	$\Psi(n-1, L)$	$(-1)^n \Psi(n-1, M)$

Lorsque L tend vers l'infini, on sait aussi que la loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L]$ tend vers un Dirac-Mellin :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{G}[\mu, L](u) = \delta_{\mu}^{\mathcal{M}}(u) \quad (23)$$

propriété partagée avec la loi Gamma Inverse ($\lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{GI}[\mu', M](u) = \delta_{\mu'}^{\mathcal{M}}(u)$).

A coté de ces deux lois, la loi lognormale a des propriétés fondamentales qui peuvent être utiles dans l'étude des lois produits d'image. Son expression est donnée par la relation :

$$\mathcal{L}[\mu, \sigma](u) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi u}} e^{\left(-\frac{(\log u - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \quad u > 0 \quad (24)$$

sa fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit :

$$\phi_{\mathcal{L}}(s) = e^{\mu(s-1)} e^{\left(\frac{\sigma^2 (s-1)^2}{2}\right)} \quad (25)$$

et ses log-cumulants sont nuls à partir de l'ordre 3 :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \mu \\ \tilde{\kappa}_2 = \sigma^2 \\ \tilde{\kappa}_n = 0 \quad \forall n \geq 3 \end{cases} \quad (26)$$

Comme pour les lois Gamma et Gamma Inverse, la loi log-normale tend vers un Dirac-Mellin lorsque σ tend vers 0.

Cette loi possède une propriété probablement unique : tous ses moments sont définis, tant les moments positifs ($s > 1$ dans l'expression 25) que ses moments négatifs ($s < 1$ dans l'expression 25). De plus, il est aisé de montrer que la loi inverse d'une loi lognormale $\mathcal{L}[\mu, \sigma]$ est la loi lognormale $\mathcal{L}[-\mu, \sigma]$. De même le passage de l'amplitude à une puissance quelconque de l'amplitude est une opération interne aux lois lognormales : on obtient à nouveau une loi lognormale.

En fait cette loi est bien connue du monde traditionnel des probabilités puisque, par passage de la variable u à la variable $v = \log u$, on retrouve la loi normale. Ceci fonde l'analogie entre les cumulants de la loi normale, nuls à partir de l'ordre 3 et entre les log-cumulants de la loilognormale, nuls eux aussi à partir de l'ordre 3.

Cependant, en imagerie cohérente où le chatoiement –et donc la loi Gamma– servent de référence, la loi lognormale n'a pas a priori un rôle essentiel.

2 Lois statistiques de produit : données en intensité

L'imagerie RSO fait intervenir des produits de pixels provenant de deux images différentes acquises sur la même zone, par exemple dans le cadre du filtrage hermitien ou de l'interférométrie RSO.

Pour aborder ce concept de produit, nous allons nous placer dans le formalisme de la convolution de Mellin, bien adaptée à l'imagerie cohérente (radar, échographie, ...) puisque la formation du pixel s'appuie sur la notion de texture et de bruit multiplicatif (lié au chatolement). En connaissant la loi de la texture et la loi du chatolement, la loi suivie par les pixels de l'image est alors une convolution de Mellin de ces deux lois.

La boîte à outils de l'imagerie cohérente est donc fondée sur les lois Gamma et Gamma Inverse, et sur la convolution de Mellin. Nous allons voir qu'elle permet de construire des lois connues (comme la loi \mathcal{K} et la loi de Fisher); d'autres, parfois inédites, peuvent apparaître. Si cette démarche est aisée à mettre en œuvre, il n'en reste pas moins que les résultats obtenus se doivent d'être confrontés à des expérimentations avant de conclure à l'intérêt effectif en traitement d'images RSO.

2.1 Produit de deux lois lognormale

Puisque la fonction caractéristique de deuxième espèce d'un produit de deux variables aléatoires définies sur \mathbb{R}^+ est tout simplement le produit des deux fonctions caractéristiques de deuxième espèce, et en se fondant sur l'expression de la seconde fonction caractéristique de la loi lognormale (expression 25), on obtient la fonction caractéristique de la variable aléatoire z telle que $z = xy$, x suivant la loi lognormale $\mathcal{L}[\mu_1, \sigma_1]$ et y suivant la loi lognormale $\mathcal{L}[\mu_2, \sigma_2]$:

$$\phi_z(s) = e^{(\mu_1 + \mu_2)(s-1)} e^{\left((\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \frac{(s-1)^2}{2}\right)}$$

On reconnaît du premier coup d'œil l'expression de la loi lognormale $\mathcal{L}\left[\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right]$. Ce résultat est bien celui que l'on aurait obtenu en passant en échelle logarithmique. Dans ce cas, l'opération de type multiplicatif (convolution de Mellin) se serait transformé en opération de type additif (convolution traditionnelle) et on sait qu'ajouter du bruit gaussien à un processus gaussien donne un résultat qui suit une loi gaussienne (ceci parce que la convolution de deux gaussiennes donne une gaussienne).

Les log-cumulants s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 &= \mu_1 + \mu_2 \\ \tilde{\kappa}_2 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \\ \tilde{\kappa}_n &= 0 \quad \forall n \geq 3 \end{cases} \quad (27)$$

2.2 Produit de deux lois Gamma

On sait ([Epstein [2])⁴ que le produit de deux variables aléatoires suivant deux lois Gamma $\mathcal{G}[\mu_1, L]$ et $\mathcal{G}[\mu_2, M]$ donne la loi \mathcal{K} . En effet, puisque la fonction caractéristique de deuxième espèce d'un produit de deux variables aléatoires définies sur \mathbb{R}^+ est tout simplement le produit des deux fonctions caractéristiques de deuxième espèce, on obtient la seconde fonction caractéristique correspondant au produit des deux variables aléatoires :

$$\phi_z(s) = (\mu_1 \mu_2)^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+s-1)}{M^{s-1} \Gamma(M)}$$

Par transformation de Mellin Inverse (obtenue par des tables de transformation de Mellin), cette dernière expression donne directement la loi suivie par une variable aléatoire produit de deux

⁴Pour être plus précis, Epstein a seulement démontré le cas $L = M = 1$.

variables aléatoires suivant deux lois Gamma :

$$\mathcal{K} [\mu = \mu_1 \mu_2, L, M] = \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{2 L M}{\mu} \left(\frac{L M u}{\mu} \right)^{\frac{M+L}{2}-1} K_{M-L} \left[2 \left(\frac{L M u}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (28)$$

avec K fonction de Bessel modifiée de seconde espèce. Cette loi est par définition la loi \mathcal{K} .

On a directement, pour tout $r > 1$, la relation :

$$\tilde{\kappa}_{u(r)} = \Psi(r-1, L) + \Psi(r-1, M). \quad (29)$$

Pour être exhaustif, on peut noter que la loi produit d'une loi Gamma Inverse et d'une autre loi Gamma Inverse est la loi \mathcal{KI} , loi inverse de la loi \mathcal{K} :

$$\mathcal{KI}(u) = \frac{1}{\Gamma(L+1)\Gamma(M+1)} \frac{2}{\mu} \left(\frac{L M \mu}{u} \right)^{\frac{M+L}{2}+1} K_{M-L} \left[2 \left(\frac{L M \mu}{u} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

loi fortement à queue lourde et totalement inusitée.

2.3 Produit d'une loi Gamma et d'une loi Gamma inverse : la loi de Fisher

2.3.1 Cas général

On sait ([Epstein [2]]) que le produit de deux variables aléatoires, l'une suivant la loi Gamma $\mathcal{G} [\mu_1, L]$ et l'autre suivant la loi Gamma inverse $\mathcal{GI} [\mu_2, M]$ donne la loi de Fisher. En effet, la fonction caractéristique de deuxième espèce d'un produit de deux variables aléatoires définies sur \mathbb{R}^+ est tout simplement le produit des deux fonctions caractéristiques de deuxième espèce, ce qui donne ici :

$$\phi_z(s) = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s} \Gamma(M)}$$

Par transformation de Mellin Inverse, cette dernière expression donne directement la loi suivie par le produit d'une variable aléatoire produit d'une variable aléatoire suivant la loi Gamma et d'une variable aléatoire suivant loi Gamma inverse :

$$\mathcal{F} \left[\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}, L, M \right] = \frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{\left(\frac{Lu}{M\mu} \right)^{L-1}}{\left(1 + \frac{Lu}{M\mu} \right)^{L+M}} \quad (30)$$

qui est par définition la loi de Fisher.

On a directement, pour tout $r > 1$, la relation :

$$\tilde{\kappa}_{u(r)} = \Psi(r-1, L) + (-1)^r \Psi(r-1, M). \quad (31)$$

La convolution de Mellin étant commutative, on en déduit une relation fort intéressante :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} [\mu, L, M] &= \mathcal{G} [\mu, L] \hat{\star} \mathcal{GI} [1, M] \\ &= \mathcal{GI} [1, M] \hat{\star} \mathcal{G} [\mu, L] \\ &= \mathcal{FI} \left[\frac{1}{\mu}, M, L \right] \end{aligned}$$

où \mathcal{FI} est la loi de Fisher inverse. La loi de Fisher a donc ceci de particulier que sa formulation analytique est identique à celle de sa loi inverse (propriété qu'elle partage avec la loi log-normale par exemple).

2.3.2 Cas particulier

Dans le cas où la loi Gamma Inverse choisie est identique à l'inverse de la loi Gamma initiale, on a alors un cas particulier de la loi de Fisher :

$$\mathcal{F}_Z [L] = \mathcal{F} [\mu = 1, L, L] = \frac{\Gamma(2L)}{(\Gamma(L))^2} \frac{u^{L-1}}{(1+u)^{2L}}$$

dont les log cumulants vérifient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_2 &= 2\Psi(1, L) \\ \tilde{\kappa}_{2n} &= 2\Psi(2n-1, L) \quad \forall n > 0 \\ \tilde{\kappa}_{2n+1} &= 0 \quad \forall n > 0 \end{aligned}$$

Le mode et la médiane de cette loi sont donnés par :

$$\begin{aligned} m_{mode} &= \frac{L-1}{L+1} \\ m_{mediane} &= 1 \end{aligned}$$

En particulier, comme dans le cas de la loi Gamma, pour $L = 1$ le mode est en 0.

Pour $L > 1$, cette loi ressemble d'autant plus à une loi log-normale que L est grand. En effet, la ressemblance est fondée sur l'annulation de tous les log-cumulants impairs (nuls aussi pour la loi lognormale) et sur le fait que les log-cumulants pairs $\Psi(2n-1, L)$ pour $n > 1$ sont d'autant plus petits que n et L sont grands (alors qu'ils sont nuls pour la loi lognormale).

2.4 Produit de deux lois de Fisher et produit d'une loi \mathcal{K} et d'une loi \mathcal{KI}

Le produit de deux lois de Fisher s'apparente au rapport de deux lois de Fisher, qui sera abordé au paragraphe 3.5. En effet, la loi de Fisher inverse s'exprimant selon le même formalisme que la loi de Fisher (voir le paragraphe 2.3), il est identique de traiter le cas "produit" et le cas "rapport".

On obtient donc (voir le calcul complet en annexe A) :

$$\begin{aligned} \mathcal{PF} &= \frac{\Gamma(L_1 + M_1) \Gamma(L_2 + M_2)}{\Gamma(L_1) \Gamma(M_1) \Gamma(L_2) \Gamma(M_2)} \frac{\Gamma(L_1 + M_2) \Gamma(M_1 + L_2)}{\Gamma(L_1 + L_2 + M_1 + M_2)} \frac{L_1 L_2}{M_1 M_2 \mu_1 \mu_2} \\ &\left(\frac{L_1 L_2}{M_1 M_2 \mu_1 \mu_2} u \right)^{L_1 - 1} {}_2F_1 \left(L_1 + M_1, L_1 + M_2; L_1 + L_2 + M_1 + M_2; 1 - \frac{L_1 L_2}{M_1 M_2 \mu_1 \mu_2} u \right) \quad (32) \end{aligned}$$

Notons cependant un résultat spécifique aisé à écrire : la loi "produit" s'exprime donc comme une convolution de Mellin de quatre lois élémentaires (lois Gamma et lois Gamma inverse). Puisque la convolution de Mellin est associative et commutative, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{PF} [\mu, L_1, M_1, L_2, M_2] (u) &= \mathcal{F} [\mu_1, L_1, M_1] \hat{\star} \mathcal{F} [\mu_2, L_2, M_2] \\ &= (\mathcal{G} [\mu_1, L_1] \hat{\star} \mathcal{GI} [1, M_1]) \hat{\star} (\mathcal{G} [\mu_2, L_2] \hat{\star} \mathcal{GI} [1, M_2]) \\ &= (\mathcal{G} [\mu_1, L_1] \hat{\star} \mathcal{GI} [1, M_1]) \hat{\star} (\mathcal{G} [1, L_2] \hat{\star} \mathcal{GI} [\mu_2, M_2]) \\ &= (\mathcal{G} [\mu_1, L_1] \hat{\star} \mathcal{G} [1, L_2]) \hat{\star} (\mathcal{GI} [\mu_2, L_2] \hat{\star} \mathcal{GI} [1, M_2]) \\ &= \mathcal{K} [\mu_1, L_1, M_1] \hat{\star} \mathcal{KI} [\mu_2, L_2, M_2] \end{aligned}$$

On a ainsi montré que ce cas (produit de deux lois de Fisher) était identique au cas du produit d'une loi \mathcal{K} et d'une loi \mathcal{KI} .

