



Existence d'un cycle de longueur au moins 7 dans un graphe sans $(1, \leq 2)$ -jumeaux

David Auger
Irène Charon
Olivier Hudry
Antoine Lobstein

2009D015

Juillet 2009

Département Informatique et Réseaux
Groupe MIC2 : Mathématiques de l'Information
des Communications et du Calcul

Existence d'un cycle de longueur au moins 7 dans un graphe sans $(1, \leq 2)$ -jumeaux

David Auger, Irène Charon, Olivier Hudry

Institut Télécom - Télécom ParisTech & CNRS - LTCI UMR 5141
46, rue Barrault, 75634 Paris Cedex 13 - France
{david.auger, irene.charon, olivier.hudry}@telecom-paristech.fr

Antoine Lobstein

CNRS - LTCI UMR 5141 & Institut Télécom - Télécom ParisTech
46, rue Barrault, 75634 Paris Cedex 13 - France
antoine.lobstein@telecom-paristech.fr

Résumé On considère un graphe G simple non orienté, ayant au moins deux sommets. On appelle boule d'un sous-ensemble Y de sommets de G l'ensemble des sommets de G à distance au plus 1 d'un sommet de Y . On suppose que les boules des sous-ensembles des sommets de G de cardinal au plus 2 sont toutes distinctes. On montre que, si G est connexe, alors G possède un cycle de longueur au moins 7 ; sinon, les composantes connexes de G sont réduites à un sommet ou contiennent chacune un cycle de longueur au moins 7.

Mots-clés : graphe non orienté, sous-ensembles jumeaux, graphe identifiable, code identifiant, cycle de longueur maximum

1 Introduction

On s'intéresse à un graphe non orienté, simple, fini $G = (X, E)$, où X désigne l'ensemble des sommets de G et E l'ensemble de ses arêtes.

Si r est un entier positif et x un sommet de G , on nomme *boule de x de rayon r* , ou *r -boule de x* , et on note $B_r(x)$ l'ensemble constitué des sommets

de G à distance au plus r de x . Si Y est une partie de X , on définit la *boule de Y de rayon r* , ou *r -boule de Y* , et on note $B_r(Y)$ l'ensemble :

$$B_r(Y) = \bigcup_{y \in Y} B_r(y).$$

Pour tout sommet x , on pose $B(x) = B_1(x)$ et on appelle cet ensemble *boule de x* : en d'autres termes, la boule de x est constituée de x et de ses voisins ; pour toute partie Y de X , on pose $B(Y) = B_1(Y)$ et on appelle cet ensemble *boule de Y* .

Deux parties de X sont dites *séparées* si leurs r -boules sont distinctes. Pour un entier $\ell \geq 1$, le graphe G est dit *sans $(r, \leq \ell)$ -jumeaux* si deux quelconques sous-ensembles distincts de X de cardinal au plus ℓ sont séparés. Dans un graphe sans $(r, \leq \ell)$ -jumeaux, pour toute partie V de X , il existe au plus un sous-ensemble Y de X , de cardinal au plus ℓ , pour lequel $B_r(Y) = V$: les sous-ensembles de X de cardinal au plus ℓ sont caractérisés par leur r -boule. On dit aussi dans ce cas que G est *$(r, \leq \ell)$ -identifiable*, ou qu'il admet un *code $(r, \leq \ell)$ -identifiant*. Voir, parmi d'autres, les références [6–10].

Nous nous restreindrons ici au cas $r = 1$, $\ell = 2$. On sait peu de choses sur la structure des graphes sans $(1, \leq 2)$ -jumeaux ; l'objectif de cet article est de prouver qu'un graphe non orienté, connexe, d'ordre au moins 2 sans $(1, \leq 2)$ -jumeaux possède un cycle *élémentaire* (ne passant pas deux fois par le même sommet) de longueur au moins 7.