2.5 Produit de deux lois \mathcal{K} (et produit de deux lois \mathcal{KI})

Soient deux lois $\mathcal{K} : \mathcal{K}[\mu_1, L_1, M_1]$ et $\mathcal{K}[\mu_2, L_2, M_2]$. La loi que suit une variable aléatoire produit de deux variables suivant ces deux lois s'écrit :

$$\mathcal{K}[\mu_1, L_1, M_1] \hat{\star} \mathcal{K}[\mu_2, L_2, M_2]$$

c'est à dire une convolution de Mellin de 4 lois Gamma. La fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit donc :

$$\phi_z(s) = \mu_1^{s-1} \frac{\Gamma(L_1 + s - 1)}{L_1^{s-1} \Gamma(L_1)} \frac{\Gamma(M_1 + s - 1)}{M_1^{s-1} \Gamma(M_1)} \mu_2^{s-1} \frac{\Gamma(M_2 + s - 1)}{M_2^{s-1} \Gamma(M_2)} \frac{\Gamma(L_2 + s - 1)}{L_2^{s-1} \Gamma(L_2)}$$

Malheureusement, les tables de transformées de Mellin sont muettes sur ce cas.

C'est un problème identique que l'on rencontrerait en recherchant la loi que suit une variable aléatoire produit de deux variables suivant deux loi \mathcal{KI} , la fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrivant :

$$\phi_z(s) = \mu_1^{1-s} \frac{\Gamma(L_1 + 1 - s)}{L_1^{1-s} \Gamma(L_1)} \frac{\Gamma(M_1 + 1 - s)}{M_1^{1-s} \Gamma(M_1)} \mu_2^{1-s} \frac{\Gamma(M_2 + 1 - s)}{M_2^{1-s} \Gamma(M_2)} \frac{\Gamma(L_2 + 1 - s)}{L_2^{1-s} \Gamma(L_2)}$$

La solution est alors l'inverse de la précédente.

3 Lois statistiques de rapport : données en intensité

3.1 Rapport de deux lois lognormale

Etudier le rapport de deux variables aléatoires suivant deux lois lognormales revient à étudier le produit de deux variables aléatoires suivant deux lois lognormales puisque la loi lognormale est formellement sa propre loi inverse. En se fondant sur l'expression de la seconde fonction caractéristique de la loi lognormale (expression 25), on obtient la fonction caractéristique de la variable aléatoire z telle que $z = xy$, x suivant la loi lognormale $\mathcal{L}[\mu_1, \sigma_1]$ et y suivant la loi lognormale $\mathcal{L}[-\mu_2, \sigma_2]$:

$$\phi_z(s) = e^{(\mu_1 - \mu_2)(s-1)} e^{\left((\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \frac{(s-1)^2}{2} \right)}$$

On reconnaît du premier coup d'œil l'expression de la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi lognormale $\mathcal{L}[\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}]$, qui s'exprime comme :

$$\mathcal{L}[\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}](u) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \sqrt{2\pi} u} e^{\left(-\frac{(\log u - (\mu_1 - \mu_2))^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \right)}$$

Ce résultat est bien celui que l'on aurait obtenu en passant en échelle logarithmique. Dans ce cas, l'opération de type multiplicatif (convolution de Mellin) se serait transformé en opération de type additif (convolution traditionnelle) et on sait qu'ajouter du bruit gaussien à un processus gaussien donne un résultat qui suit une loi gaussienne.

Les log-cumulants s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 &= \mu_1 - \mu_2 \\ \tilde{\kappa}_2 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \\ \tilde{\kappa}_n &= 0 \quad \forall n \geq 3 \end{cases} \quad (33)$$

Si les deux lois Lognormales sont identiques, on obtient le cas particulier de loi lognormale :

$$\mathcal{L} [\mu = 0, \sqrt{2}\sigma] (u) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}u} e^{\left(-\frac{(\log u)^2}{4\sigma^2}\right)} \quad u > 0$$

dont la caractéristique est d'avoir un seul log-cumulant non nul : le second.

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = 0 \\ \tilde{\kappa}_2 = 2\sigma^2 \\ \tilde{\kappa}_n = 0 \quad \forall n \geq 3 \end{cases} \quad (34)$$

Médiane et mode vérifient

$$\begin{aligned} m_{\text{mediane}} &= 1 \\ m_{\text{mode}} &= e^{2\sigma^2} \end{aligned}$$

Une illustration du cas du rapport de deux lois Lognormales identiques est donnée figure 1.

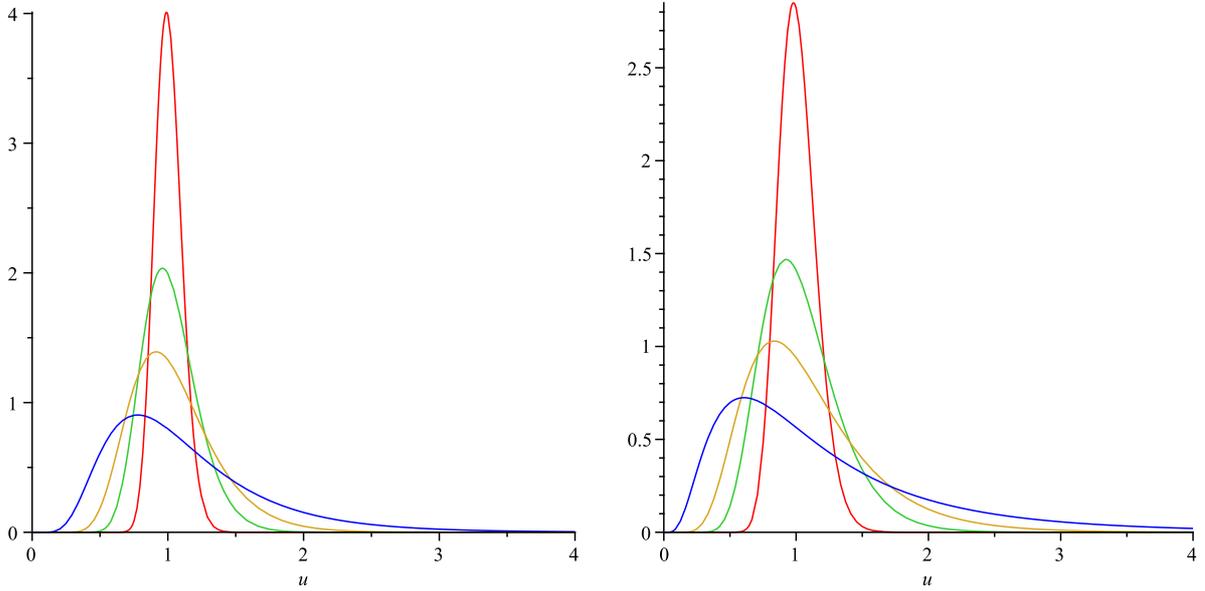


FIG. 1 – Rapport de deux lois lognormales identiques, représentées à gauche avec $\mu = 0$ et $\sigma = 0.1, 0.2, 0.3$ et 0.5 . Le résultat est la loi $\mathcal{L} [\mu = 0, \sqrt{2}\sigma] (u)$ (soit une loi lognormale avec $\sigma = 0.1\sqrt{2}, 0.2\sqrt{2}, 0.3\sqrt{2}$ et $0.5\sqrt{2}$).

3.2 Rapports de deux lois Gamma : la loi de Fisher

3.3 Cas général

Etudier le rapport de deux variables aléatoires suivant deux lois Gamma $\mathcal{G} [\mu_1, L]$ et $\mathcal{G} [\mu_2, M]$ revient à étudier le produit de deux variables aléatoires, l'une suivant une loi Gamma $\mathcal{G} [\mu_1, L]$ et l'autre suivant une loi Gamma Inverse $\mathcal{GI} [\mu_2, M]$. On sait alors [Epstein [2]) que le résultat est la loi $\mathcal{G} [\mu_1, L] \star \mathcal{GI} [\mu_2, M]$ dont la fonction caractéristique de deuxième espèce est tout simplement le produit des deux fonctions caractéristiques de deuxième espèce :

$$\mu_1^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \mu_2^{1-s} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s} \Gamma(M)}$$

Par transformation de Mellin Inverse, cette dernière expression donne directement la loi suivie par le rapport :

$$\mathcal{F} \left[\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}, L, M \right] = \frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{\left(\frac{Lu}{M\mu}\right)^{L-1}}{\left(1 + \frac{Lu}{M\mu}\right)^{L+M}}$$

qui est par définition la loi de Fisher, vue précédemment (voir le paragraphe 2.3).

Cette expression est bien connue puisque, en remplaçant μ par R , L par k et M par $M - k$, on retrouve la formule d'Oliver ([4], équation 10).

3.3.1 Cas de deux lois Gamma identiques

Si les deux lois Gamma sont identiques, on obtient une forme particulière de la loi de Fisher $\mathcal{F}_Z[L] = \mathcal{F}[\mu = 1, L, L]$ évoquée au paragraphe 2.3.2.

On rappelle que le mode et la médiane de cette loi sont donnés par :

$$\begin{aligned} m_{mode} &= \frac{L-1}{L+1} \\ m_{mediane} &= 1 \end{aligned}$$

Une illustration du cas du rapport de deux lois Gamma identiques est donnée figure 2.

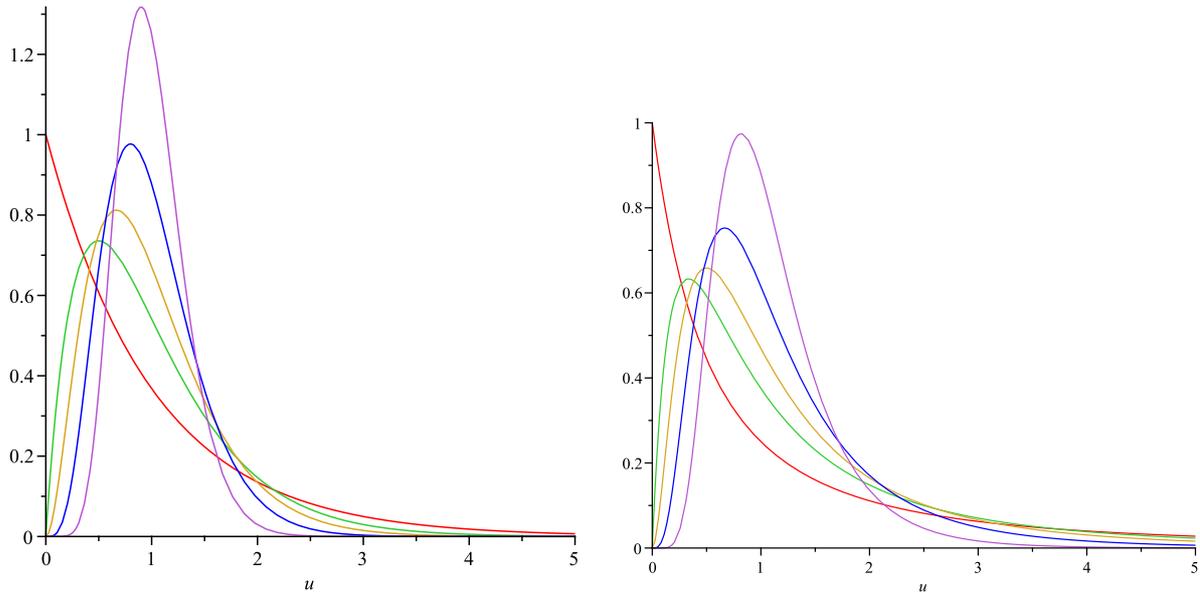


FIG. 2 – Rapport de deux lois Gamma identiques, représentées à gauche avec $L = 1, 2, 3, 5$ et 10 , et $\mu = 1$. Le résultat est la loi de Fisher $\mathcal{F}_Z[L]$, représentée ici avec $L = 1, 2, 3, 5$ et 10 .

3.3.2 Cas de deux lois Gamma avec $L = M$

On a dans ce cas particulier l'expression de la loi du rapport :

$$\mathcal{F} \left[\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}, L, L \right] = \frac{1}{\mu} \frac{\Gamma(2L)}{(\Gamma(L))^2} \frac{\left(\frac{u}{\mu}\right)^{L-1}}{\left(1 + \frac{u}{\mu}\right)^{2L}}$$

3.4 Rapports d'une loi Gamma et d'une loi Gamma inverse : la loi \mathcal{K}

Pour être exhaustif, on peut noter que la loi rapport d'une loi Gamma et d'une loi Gamma Inverse est la loi produit d'une loi Gamma et d'une autre loi Gamma, ce qui donne la loi \mathcal{K} (voir le paragraphe 2.2).

3.5 Rapports de deux lois de Fisher et rapports de deux lois \mathcal{K}

3.5.1 Cas général

Nous avons vu que la loi de Fisher est la convolution de Mellin d'une loi Gamma et d'une loi Gamma Inverse.

$$\mathcal{F} \left[\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}, L, M \right] = \mathcal{G} [\mu_1, L] \hat{\star} \mathcal{GI} [\mu_2, M] = \delta_{\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}}^{\mathcal{M}} \hat{\star} \mathcal{G} [\mu = 1, L] \hat{\star} \mathcal{GI} [\mu = 1, M]$$

Considérons donc le rapport de deux lois de Fisher : $\mathcal{F} [\mu_1, L_1, M_1]$ et $\mathcal{F} [\mu_2, L_2, M_2]$. Notons tout de suite que la loi inverse de $\mathcal{F} [\mu_2, L_2, M_2]$ est la loi $\mathcal{F} \left[\frac{1}{\mu_2}, M_2, L_2 \right]$.

La loi résultante $\mathcal{RF} [\mu, L_1, M_1, L_2, M_2]$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{RF} [\mu, L_1, M_1, L_2, M_2] &= \mathcal{F} [\mu_1, L_1, M_1] \hat{\star} \mathcal{F} \left[\frac{1}{\mu_2}, M_2, L_2 \right] \\ &= \mathcal{G} [\mu_1, L_1] \hat{\star} \mathcal{GI} [1, M_1] \hat{\star} \mathcal{G} [1, M_2] \hat{\star} \mathcal{GI} [\mu_2, L_2] \\ &= \mathcal{G} [\mu_1, L_1] \hat{\star} \mathcal{G} [1, M_2] \hat{\star} \mathcal{GI} [1, M_1] \hat{\star} \mathcal{GI} [\mu_2, L_2] \end{aligned}$$

cette dernière relation permettant de montrer au passage que la loi de probabilité que suit un rapport de variables suivant chacune une loi de Fisher est identique à la loi de probabilité que suit un rapport de deux variables suivant chacune une loi \mathcal{K} .

Le calcul analytique, mené en annexe A, donne l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{RF} &= \frac{\Gamma(L_1 + M_1) \Gamma(L_2 + M_2) \Gamma(L_1 + L_2) \Gamma(M_1 + M_2)}{\Gamma(L_1) \Gamma(M_1) \Gamma(M_2) \Gamma(L_2) \Gamma(L_1 + L_2 + M_1 + M_2)} \frac{L_1 M_2 \mu_2}{M_1 L_2 \mu_1} \\ &\left(\frac{L_1 M_2 \mu_2}{M_1 L_2 \mu_1} u \right)^{L_1 - 1} {}_2F_1 \left(L_1 + M_1, L_1 + L_2; L_1 + L_2 + M_1 + M_2; 1 - \frac{L_1 M_2 \mu_2}{M_1 L_2 \mu_1} u \right) \end{aligned} \quad (35)$$

qui peut aussi s'écrire, à cause de la commutativité de la convolution de Mellin :

$$\begin{aligned} \mathcal{RF} &= \frac{\Gamma(L_1 + M_1) \Gamma(L_2 + M_2) \Gamma(L_1 + L_2) \Gamma(M_1 + M_2)}{\Gamma(L_1) \Gamma(M_1) \Gamma(M_2) \Gamma(L_2) \Gamma(L_1 + L_2 + M_1 + M_2)} \frac{L_1 M_2 \mu_2}{M_1 L_2 \mu_1} \\ &\left(\frac{L_1 M_2 \mu_2}{M_1 L_2 \mu_1} u \right)^{M_2 - 1} {}_2F_1 \left(L_2 + M_2, M_1 + M_2; L_1 + L_2 + M_1 + M_2; 1 - \frac{L_1 M_2 \mu_2}{M_1 L_2 \mu_1} u \right) \end{aligned} \quad (36)$$

Cette loi à la formulation compliquée possède des moments que l'on peut déduire de la fonction caractéristique de deuxième espèce :

$$\left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^{s-1} \frac{\Gamma(L_1 + s - 1)}{L_1^{s-1} \Gamma(L_1)} \frac{\Gamma(M_1 + 1 - s)}{M_1^{1-s} \Gamma(M_1)} \frac{\Gamma(M_2 + s - 1)}{M_2^{s-1} \Gamma(M_2)} \frac{\Gamma(L_2 + 1 - s)}{L_2^{1-s} \Gamma(L_2)}$$

relation qui est donc la transformée de Mellin de l'équation 36 (et qui pourrait être donc rajoutée aux tables de transformées de Mellin).

Quant aux log-cumulants, ils vérifient la relation suivante, facile à démontrer dès lors que l'on utilise la propriété d'additivité des log-cumulants et tout compte fait assez simple :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_{z(1)} &= \log \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right) + \Psi(L_1) - \log L_1 - \Psi(M_1) + \log M_1 + \Psi(M_2) - \log M_2 - \Psi(L_2) + \log L_2 \\ \tilde{\kappa}_{z(r)} &= \Psi(r - 1, L_1) + (-1)^r \Psi(r - 1, M_1) + \Psi(r - 1, M_2) + (-1)^r \Psi(r - 1, L_2) \quad r > 1 \end{aligned}$$

3.5.2 Cas de deux lois de Fisher identiques

Dans le cas où les lois de Fisher sont identiques et égales à $\mathcal{F}[\mu, L, M]$, l'expression 35 se simplifie sous la forme :

$$\mathcal{R}\mathcal{F}_Z[L, M](u) = \left(\frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \right)^2 \frac{\Gamma(2L)\Gamma(2M)}{\Gamma(2(L+M))} u^{L-1} {}_2F_1(L+M, 2L; 2L+2M; 1-u) \quad (37)$$

et correspond donc à la convolution de Mellin suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\mathcal{F}_Z[L, M](u) &= \mathcal{F}[\mu, L, M] \hat{\star} \mathcal{F}\mathcal{I}[\mu, L, M] \\ &= (\mathcal{G}[\mu=1, L] \hat{\star} \mathcal{G}\mathcal{I}[\mu=1, M]) \hat{\star} (\mathcal{G}[\mu=1, M] \hat{\star} \mathcal{G}\mathcal{I}[\mu=1, L]) \end{aligned} \quad (38)$$

Tout d'abord, remarquons que cette loi est sa propre loi inverse. En effet, 38 peut s'écrire :

$$(\mathcal{G}\mathcal{I}[\mu=1, L] \hat{\star} \mathcal{G}[\mu=1, M]) \hat{\star} (\mathcal{G}\mathcal{I}[\mu=1, M] \hat{\star} \mathcal{G}[\mu=1, L])$$

Il est alors possible d'exprimer le résultat 37 sous trois autres formes :

- en prenant en compte la commutativité de la convolution de Mellin. L'expression 38 peut alors s'écrire

$$(\mathcal{G}[\mu=1, M] \hat{\star} \mathcal{G}\mathcal{I}[\mu=1, L]) \hat{\star} (\mathcal{G}[\mu=1, L] \hat{\star} \mathcal{G}\mathcal{I}[\mu=1, M])$$

ce qui revient à échanger les rôles des paramètres L et M :

$$\mathcal{R}\mathcal{F}_Z[L, M](u) = \left(\frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \right)^2 \frac{\Gamma(2L)\Gamma(2M)}{\Gamma(2(L+M))} u^{M-1} {}_2F_1(L+M, 2M; 2L+2M; 1-u) \quad (39)$$

Ce résultat peut aussi s'obtenir analytiquement en utilisant la propriété tirée du Bateman ([1], p64) :

$${}_2F_1(a, a+m; a+m-l; z) = (1-z)^{-a-l} {}_2F_1(m-l, -l; a+m-l; z)$$

- en constatant que la loi inverse de $\mathcal{R}\mathcal{F}_Z[L, M]$ est la loi $\mathcal{R}\mathcal{F}_Z[L, M]$. En passant par l'inverse (expression 5), l'expression 39 devient alors :

$$\mathcal{R}\mathcal{F}_Z[L, M](u) = \left(\frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \right)^2 \frac{\Gamma(2L)\Gamma(2M)}{\Gamma(2(L+M))} u^{-M-1} {}_2F_1\left(L+M, 2M; 2L+2M; \frac{u-1}{u}\right) \quad (40)$$

qui est la relation obtenue dans [7].

Ce résultat peut aussi s'obtenir analytiquement en utilisant la propriété tirée du Bateman ([1], p64) :

$${}_2F_1(a, b; c; z) = (1-z)^{-a} {}_2F_1\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right)$$

- enfin, en échangeant les rôles de L et M dans cette dernière relation, on peut aussi écrire

$$\mathcal{R}\mathcal{F}_Z[L, M](u) = \left(\frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \right)^2 \frac{\Gamma(2L)\Gamma(2M)}{\Gamma(2(L+M))} u^{-L-1} {}_2F_1\left(L+M, 2L; 2L+2M; \frac{u-1}{u}\right) \quad (41)$$

Si le mode n'a pas apparemment de formulation analytique simple, la médiane est donnée par :

$$m_{\text{mediane}} = 1$$

La fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi $\mathcal{R}\mathcal{F}_Z[L, M]$ s'écrit :

$$\frac{\Gamma(L+s-1)\Gamma(L+1-s)\Gamma(M+s+1)\Gamma(M+1-s)}{(\Gamma(L)\Gamma(M))^2}$$

Les log-cumulants vérifient les relations suivantes, assez faciles à mettre en œuvre :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_z(1) &= 0 \\ \tilde{\kappa}_z(2r) &= 2\Psi(2r-1, L) + 2\Psi(2r-1, M) \\ \tilde{\kappa}_z(2r+1) &= 0\end{aligned}$$

Une illustration du cas du rapport de deux lois de Fisher identiques est donnée figure 3.

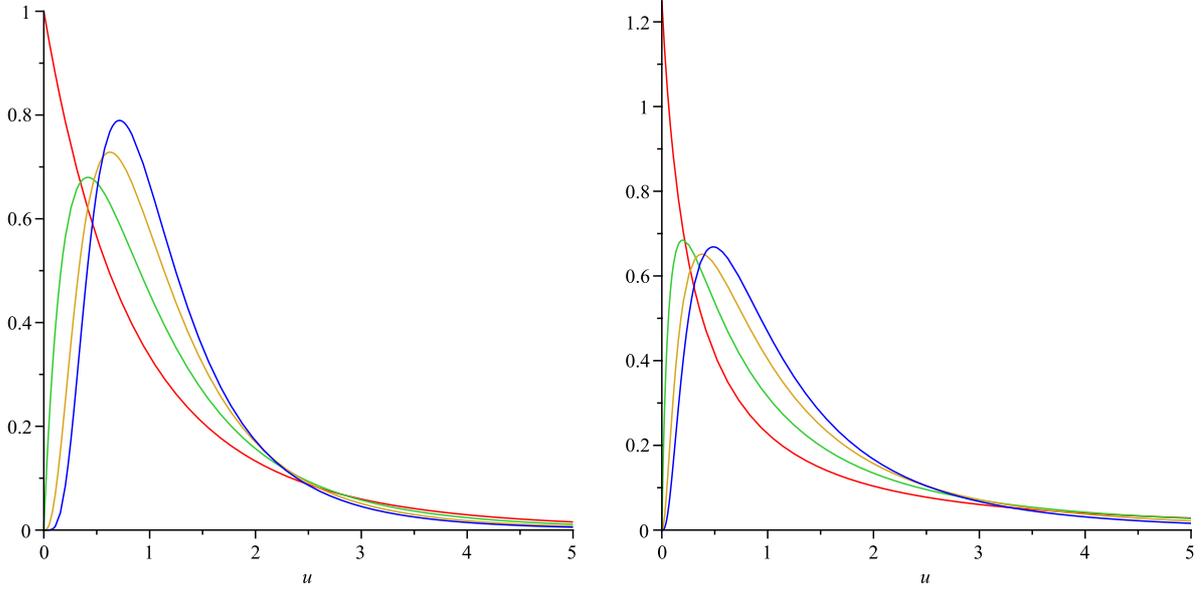


FIG. 3 – Rapport de deux lois de Fisher identiques, représentées à gauche avec $\mu = 1$, $M = 5$ et $L = 1, 2, 4$, et 7 . Le résultat est la loi $\mathcal{RF}_Z[L, M](u)$ (expression 37), pour $M = 5$ et avec $L = 1, 2, 4$, et 7 . On observe que le rapport a une allure “queue lourde” assez marquée.

Dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$, la construction de cette loi est illustrée figure 4.

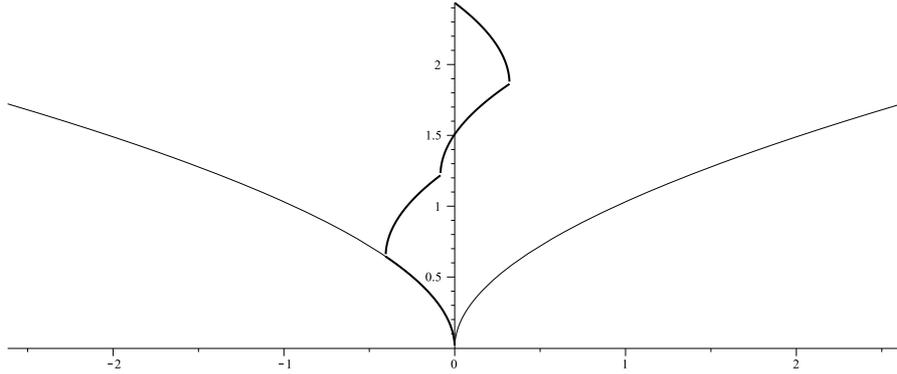


FIG. 4 – Construction de la loi rapport de deux lois de Fisher identiques dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ avec $L = 2$ et $M=2.2$.

3.5.3 Cas “limites”

Le rapport de deux lois de Fisher $\mathcal{RF}[\mu, L_1, M_1, L_2, M_2]$ s’exprime donc par 4 convolutions de Mellin :

$$\mathcal{RF}[\mu, L_1, M_1, L_2, M_2] = \mathcal{G}[\mu_1, L_1] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, M_1] \hat{\star} \mathcal{G}[1, M_2] \hat{\star} \mathcal{GI}[\mu_2, L_2]$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{G} \left[\frac{\mu_1}{\mu_2}, L_1 \right] \hat{\star} \mathcal{G} [1, M_2] \hat{\star} \mathcal{GI} [1, M_1] \hat{\star} \mathcal{GI} [1, L_2] \\
&= \mathcal{G} [1, L_1] \hat{\star} \mathcal{G} \left[\frac{\mu_1}{\mu_2}, M_2 \right] \hat{\star} \mathcal{GI} [1, M_1] \hat{\star} \mathcal{GI} [1, L_2]
\end{aligned}$$

Connaissant le cas limite de la loi Gamma lorsque son paramètre de forme tend vers l'infini (relation 23), et connaissant la loi "U" Q_U à trois paramètres (voir [3]) :

$$\begin{aligned}
Q_U [\mu, L, M, N] (u) &= \mathcal{G} [\mu, L] \hat{\star} \mathcal{G} [1, M] \hat{\star} \mathcal{GI} [1, N] \\
&= \frac{\Gamma(L+N) \Gamma(M+N)}{\Gamma(M) \Gamma(N) \Gamma(L)} \frac{LM}{N\mu} \left(\frac{LMu}{N\mu} \right)^{\frac{L+M-3}{2}} e^{\frac{LMu}{2N\mu}} W_{\frac{-1-L-M-2N}{2}, \frac{L-M}{2}} \left(\frac{LMu}{N\mu} \right)
\end{aligned}$$

(avec W la fonction W de Whittaker) et sa loi inverse Q_{UI} , on peut donc en déduire aisément les cas limites :

$$\begin{aligned}
\lim_{L_1 \rightarrow \infty} \mathcal{RF} [\mu, L_1, M_1, L_2, M_2] &= \mathcal{G} \left[\frac{\mu_1}{\mu_2}, M_2 \right] \hat{\star} \mathcal{GI} [1, M_1] \hat{\star} \mathcal{GI} [1, L_2] \\
&= Q_{UI} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}, L_2, M_1, M_2 \right) (u)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \mathcal{RF} [\mu, L_1, M_1, L_2, M_2] &= \mathcal{G} [\mu_1, L_1] \hat{\star} \mathcal{G} [1, M_2] \hat{\star} \mathcal{GI} [\mu_2, L_2] \\
&= Q_U \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}, L_1, M_2, L_2 \right) (u)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{L_2 \rightarrow \infty} \mathcal{RF} [\mu, L_1, M_1, L_2, M_2] &= \mathcal{G} \left[\frac{\mu_1}{\mu_2}, L_1 \right] \hat{\star} \mathcal{G} [1, M_2] \hat{\star} \mathcal{GI} [1, M_1] \\
&= Q_U \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}, L_1, M_2, M_1 \right) (u)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{M_2 \rightarrow \infty} \mathcal{RF} [\mu, L_1, M_1, L_2, M_2] &= \mathcal{G} \left[\frac{\mu_1}{\mu_2}, L_1 \right] \hat{\star} \mathcal{GI} [1, M_1] \hat{\star} \mathcal{GI} [1, L_2] \\
&= Q_{UI} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}, L_2, M_1, L_1 \right) (u)
\end{aligned}$$

3.6 Rapport de deux lois Beta

3.6.1 Cas général

La loi Beta (plus précisément la loi Beta de première espèce) est parfois utilisée en imagerie RSO. Sa pdf est donnée par l'expression analytique suivante :

$$\mathcal{B} [\mu, L, M] (u) = \frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \left(\frac{Lu}{M\mu} \right)^{L-1} \left(1 - \frac{Lu}{M\mu} \right)^{M-L-1} \quad u \in \left[0; \frac{M\mu}{L} \right]$$

A support borné, elle est donc définie sur $\left[0; \frac{M\mu}{L} \right]$.

Le calcul de la loi rapport de deux lois Beta, assez fastidieux, se trouve en annexe (B).

3.6.2 Cas particulier de deux lois Beta identiques

Dans le cas où les deux lois Beta sont identiques et égales à $\mathcal{B} [\mu, L, M]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{RB}_Z [L, M] (u) &= \frac{\Gamma(2L) (\Gamma(M))^2}{(\Gamma(L))^2 \Gamma(L-M) \Gamma(L+M)} \left(Y (1-u) u^{L-1} {}_2F_1 (2L, L-M+1; L+M; u) \right. \\
&\quad \left. + Y (u-1) u^{-L-1} {}_2F_1 (2L, L-M+1; L+M; u^{-1}) \right) \quad (42)
\end{aligned}$$

$Y(u)$ étant la fonction d'Heaviside.

Une illustration du cas du rapport de deux lois Beta identiques est donnée figure 5.

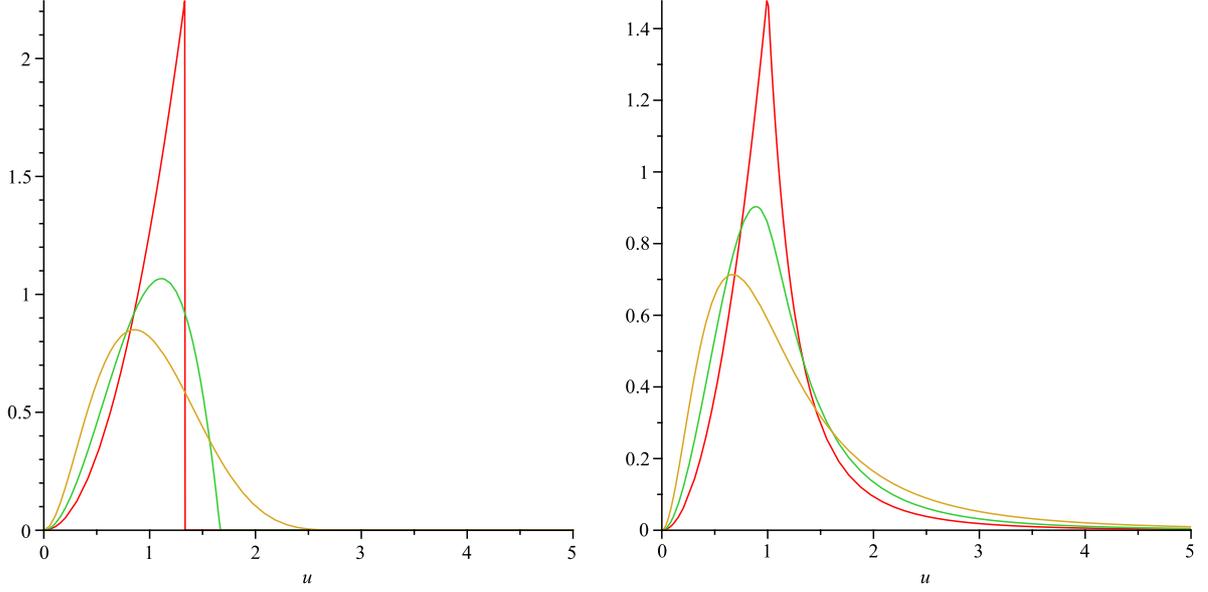


FIG. 5 – Rapport de deux lois Beta identiques, représentées à gauche avec $\mu = 1$, $L = 3$ et $M = 4$ (support $[0, 4/3]$), $M = 5$ (support $[0, 5/3]$) et $M = 9$ (support $[0, 3]$). Le résultat est la loi $\mathcal{RB}_Z[L, M](u)$ (expression 42), représentée à droite pour $L = 3$ et avec $M = 4, 5$ et 9 . On observe là aussi que le rapport a une allure “queue lourde” assez marquée.

4 Cas des données en amplitude

4.1 Introduction

Le passage de données en intensité (souvent utilisées car s’exprimant sous le formalisme des lois Gamma) aux données en amplitude (analytiquement plus compliquées) ne pose aucun problème dès lors que l’on utilise la relation 18 :

$$p_{\mathcal{A}}(u) = 2u p_{\mathcal{I}}(u^2)$$

On pourra aussi effectuer un choix spécifique sur le paramètre μ de la loi en amplitude en choisissant pour la loi en amplitude :

$$\mu = \sqrt{\mu_{\mathcal{I}}}$$

4.2 Rapport de deux lois lognormales

4.2.1 Cas général

La loi lognormale a la propriété d’avoir la même formulation analytique pour les données en amplitude que pour les données en intensité. On a donc :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}}[\mu, \sigma](u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi u}} e^{\left(-\frac{(\log u - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

La forme analytique de la pdf du rapport d’une variable suivant d’une loi lognormale $\mathcal{L}[\mu_1, \sigma_1]$ avec une variable suivant une loi $\mathcal{L}[\mu_2, \sigma_2]$ est alors identique au cas en intensité :

$$\mathcal{L}\left[\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right](u) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\sqrt{2\pi u}} e^{\left(-\frac{(\log u - (\mu_1 - \mu_2))^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right)}$$

4.2.2 Cas de deux lois lognormales identiques

Si les deux lois sont identiques, on obtient la loi $\mathcal{L}_Z[\sigma]$:

$$\mathcal{L}_Z[\sigma](u) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}u} e^{\left(-\frac{(\log u)^2}{4\sigma^2}\right)} \quad u > 0$$

loi identique à sa propre loi inverse et dont la caractéristique est d'avoir un seul log-cumulant non nul : le second.

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 &= 0 \\ \tilde{\kappa}_2 &= 2\sigma^2 \\ \tilde{\kappa}_n &= 0 \quad \forall n \geq 3 \end{cases} \quad (43)$$

Mode et médiane vérifient alors :

$$\begin{aligned} m_{mode} &= 1 \\ m_{mediane} &= 1 \end{aligned}$$

Les illustrations sont identiques à celles effectuées dans le cas des données en intensité (voir la figure 1).