Nous rappelons ici quelques définitions classiques pour un graphe $G = (X, E)$ [2],[5]. Etant donné un sous-ensemble $X' \subseteq X$ de sommets de G , le *sous-graphe de G induit ou engendré par X'* est le graphe $G' = (X', E')$ où

$$E' = \{\{u, v\} \in E : u \in X', v \in X'\}.$$

Un *sous-graphe partiel* de G est un graphe $G'' = (X'', E'')$, avec $X'' \subseteq X$ et

$$E'' \subseteq \{\{u, v\} \in E : u \in X'', v \in X''\}.$$

Un *point* (ou *sommet*) *d'articulation* de G est un sommet u de X tel que le sous-graphe induit par $X \setminus \{u\}$ voit son nombre de composantes connexes augmenter par rapport à G . Un *isthme* de G est une arête a de E telle que le sous-graphe partiel $(X, E \setminus \{a\})$ voit son nombre de composantes connexes augmenter par rapport à G . Lorsque G est connexe, la suppression d'un point d'articulation ou d'un isthme déconnecte le graphe. Plus généralement, un graphe *h -connexe*, $h \geq 1$, est un graphe G pour lequel le nombre minimum de sommets à supprimer pour déconnecter G , ou pour le réduire à un singleton, est au moins h . Une *composante h -connexe* de G est un sous-graphe induit h -connexe et maximal, pour l'inclusion, dans G .

On appelle *bloc* de G tout sous-graphe induit maximal sans sommet d'articulation, et on appelle *pont* un sous-graphe induit constitué de deux sommets adjacents, reliés par une arête qui est un isthme de G .

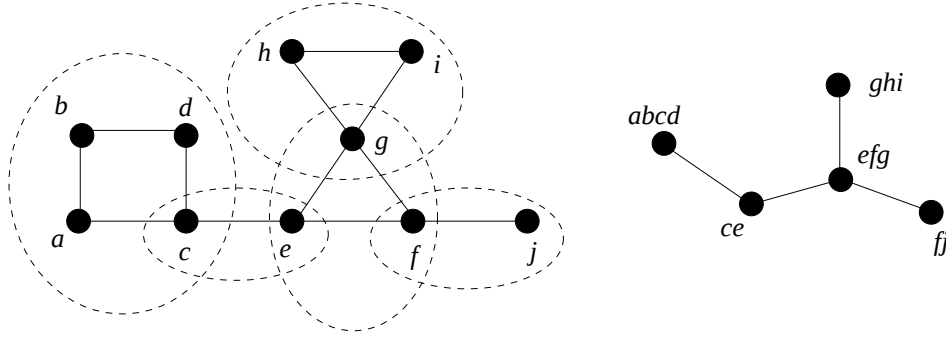


Figure 1: Exemple de graphes G et G' .

Enfin on utilisera la notation $\mathcal{C}_i$ (respectivement, $\mathcal{C}_{\geq i}$) pour un cycle de longueur i (respectivement, au moins i), $i \geq 3$.

Dans tout cet article, les chaînes ou les cycles considérés seront élémentaires, et $G = (X, E)$ sera un graphe non orienté, simple, d'ordre au moins 2, et qu'on supposera connexe : si G n'était pas connexe, le résultat serait obtenu en choisissant une composante connexe de G ayant au moins 2 sommets.

2 Choix d'un *bloc feuille* de G

Les blocs de G sont des composantes 2-connexes ou des ponts. Le graphe représenté à gauche de la figure 1 possède cinq blocs : $\{a, b, c, d\}$, $\{c, e\}$, $\{g, h, i\}$, $\{e, f, g\}$, et $\{f, j\}$, qui sont entourés en pointillé. Deux blocs de G soit ont une intersection vide, soit s'intersectent en un sommet d'articulation de G . Considérons le graphe G' dont les sommets correspondent aux blocs de G , et tel que deux sommets sont adjacents s'ils correspondent à deux blocs ayant un sommet en commun : le graphe G' est un arbre. Nous appelons *bloc feuille* de G un bloc de G correspondant à une feuille de G' . Le graphe représenté à gauche de la figure 1 possède trois blocs feuilles.