4.2.3 Cas de deux lois lognormales identiques : approximation par une loi de Fisher

Considérons la loi de Fisher (en amplitude) $\mathcal{F}_{AZ}[\tilde{L}]$

$$\mathcal{F}_{AZ}[\tilde{L}, \tilde{L}](x) = 2 \frac{\Gamma(2\tilde{L})}{(\Gamma(\tilde{L}))^2} \frac{x^{2\tilde{L}-1}}{(1+x^2)^{2\tilde{L}}}$$

dont les log-cumulants sont donnés par :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_1 &= 0 \\ \tilde{\kappa}_2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Psi(1, \tilde{L}) \\ \tilde{\kappa}_{2r} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2r} 2\Psi(r-1, \tilde{L}) \quad \forall r \\ \tilde{\kappa}_{2r+1} &= 0 \quad \forall r \end{aligned}$$

En identifiant les second log-cumulants avec ceux de la loi $\mathcal{L}_Z[\sigma]$, on obtient la relation vérifiée par \tilde{L} :

$$\Psi(1, \tilde{L}) = 4\sigma^2 \quad (44)$$

et on peut alors envisager que la loi $\mathcal{F}_{AZ}[\tilde{L}]$ soit une bonne approximation du rapport de deux lois lognormales identiques exprimé par $\mathcal{L}_Z[\sigma]$.

En résolvant numériquement l'équation 44, on obtient le tableau suivant :

\tilde{L}	σ
1	0.641
2	0.402
3	0.314
4	0.266
5	0.235

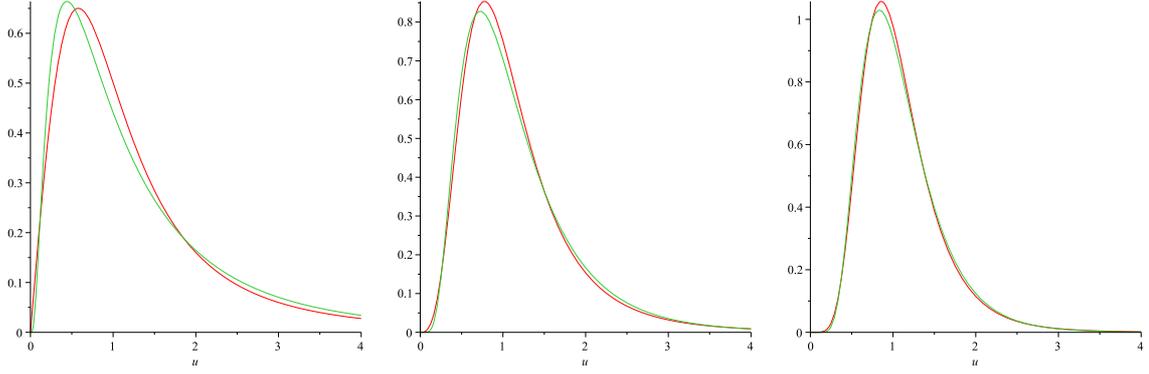


FIG. 6 – Approximation du rapport de deux lois lognormales identiques en amplitude par une loi de Fisher $\mathcal{F}_{A,Z}$: comparaison avec la loi théorique pour $\sigma = 0.64$ ($\tilde{L} = 1$), $\sigma = 0.40$ ($\tilde{L} = 2.01$) et $\sigma = 0.30$ ($\tilde{L} = 3.25$).

4.3 Rapport de deux lois de Nakagami

4.3.1 Cas général

En utilisant simplement la relation 18, et connaissant la relation donnant le rapport de deux lois Gamma (ce qui donne la loi de Fisher, expression 30), on obtient la loi du rapport de deux lois de Nakagami :

$$\mathcal{F}_A \left[\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}, L, M \right] = \frac{2}{\mu} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \sqrt{\frac{L}{M}} \frac{\left(\sqrt{\frac{L}{M}} \frac{u}{\mu} \right)^{2L-1}}{\left(1 + \left(\sqrt{\frac{L}{M}} \frac{u}{\mu} \right)^2 \right)^{L+M}}$$

Si on remplace L par $n_i L$, M par $n_j L$ et $\frac{\mu_2}{\mu_1} = c^2$, on obtient la formule (10) de la référence [6] :

$$2 \frac{\Gamma(n_1 L + n_2 L)}{\Gamma(n_1 L)\Gamma(n_2 L)} n_1^{n_1 L n_1} n_2^{n_2 L n_2} c^{2n_2 L} \frac{u^{2n_1 L - 1}}{(n_2 c^2 + n_1 u^2)^{L(n_1 + n_2)}}$$

4.3.2 Cas de deux lois de Nakagami identiques

Si les deux lois sont identiques, on obtient alors comme loi du rapport la loi $\mathcal{F}_{AZ} [L]$:

$$\mathcal{F}_{AZ} [L] = 2 \frac{\Gamma(2L)}{(\Gamma(L))^2} \frac{u^{2L-1}}{(1+u^2)^{2L}} \quad (45)$$

On peut remarquer que cette loi est sa propre loi inverse. Dans ce cas (voir le paragraphe 1.2.2) on connaît la valeur de sa médiane :

$$m_{\text{mediane}} = 1$$

Le mode de la loi $\mathcal{F}_{AZ} [L]$ est en

$$m_{\text{mode}} = \sqrt{\frac{2L-1}{2L+1}}$$

que l'on peut comparer au mode d'une loi de Rayleigh Nakagami :

$$m_{\text{modeRN}} = \sqrt{\frac{2L-1}{2L}} \mu$$

On peut donc noter qu'en prenant $\mu = 1$ dans cette dernière équation, on observe un décalage du mode vers la valeur zéro d'autant plus marqué que L est petit.

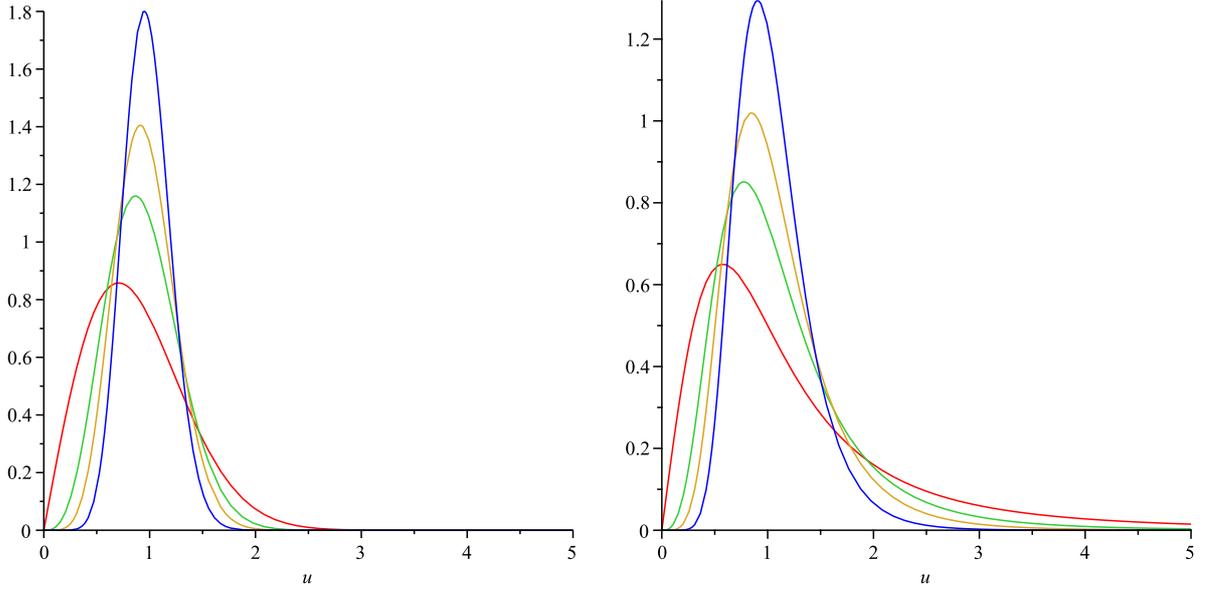


FIG. 7 – Rapport de deux lois de Rayleigh-Nakagami en amplitude identiques, représentées à gauche avec $\mu = 1$ et $L = 1, 2, 3,$ et 5 . Le résultat est la loi $\mathcal{F}_{AZ}[L](u)$ (expression 45), avec $L = 1, 2, 3,$ et 5 .

Mode					
	L=1	L=2	L=3	L=4	L=5
Rapport de lois de Rayleigh-Nakagami identiques	0.58	0.77	0.85	0.88	0.90
Loi de Rayleigh-Nakagami	0.71	0.87	0.91	0.94	0.95

ce que l'on observe d'ailleurs sur la figure 7.

4.4 Rapport de deux lois de Fisher

4.4.1 Cas général

En utilisant simplement la relation 18, la loi du rapport de deux lois de Fisher en amplitude s'écrit :

$$\mathcal{R}\mathcal{F}_A = 2 \frac{\Gamma(L_1 + M_1) \Gamma(L_2 + M_2)}{\Gamma(L_1) \Gamma(M_1) \Gamma(M_2) \Gamma(L_2)} \frac{\Gamma(L_1 + L_2) \Gamma(M_1 + M_2)}{\Gamma(L_1 + L_2 + M_1 + M_2)} \sqrt{\frac{L_1 M_2 \mu'_2}{M_1 L_2 \mu'_1}} \left(\sqrt{\frac{L_1 M_2 \mu'_2}{M_1 L_2 \mu'_1}} u \right)^{2L_1 - 1} {}_2F_1 \left(L_1 + M_1, L_1 + L_2; L_1 + L_2 + M_1 + M_2; 1 - \frac{L_1 M_2 \mu'_2}{M_1 L_2 \mu'_1} u^2 \right)$$

Bien entendu, comme pour le cas de la loi en intensité, la loi du rapport $\mathcal{R}\mathcal{F}_A$ a la même forme analytique que sa loi inverse.

4.4.2 Cas de deux lois de Fisher identiques

Si les deux lois sont identiques, on obtient alors quatre expressions possibles :

– à partir de la relation 37 :

$$\mathcal{R}\mathcal{F}_{AZ}[L, M](u) = \left(\frac{\Gamma(L + M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \right)^2 \frac{\Gamma(2L)\Gamma(2M)}{\Gamma(2(L + M))} u^{2L-1} {}_2F_1 \left(L + M, 2L; 2L + 2M; 1 - u^2 \right)$$

– à partir de la relation 39 :

$$\mathcal{R}\mathcal{F}_{AZ}[L, M](u) = \left(\frac{\Gamma(L + M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \right)^2 \frac{\Gamma(2L)\Gamma(2M)}{\Gamma(2(L + M))} u^{2M-1} {}_2F_1 \left(L + M, 2M; 2L + 2M; 1 - u^2 \right)$$

– à partir de la relation 40 :

$$\mathcal{RF}_{AZ}[L, M](u) = \left(\frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \right)^2 \frac{\Gamma(2L)\Gamma(2M)}{\Gamma(2(L+M))} u^{-2M-1} {}_2F_1 \left(L+M, 2M; 2L+2M; \frac{u^2-1}{u^2} \right)$$

– à partir de la relation 37 :

$$\mathcal{RF}_{AZ}[L, M](u) = \left(\frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \right)^2 \frac{\Gamma(2L)\Gamma(2M)}{\Gamma(2(L+M))} u^{-2L-1} {}_2F_1 \left(L+M, 2L; 2L+2M; \frac{u^2-1}{u^2} \right)$$

Les log-cumulants d'écrivent :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_1 &= 0 \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{1}{2} (\Psi(1, L) + \Psi(1, M)) \\ \tilde{\kappa}_{2r} &= \left(\frac{1}{2} \right)^{2r-1} (\Psi(r-1, L) + \Psi(r-1, M)) \quad \forall r \\ \tilde{\kappa}_{2r+1} &= 0 \quad \forall r \end{aligned}$$

Comme cette loi est sa propre loi inverse, on en connaît donc la médiane :

$$m_{\text{mediane}} = 1$$

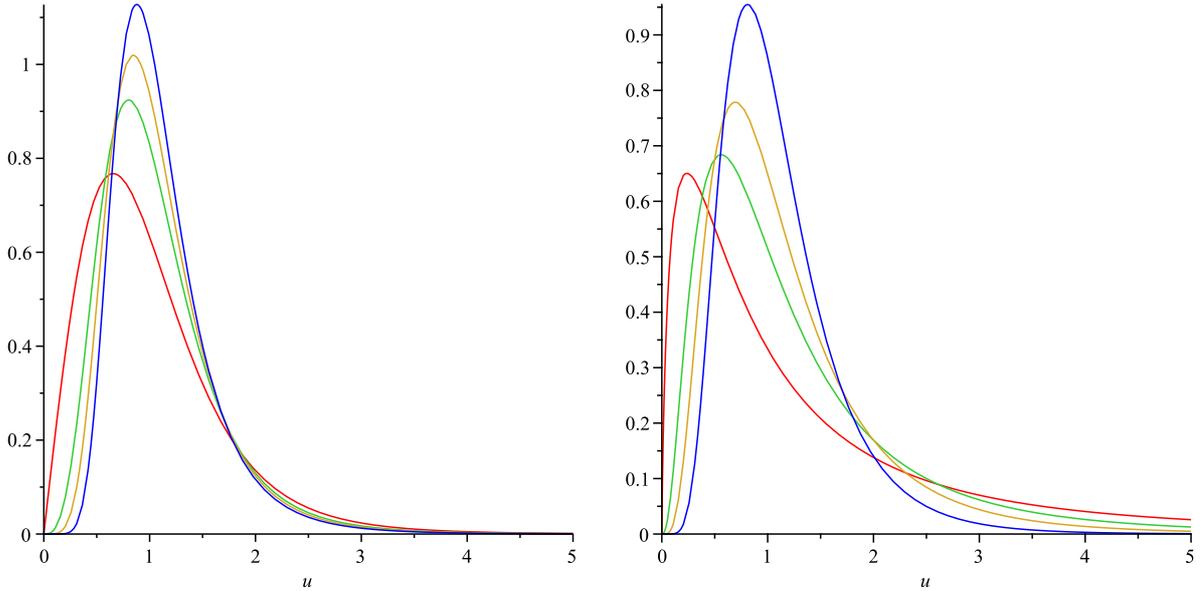


FIG. 8 – Rapport de deux lois de Fisher en amplitude identiques, représentées à gauche avec $\mu = 1$, $M = 3$ et $L = 1, 2, 3$, et 5 . Le résultat est la loi $\mathcal{RF}_{AZ}[L, M](u)$ (expression 4.4.2), pour $M = 5$ et avec $L = 1, 2, 3$, et 5 .

Sur la figure 8, on peut être frappé par les allures obtenues par la loi rapport. En effet, le mode est décalé vers la gauche par rapport à la loi de Fisher initiale dont le mode d'écrit :

$$m_{\text{mode}} = \sqrt{\frac{(2L-1)M}{L(2M+1)}}$$

Comme l'expression analytique du mode de la ddp du rapport ne semble pas avoir d'expression explicite, il faut passer par des résolutions numériques. Maple permet donc facilement de construire le tableau suivant, dans lequel le terme entre parenthèse correspond au mode de la loi de Fisher initiale :

Mode					
	M=1	M=2	M=3	M=4	M=5
L=1	0,24 (0.58)	0,39 (0.63)	0,45 (0.65)	0,48 (0.67)	0,50 (0.67)
L=2	0.39 (0.70)	0.56 (0.77)	0.63 (0.80)	0.66 (0.82)	0.68 (0.82)
L=3	0.44 (0.75)	0.63 (0.82)	0.69 (0.85)	0.73 (0.86)	0.75 (0.87)
L=4	0.48 (0.76)	0.66 (0.84)	0.73 (0.87)	0.77 (0.88)	0.79 (0.89)
L=5	0.50 (0.77)	0.68 (0.85)	0.75 (0.88)	0.79 (0.89)	0.81 (0.90)

4.4.3 Cas de deux lois de Fisher identiques : approximation

Puisque la loi $\mathcal{RF}_{AZ}[L, M](u)$ possède ses log-cumulants impairs nuls, on peut envisager de l'approcher par une loi ayant aussi ses log-cumulants impairs nuls. Parmi les lois que nous avons déjà rencontrées, on peut choisir la loi de Fisher (en amplitude) \mathcal{F}_{AZ}

$$\mathcal{F}_{AZ}[\tilde{L}](u) = 2 \frac{\Gamma(2\tilde{L})}{(\Gamma(\tilde{L}))^2} \frac{u^{2\tilde{L}-1}}{(1+u^2)^{2\tilde{L}}}.$$

dont les log-cumulants sont donnés par :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_1 &= 0 \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{1}{2}\Psi(1, \tilde{L}) \\ \tilde{\kappa}_{2r} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2r} 2\Psi(r-1, \tilde{L}) \quad \forall r \\ \tilde{\kappa}_{2r+1} &= 0 \quad \forall r \end{aligned}$$

En identifiant les second log-cumulants, on obtient la relation vérifié par \tilde{L} :

$$\Psi(1, \tilde{L}) = \Psi(1, L) + \Psi(1, M)$$

On a bien évidemment $\tilde{L} \leq L$.

\tilde{L} tel que $\mathcal{F}_{AZ}[\tilde{L}] \simeq \mathcal{RF}_{AZ}[L, M]$					
L	M=1	M=2	M=3	M=4	M=5
1	0.638	0.802	0.865	0.898	0.918
2	0.802	1.185	1.386	1.507	1.589
3	0.865	1.386	1.706	1.920	2.074
4	0.898	1.507	1.920	2.216	2.439
5	0.918	1.589	2.074	2.439	2.723

5 La loi \mathcal{F}_{AZ} : une approximation universelle pour les rapports d'image ?

A travers ce paragraphe, nous en arrivons à la conclusion que la loi vérifiée par une variable aléatoire rapport de deux lois identiques (deux Log-normales identiques, deux Rayleigh-Nakagami identiques ou deux Fisher identiques) peuvent être raisonnablement approximées par

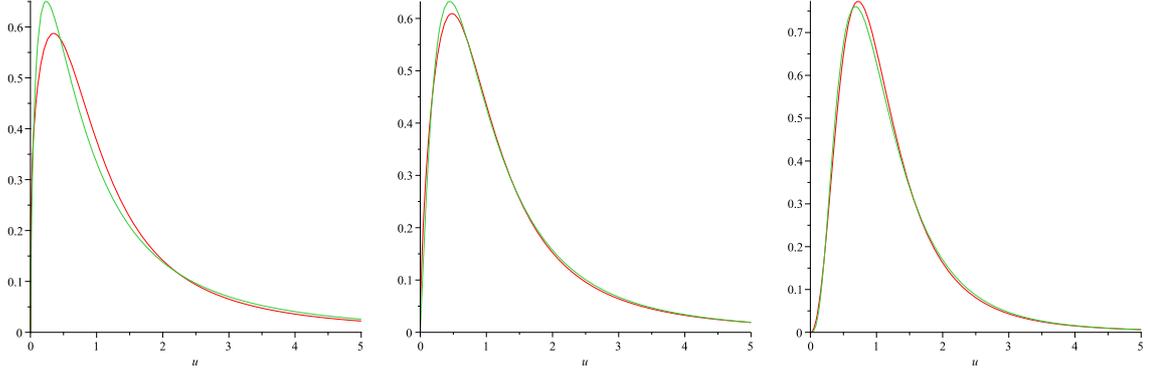


FIG. 9 – Approximation du rapport de deux lois de Fisher identiques en amplitude par la loi \mathcal{F}_{AZ} : comparaison avec la loi théorique pour $(L=1, M=1)$, $(L=1, M=3)$ et $(L=2, M=5)$,

la loi $\mathcal{F}_{AZ} [\tilde{L}]$:

$$\mathcal{F}_{AZ} [\tilde{L}, \tilde{L}] (x) = 2 \frac{\Gamma(2\tilde{L})}{(\Gamma(\tilde{L}))^2} \frac{x^{2\tilde{L}-1}}{(1+x^2)^{2\tilde{L}}}.$$

Rappelons que ses log-cumulants sont donnés par :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_1 &= 0 \\ \tilde{\kappa}_2 &= \left(\frac{1}{2}\right) \Psi(1, \tilde{L}) \\ \tilde{\kappa}_{2r} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2r} \Psi(r-1, \tilde{L}) \quad \forall r \\ \tilde{\kappa}_{2r+1} &= 0 \quad \forall r \end{aligned}$$

et que son mode est donné par la relation

$$m_{mode} = \sqrt{\frac{2\tilde{L}-1}{2\tilde{L}+1}}$$

Ses deux premiers moments s'expriment comme :

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{\Gamma(\tilde{L} - \frac{1}{2}) \Gamma(\tilde{L} + \frac{1}{2})}{(\Gamma(\tilde{L}))^2} \mu \\ m_2 &= \frac{\tilde{L}}{\tilde{L}-1} \mu^2 \end{aligned}$$

Les valeurs numériques suivantes sont instructives car elles illustrent une loi fortement à queue lourde :

\tilde{L}	m_{mode}	m_1	écart type	$\tilde{\kappa}_1$
1	0.577	1.571	∞	0.822
2	0.775	1.178	0.782	0.322
3	0.846	1.104	0.529	0.197
5	0.905	1.057	0.364	0.111
10	0.951	1.027	0.239	0.053

Le paramètre \tilde{L} est relié aux paramètres de ces lois :

– σ pour les log-normales :

$$\Psi(1, \tilde{L}) = 4\sigma^2$$

- L pour les Rayleigh-Nakagami :

$$\tilde{L} = L$$

- L, M pour les Fisher.

$$\Psi(1, \tilde{L}) = \Psi(1, L) + \Psi(1, M)$$

Mais, en pratique, il suffit d'en avoir une estimation qui peut se fonder simplement sur l'estimation du second log-cumulant $\tilde{\kappa}_2$. \tilde{L} vérifie alors tout simplement la relation :

$$\Psi(1, \tilde{L}) = 2\hat{\kappa}_2$$

On peut donc envisager de prendre cette loi et cette méthode d'estimation pour aborder tous les cas de rapports de pixels, le chatoiement étant pleinement développé ou non.

On pourrait néanmoins se demander si la loi log-normale ne pourrait être une bonne approximation aussi, d'autant que tous ses log moments d'ordre supérieur ou égal à 3 sont nuls. La figure 10 permet de comparer l'approximation par une loi log-normale et l'approximation par la loi \mathcal{F}_{AZ} ⁵. Dans la mesure où les zones homogènes sur une image cohérente suivent une loi de Nakagami, il semble raisonnable de privilégier l'approximation donnant le meilleur résultat dans ce cas. Donc, dans le cadre de l'imagerie cohérente, \mathcal{F}_{AZ} pourrait jouer un rôle majeur dès lors que l'on cherche une approximation facile à mettre en œuvre pour modéliser la loi d'une image "rapport".

⁵ ceci en l'absence de grandeur quantifiable, comme la distance de Kullback qui requiert des calculs analytiques complexes et qui fera l'objet d'une note ultérieure.

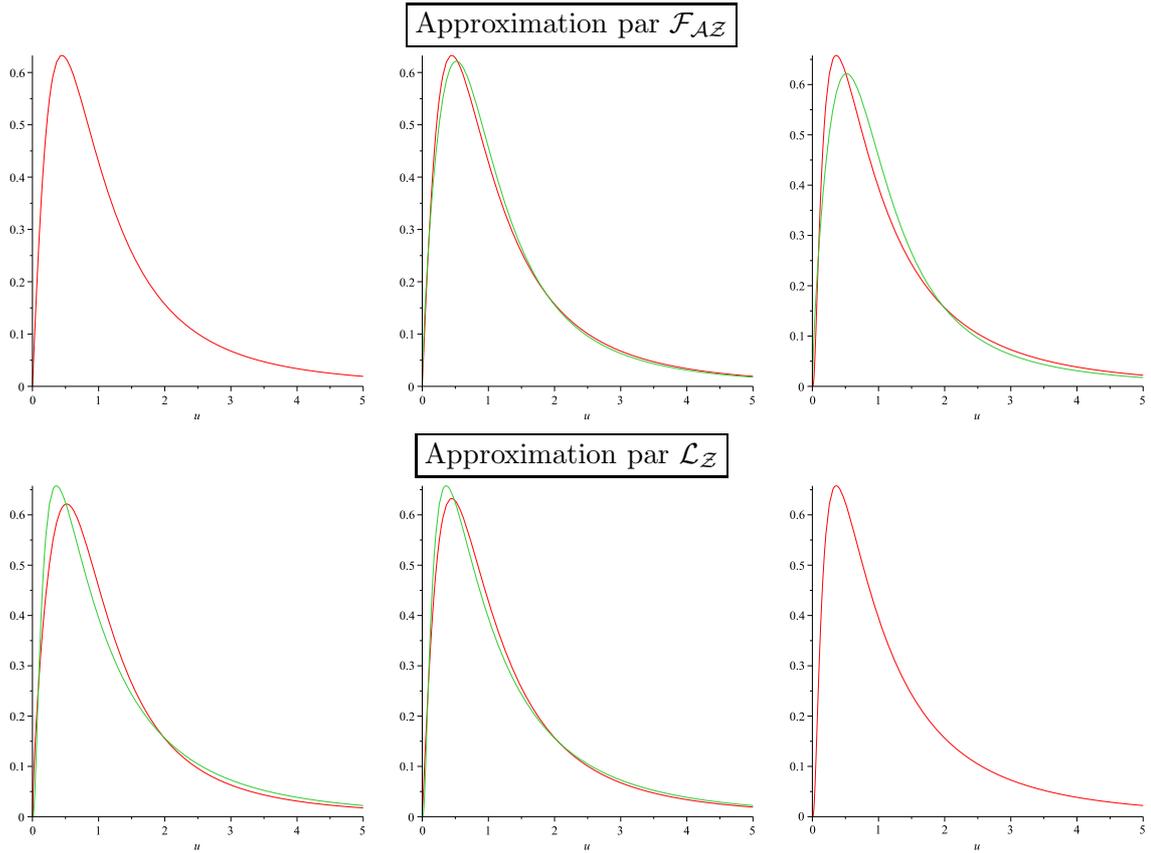


FIG. 10 – Ligne supérieure : approximation du rapport de deux lois par la loi de Fisher \mathcal{F}_{AZ} . De gauche à droite : cas du rapport de deux lois de Nakagami ($L = 0.865$), rapport de deux lois de Fisher ($L = 1, M = 3$), rapport de deux lois lognormales ($\sigma=0.714$). La loi de Fisher \mathcal{F}_{AZ} est définie avec $\tilde{L} = 0.865$. Ligne inférieure : approximation du rapport de deux lois par la loi lognormale \mathcal{L}_Z . De gauche à droite : cas du rapport de deux lois de Nakagami ($L = 0.865$), rapport de deux lois de Fisher ($L = 1, M = 3$), rapport de deux lois lognormales ($\sigma=0.714$).