On introduit la définition suivante :

Définition 1 Soient $G = (X, E)$ un graphe non orienté, $Y \subset X$ un sous-ensemble de sommets, y un sommet dans Y , et s un sommet de $X \setminus Y$. On appelle (G, s, Y, y) -chaîne une chaîne de G dont une extrémité est s , l'autre extrémité, t , appartient à $Y \setminus \{y\}$, et dont les sommets autres que t sont dans $X \setminus Y$.

On utilisera de manière répétée la proposition suivante :

Proposition 1 Soient $G = (X, E)$ un graphe non orienté connexe, H une composante 2-connexe de G , Y un sous-ensemble d'au moins 2 sommets dans H , y un sommet de Y qui n'est pas sommet d'articulation de G , et s

un voisin de y qui n'appartient pas à Y . Alors, le sommet s appartient à H et il existe une (H, s, Y, y) -chaîne.

Preuve. On note $G \setminus \{y\}$ le graphe obtenu à partir de G en retirant le sommet y . Le sommet y n'étant pas sommet d'articulation, le graphe $G \setminus \{y\}$ est connexe. Il existe donc dans $G \setminus \{y\}$ une chaîne reliant s et un sommet t de $Y \setminus \{y\}$ dont les sommets autres que t sont dans $X \setminus Y$, c'est-à-dire une (G, s, Y, y) -chaîne ; si on concatène cette chaîne avec l'arête $\{s, y\}$, on obtient une chaîne C entre y et t qui sont deux sommets distincts de la composante 2-connexe H ; l'union de H et de C est encore 2-connexe ; la maximalité de H en tant que sous-graphe 2-connexe entraîne que la chaîne C est une chaîne dans H . $\square$

La proposition 1 exprime que, si on cherche à << sortir >> d'un sous-ensemble Y de 2 ou plus sommets d'une composante 2-connexe H à partir d'un non point d'articulation y , alors on reste dans H et on << revient >> dans Y , ailleurs qu'en y .

On suppose maintenant et dans toute la suite que G est sans $(1, \leq 2)$ -jumeaux.

Remarquons d'abord que G ne peut pas avoir de sommet de degré 1 ; en effet, supposons qu'il existe un sommet x de degré 1 et notons y son unique voisin : l'ensemble $\{y\}$ ne serait pas séparé de l'ensemble $\{x, y\}$; ceci fait d'ailleurs partie d'un résultat plus général sur les graphes sans $(1, \leq \ell)$ -jumeaux, dont le degré minimum est au moins ℓ [9, Th. 8]. En conséquence, un bloc feuille de G ne peut pas être un pont : les blocs feuilles de G sont des composantes 2-connexes. On pourra en particulier leur appliquer la proposition 1. Nous notons H un bloc feuille de G ; le graphe H possède au moins un cycle.

Le graphe H est soit G tout entier et dans ce cas ne possède pas de point d'articulation, soit possède un et un seul sommet, α , qui soit sommet d'articulation de G . Dans toute la suite, on garde ces notations pour le graphe (composante 2-connexe) H et le sommet α s'il existe.

3 Le plus long cycle de H n'est pas de longueur 6

Le lemme 1 sera utilisé de manière répétée pour démontrer les lemmes 2–4, lesquels stipulent que si H admet certains sous-graphes partiels, alors, sous certaines conditions, H admet un $\mathcal{C}_{\geq 7}$ comme sous-graphe partiel. Le lemme 5 conclut cette section, de loin la plus longue de cet article, en établissant que le plus long cycle de H n'est pas de longueur 6.

Lemme 1 *On suppose que le plus long cycle de H est de longueur 6 ; si H possède le graphe L représenté sur la figure 2 comme sous-graphe partiel, avec $x \neq \alpha$ et $y \neq \alpha$, alors le sommet t est adjacent à x ou y mais pas aux*

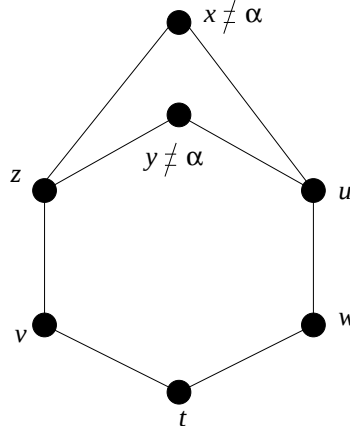


Figure 2: Le graphe L du lemme 1.

deux, et les sommets x et y n'ont pas d'autres voisins dans G que z , u , et, pour exactement l'un d'entre eux, t .

Preuve. On suppose que H n'admet pas de cycle de longueur au moins 7 et qu'il possède le graphe L comme sous-graphe partiel, avec $x \neq \alpha$ et $y \neq \alpha$. Notons Y l'ensemble des 7 sommets de L .

On montre d'abord que les voisins dans G de x et de y sont dans l'ensemble $\{z, u, t\}$. Supposons au contraire que le sommet x a un voisin s appartenant à $X \setminus \{z, u, t\}$.

Si s appartient à Y , il s'agit de y , v , ou w .

Si s n'appartient pas à Y , puisque x n'est pas le sommet d'articulation, on peut utiliser la proposition 1 : le sommet s appartient à H et il existe une (H, s, Y, x) -chaîne.

Que le sommet s appartienne ou non à Y , il existe donc une chaîne C de longueur au moins 1 reliant x et $Y \setminus \{x\}$, autre que les arêtes $\{x, z\}$, $\{x, u\}$ et $\{x, t\}$, et dont les sommets, sauf les extrémités, n'appartiennent pas à Y ; on examine les différents cas envisageables, qui sont représentés sur la figure 3.

- (a) Si C relie x et z , C est de longueur au moins 2 ; en la concaténant avec la chaîne z, v, t, w, u, x , on a un cycle de longueur supérieure ou égale à 7, représenté en gras en figure 3(a) ; ce cas est impossible, de même que le cas où C relie x et u .
- (b) Si C relie x et y , cette chaîne concaténée avec la chaîne y, z, v, t, w, u, x forme un $\mathcal{C}_{\geq 7}$; ce cas est impossible.
- (c) Si C relie x et v , cette chaîne concaténée avec la chaîne v, t, w, u, y, z, x forme un $\mathcal{C}_{\geq 7}$. Il est de même impossible que C relie x et w .

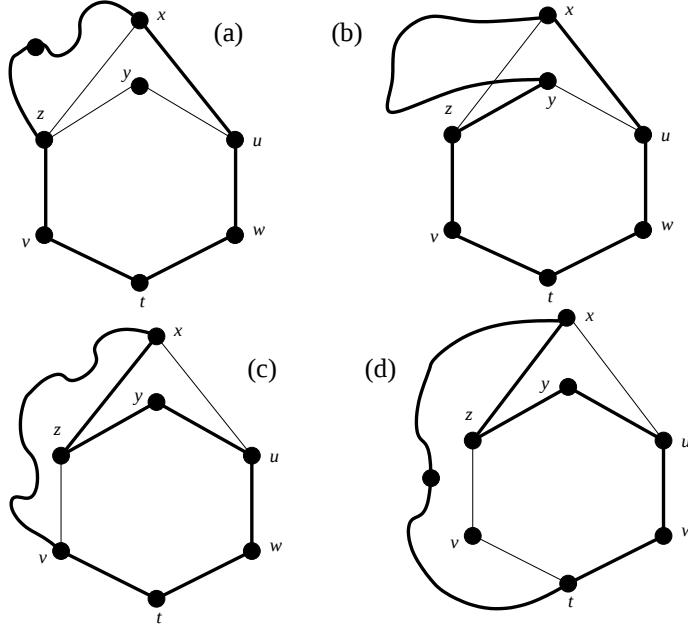


Figure 3: Illustrations pour la preuve du lemme 1.

- (d) Enfin, si C relie x et t , alors C est de longueur au moins 2 et en la concaténant avec la chaîne t, w, u, y, z, x , on forme un $\mathcal{C}_{\geq 7}$, encore une contradiction.

Aucun cas n'est donc possible, et les voisins de x sont dans l'ensemble $\{z, u, t\}$; il en est de même pour le sommet y .