A Lois d'un rapport de deux lois de Fisher

Considérons donc le rapport de deux lois de Fisher : $\mathcal{F} [\mu_1, L_1, M_1]$ et $\mathcal{F} [\mu_2, L_2, M_2]$. Notons tout de suite que la loi inverse de $\mathcal{F} [\mu_2, L_2, M_2]$ est la loi $\mathcal{F} \left[\frac{1}{\mu_2}, M_2, L_2 \right]$.

La loi résultante $\mathcal{RF} [\mu, L_1, M_1, L_2, M_2]$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{RF} [\mu, L_1, M_1, L_2, M_2] &= \mathcal{F} [\mu_1, L_1, M_1] \hat{\star} \mathcal{F} \left[\frac{1}{\mu_2}, M_2, L_2 \right] \\ &= \mathcal{G} [\mu_1, L_1] \hat{\star} \mathcal{GI} [1, M_1] \hat{\star} \mathcal{G} [1, M_2] \hat{\star} \mathcal{GI} [\mu_2, L_2] \\ &= \mathcal{G} [\mu_1, L_1] \hat{\star} \mathcal{G} [1, M_2] \hat{\star} \mathcal{GI} [1, M_1] \hat{\star} \mathcal{GI} [\mu_2, L_2] \end{aligned}$$

cette dernière relation permettant de montrer au passage que la loi de probabilité que suit un rapport de variables suivant chacune une loi de Fisher est identique à la loi de probabilité que suit un rapport de deux variables suivant chacune une loi \mathcal{K} .

On en déduit directement la fonction caractéristique de deuxième espèce :

$$\mu_1^{s-1} \frac{\Gamma(L_1 + s - 1)}{L_1^{s-1} \Gamma(L_1)} \frac{\Gamma(M_1 + 1 - s)}{M_1^{1-s} \Gamma(M_1)} \mu_2^{1-s} \frac{\Gamma(M_2 + s - 1)}{M_2^{s-1} \Gamma(M_2)} \frac{\Gamma(L_2 + 1 - s)}{L_2^{1-s} \Gamma(L_2)} \quad (46)$$

Malheureusement, les tables de transformées de Mellin sont muettes sur ce cas.

Il faut donc exprimer analytiquement la convolution de Mellin de ces deux lois de Fisher. Plutôt que de prendre la formulation classique de la convolution de Mellin (expression 13), on suivra la piste proposée dans [7] qui utilise la variante 16, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{RF} [\mu, L_1, M_1, L_2, M_2] &= \mathcal{F} [\mu_1, L_1, M_1] \hat{\star} \mathcal{F} \left[\frac{1}{\mu_2}, M_2, L_2 \right] \\ &= \int_0^\infty \mathcal{F} [\mu_1, L_1, M_1] (ux) \mathcal{F} [\mu_2, L_2, M_2] (x) x dx \\ &= \int_0^\infty \frac{L_1}{M_1 \mu_1} \frac{\Gamma(L_1 + M_1)}{\Gamma(L_1) \Gamma(M_1)} \frac{\left(\frac{L_1 x u}{M_1 \mu_1} \right)^{L_1 - 1}}{\left(1 + \frac{L_1 x u}{M_1 \mu_1} \right)^{L_1 + M_1}} \frac{L_2}{M_2 \mu_2} \frac{\Gamma(L_2 + M_2)}{\Gamma(L_2) \Gamma(M_2)} \frac{\left(\frac{L_2 x}{M_2 \mu_2} \right)^{L_2 - 1}}{\left(1 + \frac{L_2 x}{M_2 \mu_2} \right)^{L_2 + M_2}} x dx \\ &= \frac{\Gamma(L_1 + M_1) \Gamma(L_2 + M_2)}{\Gamma(L_1) \Gamma(M_1) \Gamma(M_2) \Gamma(L_2)} \frac{L_1 M_2 \mu_2}{M_1 L_2 \mu_1} \int_0^\infty \frac{\left(\frac{L_1 x u}{M_1 \mu_1} \right)^{L_1 - 1}}{\left(1 + \frac{L_1 x u}{M_1 \mu_1} \right)^{L_1 + M_1}} \frac{\left(\frac{L_2 x}{M_2 \mu_2} \right)^{L_2}}{\left(1 + \frac{L_2 x}{M_2 \mu_2} \right)^{L_2 + M_2}} \frac{L_2 dx}{M_2 \mu_2} \end{aligned}$$

En posant $\beta = \frac{L_2 x}{M_2 \mu_2}$, cette équation devient :

$$\mathcal{RF} = \frac{\Gamma(L_1 + M_1) \Gamma(L_2 + M_2)}{\Gamma(L_1) \Gamma(M_1) \Gamma(M_2) \Gamma(L_2)} \left(\frac{L_1 M_2 \mu_2}{M_1 L_2 \mu_1} \right)^{L_1} u^{L_1 - 1} \int_0^\infty \frac{\beta^{L_1 - 1}}{\left(1 + \frac{L_1 M_2 \mu_2 u \beta}{M_1 L_2 \mu_1} \right)^{L_1 + M_1}} \frac{\beta^{L_2}}{(1 + \beta)^{L_2 + M_2}} d\beta$$

en en posant $\eta = \frac{L_1 M_2 \mu_2 u}{M_1 L_2 \mu_1}$, on obtient pour finir :

$$\mathcal{RF} = \frac{\Gamma(L_1 + M_1) \Gamma(L_2 + M_2)}{\Gamma(L_1) \Gamma(M_1) \Gamma(M_2) \Gamma(L_2)} \left(\frac{L_1 M_2 \mu_2}{M_1 L_2 \mu_1} \right)^{L_1} u^{L_1 - 1} \int_0^\infty \beta^{L_1 + L_2 - 1} (1 + \eta \beta)^{-(L_1 + M_1)} (1 + \beta)^{-(L_2 + M_2)} d\beta$$

Considérons l'intégrale J :

$$J = \int_0^\infty \beta^{L_1 + M_2 - 1} (1 + \eta \beta)^{-(L_1 + M_1)} (1 + \beta)^{-(L_2 + M_2)} d\beta$$

On trouve dans le Bateman ([1], p115) la relation suivante :

$${}_2F_1(a, b; c; 1 - z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b) \Gamma(c - b)} \int_0^\infty s^{b-1} (1 + sz)^{-a} (1 + s)^{a-c} ds$$

Une simple identification donne :

$$\begin{aligned} b &= L_1 + L_2 \\ a &= L_1 + M_1 \\ c &= L_1 + L_2 + M_1 + M_2 \\ z &= \frac{L_1 M_2 \mu_2}{M_1 L_2 \mu_1} u \end{aligned}$$

J s'écrit :

$$J = {}_2F_1 \left(L_1 + M_1, L_1 + L_2; L_1 + L_2 + M_1 + M_2; 1 - \frac{L_1 M_2 \mu_2}{M_1 L_2 \mu_1} u \right)$$

Ce qui donne pour finir la loi du rapport de deux lois de Fisher :

$$\begin{aligned} \mathcal{RF} &= \frac{\Gamma(L_1 + M_1) \Gamma(L_2 + M_2)}{\Gamma(L_1) \Gamma(M_1) \Gamma(M_2) \Gamma(L_2)} \frac{\Gamma(L_1 + L_2) \Gamma(M_1 + M_2)}{\Gamma(L_1 + L_2 + M_1 + M_2)} \frac{L_1 M_2 \mu_2}{M_1 L_2 \mu_1} \\ &\left(\frac{L_1 M_2 \mu_2}{M_1 L_2 \mu_1} u \right)^{L_1 - 1} {}_2F_1 \left(L_1 + M_1, L_1 + L_2; L_1 + L_2 + M_1 + M_2; 1 - \frac{L_1 M_2 \mu_2}{M_1 L_2 \mu_1} u \right) \end{aligned}$$

B Lois d'un rapport de deux lois Beta

La loi Beta (plus précisément la loi Beta de première espèce) est donnée par l'expression analytique suivante :

$$\mathcal{B}[\mu, L, M](u) = \frac{L}{M \mu} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L) \Gamma(M - L)} \left(\frac{Lu}{M \mu} \right)^{L-1} \left(1 - \frac{Lu}{M \mu} \right)^{M-L-1} \quad u \in \left[0; \frac{M\mu}{L} \right]$$

et sa fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit :

$$\phi_x(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L + s - 1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \frac{M^{s-1} \Gamma(M)}{\Gamma(M + s - 1)}.$$

La loi Beta inverse est donnée par l'expression analytique suivante :

$$\mathcal{BI}[\mu, L, M](u) = \frac{M}{L\mu} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L) \Gamma(M - L)} \frac{\left(\frac{Mu}{L\mu} - 1 \right)^{M-L-1}}{\left(\frac{Mu}{L\mu} \right)^M} \quad u \geq \frac{L\mu}{M}, \quad M \geq L.$$

et sa fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit :

$$\phi_x(s) = \mu^{1-s} \frac{\Gamma(L + 1 - s)}{L^{1-s} \Gamma(L)} \frac{M^{1-s} \Gamma(M)}{\Gamma(M + 1 - s)}.$$

La loi $\mathcal{RB}[\mu, L_1, M_1, L_2, M_2]$ que suit rapport de deux variables suivant deux lois Beta $\mathcal{B}[\mu_1, L_1, M_1]$ et $\mathcal{B}[\mu_2, L_2, M_2]$ peut se définir comme la convolution de Mellin de la première loi avec l'inverse de la seconde. Celle-ci s'exprime plus facilement par les produits les fonctions caractéristiques de deuxième espèce :

$$\mu_1^{s-1} \frac{\Gamma(L_1 + s - 1)}{L_1^{s-1} \Gamma(L_1)} \frac{M_1^{s-1} \Gamma(M_1)}{\Gamma(M_1 + s - 1)} \mu_2^{1-s} \frac{\Gamma(L_2 + 1 - s)}{L_2^{1-s} \Gamma(L_2)} \frac{M_2^{1-s} \Gamma(M_2)}{\Gamma(M_2 + 1 - s)} \quad (47)$$

Comme dans le cas de la loi de Fisher, il s'avère que les tables de transformées de Mellin sont muettes sur ce cas.

Il faut donc appliquer la même démarche que dans le cas de la loi de Fisher, et plus précisément la formule 16 (plutôt que l'expression via la convolution de Mellin et la loi inverse). En posant :

$$A = \frac{L_1}{M_1 \mu_1} \frac{\Gamma(M_1)}{\Gamma(L_1)\Gamma(M_1 - L_1)} \frac{L_2}{M_2 \mu_2} \frac{\Gamma(M_2)}{\Gamma(L_2)\Gamma(M_2 - L_2)}$$

on a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{RB}[\mu, L_1, M_1, L_2, M_2](u) &= \int_0^B \mathcal{B}[\mu_1, L_1, M_1](ux) \mathcal{B}[\mu_2, L_2, M_2](x) x dx \\ &= A \int_0^B x dx \left(\frac{L_1 ux}{M_1 \mu_1}\right)^{L_1-1} \left(1 - \frac{L_1 ux}{M_1 \mu_1}\right)^{M_1-L_1-1} \left(\frac{L_2 x}{M_2 \mu_2}\right)^{L_2-1} \left(1 - \frac{L_2 x}{M_2 \mu_2}\right)^{M_2-L_2-1} \end{aligned} \quad (48)$$

la borne B prenant en compte les intervalles de définition des deux lois Beta :

– pour la première loi, on doit avoir

$$\frac{L_1 ux}{M_1 \mu_1} \leq 1$$

ce qui revient à définir la condition sur x :

$$x \leq \frac{M_1 \mu_1}{L_1 u}$$

– pour la seconde loi, on doit avoir :

$$\frac{L_2 x}{M_2 \mu_2}$$

ce qui revient à définir la condition sur x :

$$x \leq \frac{M_2 \mu_2}{L_2}$$

Considérons le cas où $u > \frac{L_2 M_1 \mu_1}{L_1 M_2 \mu_2}$. La première condition s'écrit alors :

$$x \leq \frac{M_2 \mu_2}{L_2}$$

c'est à dire de manière identique à la seconde condition. La borne d'intégration sur x est alors :

$$B = \frac{M_2 \mu_2}{L_2}$$

En revanche, si $u < \frac{L_2 M_1 \mu_1}{L_1 M_2 \mu_2}$, la borne B est déterminée par la première condition, ce qui donne :

$$B = \frac{M_1 \mu_1}{L_1 u}$$

Cas : $u > \frac{L_2 M_1 \mu_1}{L_1 M_2 \mu_2}$

Dans ce cas, on a $B = \frac{M_2 \mu_2}{L_2}$. En posant $\beta = \frac{L_2 x}{M_2 \mu_2}$, et

$$A' = \frac{L_1}{M_1 \mu_1} \frac{\Gamma(M_1)}{\Gamma(L_1)\Gamma(M_1 - L_1)} \frac{M_2 \mu_2}{L_2} \frac{\Gamma(M_2)}{\Gamma(L_2)\Gamma(M_2 - L_2)}$$

cette équation devient :

$$\mathcal{RB} = A' \int_0^1 \left(\frac{L_1 M_2 \mu_2}{L_2 M_1 \mu_1} \beta u\right)^{L_1-1} \left(1 - \frac{L_1 M_2 \mu_2}{L_2 M_1 \mu_1} \beta u\right)^{M_1-L_1-1} \beta^{L_2-1} (1 - \beta)^{M_2-L_2-1} \beta d\beta$$

En posant pour finir $\eta = \frac{L_1 M_2 \mu_2}{L_2 M_1 \mu_1} u$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{RB} &= A' \int_0^1 (\eta\beta)^{L_1-1} (1-\eta\beta)^{M_1-L_1-1} \beta^{L_2-1} (1-\beta)^{M_2-L_2-1} \beta d\beta \\ &= A' \eta^{L_1-1} \int_0^1 \beta^{L_1+L_2-1} (1-\eta\beta)^{M_1-L_1-1} (1-\beta)^{M_2-L_2-1} d\beta\end{aligned}$$

Toujours dans le Bateman [1], on trouve la relation suivante :

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 s^{b-1} (1-sz)^{-a} (1-s)^{c-b-1} ds$$

Une simple identification donne :

$$\begin{aligned}b &= L_1 + L_2 \\ a &= L_1 - M_1 + 1 \\ c &= L_1 + M_2 \\ z &= \frac{L_1 M_2 \mu_2}{M_1 L_2 \mu_1} u\end{aligned}$$

Ceci permet finalement d'écrire, pour $u \geq \frac{L_2 M_1 \mu_1}{L_1 M_2 \mu_2}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{RB}(u) &= \frac{\Gamma(M_1)\Gamma(M_2)}{\Gamma(L_1)\Gamma(M_1-L_1)\Gamma(L_2)} \frac{\Gamma(L_1+L_2)}{\Gamma(L_1+M_2)} \left(\frac{L_1 M_2 \mu_2}{L_2 M_1 \mu_1}\right)^{L_1} \\ &\quad u^{L_1-1} {}_2F_1\left(L_1 - M_1 + 1, L_1 + L_2; L_1 + M_2; \frac{L_1 M_2 \mu_2}{M_1 L_2 \mu_1} u\right)\end{aligned}$$

Cas : $u < \frac{L_2 M_1 \mu_1}{L_1 M_2 \mu_2}$

Dans ce cas, on a $B = \frac{M_1 \mu_1}{L_1 u}$. En posant $x' = \frac{L_1 u x}{M_1 \mu_1}$, l'équation 48 devient :

$$\mathcal{RB} = A \left(\frac{M_1 \mu_1}{L_1 u}\right)^2 \int_0^1 (x')^{L_1-1} (1-x')^{M_1-L_1-1} \left(\frac{L_2 M_1 \mu_1 x'}{L_1 M_2 \mu_2 u}\right)^{L_2-1} \left(1 - \frac{L_2 M_1 \mu_1 x'}{L_1 M_2 \mu_2 u}\right)^{M_2-L_2-1} x' dx' \quad (49)$$

En posant $\eta' = \frac{L_2 M_1 \mu_1}{L_1 M_2 \mu_2} \frac{1}{u}$, et A''

$$A'' = \frac{M_1 \mu_1}{L_1} \frac{\Gamma(M_1)}{\Gamma(L_1)\Gamma(M_1-L_1)} \frac{L_2}{M_2 \mu_2} \frac{\Gamma(M_2)}{\Gamma(L_2)\Gamma(M_2-L_2)}$$

on obtient :

$$\mathcal{RB} = A'' (\eta')^{L_2-1} \int_0^1 (x')^{L_1+L_2-1} (1-x')^{M_1-L_1-1} (1-\eta'x')^{M_2-L_2-1} dx' \quad (50)$$

En utilisant toujours la même relation du Bateman [1] :

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 s^{b-1} (1-s)^{c-b-1} (1-sz)^{-a} ds$$

on effectue une simple identification :

$$\begin{aligned}b &= L_1 + L_2 \\ a &= L_2 - M_2 + 1 \\ c &= L_2 + M_1 \\ z &= \frac{L_2 M_1 \mu_1}{M_2 L_1 \mu_2} \frac{1}{u}\end{aligned}$$

Ceci permet finalement d'écrire, pour $u \leq \frac{L_2 M_1 \mu_1}{L_1 M_2 \mu_2}$:

$$\mathcal{RB}(u) = \frac{\Gamma(M_1)\Gamma(M_2)}{\Gamma(L_1)\Gamma(M_2 - L_2)\Gamma(L_2)} \frac{\Gamma(L_1 + L_2)}{\Gamma(L_2 + M_1)}$$

$$\left(\frac{L_2 M_1 \mu_1}{L_1 M_2 \mu_2}\right)^{L_2} \frac{1}{u^{L_2+1}} {}_2F_1\left(L_2 - M_2 + 1, L_1 + L_2; L_2 + M_1; \frac{L_2 M_1 \mu_1}{M_2 L_1 \mu_2} \frac{1}{u}\right)$$

En notant $Y(u)$ la distribution d'Heaviside, on peut donner une formulation globale à la loi rapport de deux lois Beta :

$$\mathcal{RB}[\mu, L_1, M_1, L_2, M_2](u) = \frac{\Gamma(M_1)\Gamma(M_2)\Gamma(L_1 + L_2)}{\Gamma(L_1)\Gamma(L_2)} \frac{L_1 M_2 \mu_2}{L_2 M_1 \mu_1}$$

$$\left(Y\left(1 - \frac{L_1 M_2 \mu_2}{M_1 L_2 \mu_1} u\right) \frac{1}{\Gamma(M_1 - L_1) \Gamma(L_1 + M_2)}\right.$$

$$\left.\left(\frac{L_1 M_2 \mu_2}{L_2 M_1 \mu_1} u\right)^{L_1-1} {}_2F_1\left(L_1 - M_1 + 1, L_1 + L_2; L_1 + M_2; \frac{L_1 M_2 \mu_2}{M_1 L_2 \mu_1} u\right)\right.$$

$$\left.+ Y\left(\frac{L_1 M_2 \mu_2}{M_1 L_2 \mu_1} u - 1\right) \frac{1}{\Gamma(M_2 - L_2) \Gamma(L_2 + M_1)}\right.$$

$$\left.\left(\frac{L_2 M_1 \mu_1}{L_1 M_2 \mu_2} \frac{1}{u}\right)^{L_2+1} {}_2F_1\left(L_2 - M_2 + 1, L_1 + L_2; L_2 + M_1; \frac{L_2 M_1 \mu_1}{M_2 L_1 \mu_2} \frac{1}{u}\right)\right)$$

Références

- [1] H. Bateman *Higher transcendental functions*, McGraw-Hill, 1953
- [2] B. Epstein *Some applications of the Mellin transform in statistics*, Annals of Mathematical Statistics, 19 (1948), pp 370-379
- [3] J.M. Nicolas *Application de la transformée de Mellin : étude des lois statistiques de l'imagerie cohérente*, Rapport TélécomParisTech 2006D010
- [4] C. Oliver, D. Blacknell, R. White *optimum edge detection in SAR*, IEEE Proc. Radar Sonar and navigation, 143(1) :31-40, 1996
- [5] A. Papoulis *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, 2002
- [6] F. Tupin, H. Maître, J.-F. Mangin, J. M. Nicolas et E. Pechersky *Linear Feature Detection on SAR Images : Application to the Road Network*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 1998, vol. 36, n° 2, pp. 434-453
- [7] G. Vasile, P. Bolon, C. Deledalle, R. Fallourd, M. Gay, O. Harant, J. -M. Nicolas, L. Ott, E. Trouvé et F. Tupin *New Cross-Correlation Shift Estimation Methods with High Resolution SAR Data*, Livrable EFIDIR 2.8, <http://www.efidir.fr/>

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Rappels	1
1.2	Lois inverses	2
1.2.1	Relations fondamentales	2
1.2.2	Un cas particulier	2
1.3	Convolution de Mellin, produits de variables aléatoires, rapports de variables aléatoires	3
1.3.1	Produit de variables aléatoires	3
1.3.2	Rapport de variables aléatoires	4
1.3.3	Convolution de Mellin et loi inverse	4
1.4	Lois en intensité, lois en amplitude	4
1.4.1	Passage de données en amplitude à des données en intensité	4
1.4.2	Convolution de Mellin et passage de données en amplitude à des données en intensité	5
1.4.3	Cas général : loi puissance η de l'amplitude	5
1.5	Chatoiement et loi Gamma	6
1.6	La boîte à outils : loi Gamma, loi Gamma Inverse et loi lognormale	6
2	Lois statistiques de produit : données en intensité	8
2.1	Produit de deux lois lognormale	8
2.2	Produit de deux lois Gamma	8
2.3	Produit d'une loi Gamma et d'une loi Gamma inverse : la loi de Fisher	9
2.3.1	Cas général	9
2.3.2	Cas particulier	10
2.4	Produit de deux lois de Fisher et produit d'une loi \mathcal{K} et d'une loi \mathcal{KI}	10
2.5	Produit de deux lois \mathcal{K} (et produit de deux lois \mathcal{KI})	11
3	Lois statistiques de rapport : données en intensité	11
3.1	Rapport de deux lois lognormale	11
3.2	Rapports de deux lois Gamma : la loi de Fisher	12
3.3	Cas général	12
3.3.1	Cas de deux lois Gamma identiques	13
3.3.2	Cas de deux lois Gamma avec $L = M$	13
3.4	Rapports d'une loi Gamma et d'une loi Gamma inverse : la loi \mathcal{K}	13
3.5	Rapports de deux lois de Fisher et rapports de deux lois \mathcal{K}	14
3.5.1	Cas général	14
3.5.2	Cas de deux lois de Fisher identiques	15
3.5.3	Cas "limites"	16
3.6	Rapport de deux lois Beta	17
3.6.1	Cas général	17
3.6.2	Cas particulier de deux lois Beta identiques	17
4	Cas des données en amplitude	18
4.1	Introduction	18
4.2	Rapport de deux lois lognormales	18
4.2.1	Cas général	18
4.2.2	Cas de deux lois lognormales identiques	19
4.2.3	Cas de deux lois lognormales identiques : approximation par une loi de Fisher	19
4.3	Rapport de deux lois de Nakagami	20
4.3.1	Cas général	20

4.3.2	Cas de deux lois de Nakagami identiques	20
4.4	Rapport de deux lois de Fisher	21
4.4.1	Cas général	21
4.4.2	Cas de deux lois de Fisher identiques	21
4.4.3	Cas de deux lois de Fisher identiques : approximation	23
5	La loi \mathcal{F}_{AZ} : une approximation universelle pour les rapports d'image ?	23
A	Lois d'un rapport de deux lois de Fisher	27
B	Lois d'un rapport de deux lois Beta	28

Télécom ParisTech

Institut TELECOM - membre de ParisTech

46, rue Barrault - 75634 Paris Cedex 13 - Tél. + 33 (0)1 45 81 77 77 - www.telecom-paristech.fr

Département TSI