Par ailleurs, on a : $B(\{z, x\}) \supset \{x, y, z, u\}$ et $B(\{z, y\}) \supset \{x, y, z, u\}$. Pour que les ensembles $\{z, x\}$ et $\{z, y\}$ soient séparés, il est nécessaire d'utiliser le sommet t , et donc un, et un seul, des sommets x et y est adjacent à t , ce qui achève la preuve du lemme 1. $\square$

Lemme 2 *Si le graphe H admet le graphe L représenté par la figure 2 avec $x \neq \alpha$ et $y \neq \alpha$ comme sous-graphe partiel, alors le graphe H possède un cycle de longueur au moins 7 comme sous-graphe partiel.*

Preuve. On suppose que H ne possède pas de $\mathcal{C}_{\geq 7}$ et admet le graphe L avec $x \neq \alpha$ et $y \neq \alpha$ comme sous-graphe partiel. On nomme encore Y l'ensemble des 7 sommets de L .

On peut supposer que, si α n'appartient pas à Y , il n'existe pas la chaîne z, α, t ; en effet, s'il existe la chaîne z, α, t avec α hors de Y , on supprime de L la chaîne z, v, t qu'on remplace par la chaîne z, α, t et le sommet α prend le nom de v . On peut de même supposer que, si α n'appartient pas à Y , la chaîne u, α, t n'existe pas.

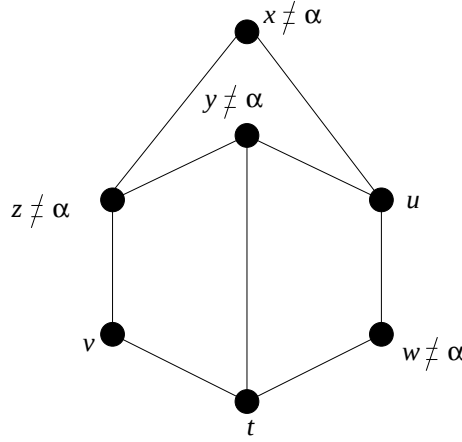


Figure 4: Le graphe L avec l'arête $\{y, t\}$.

Si le sommet α se trouve en z ou en w , on renomme les sommets en échangeant les noms z et u ainsi que les noms v et w ; on peut donc supposer, sans perte de généralité, que le sommet α n'est ni en z , ni en w .

Le graphe L considéré dorénavant possède les propriétés suivantes :

- L correspond à la figure 2,
- $x \neq \alpha$, $y \neq \alpha$, $z \neq \alpha$, et $w \neq \alpha$,
- s'il existe la chaîne z, α, t , alors α appartient à Y ,
- s'il existe la chaîne u, α, t , alors α appartient à Y .

On peut supposer en outre, d'après le lemme 1, que y est adjacent à t et on sait qu'alors les sommets x et y n'ont pas d'autres voisins dans G que ceux représentés sur la figure 4. Le graphe H possède donc le graphe représenté sur la figure 4 comme sous-graphe partiel.

Pour établir le lemme 2, on procède par étapes, en établissant des résultats intermédiaires, de 1 à 7.

1. *Le sommet w n'a aucun voisin hors de Y .*

Supposons que w ait un voisin s n'appartenant pas à Y (voir figure 5) ; w étant différent de α , il y a une (H, s, Y, w) -chaîne C . D'après le lemme 1, les sommets x et y ont tous leurs voisins dans Y : la chaîne C ne peut pas arriver en x ou y . La chaîne C ne peut arriver ni en u ni en t , sans quoi on aurait un $\mathcal{C}_{\geq 7}$, représenté en gras en figure 5(a) dans le cas où la chaîne arrive en u . Si la chaîne C arrivait en v , on aurait un $\mathcal{C}_{\geq 8}$ et si elle arrivait en z , on aurait un $\mathcal{C}_{\geq 7}$: la chaîne C ne peut arriver en aucun sommet de Y . En conséquence, w n'a pas de voisin hors de Y .

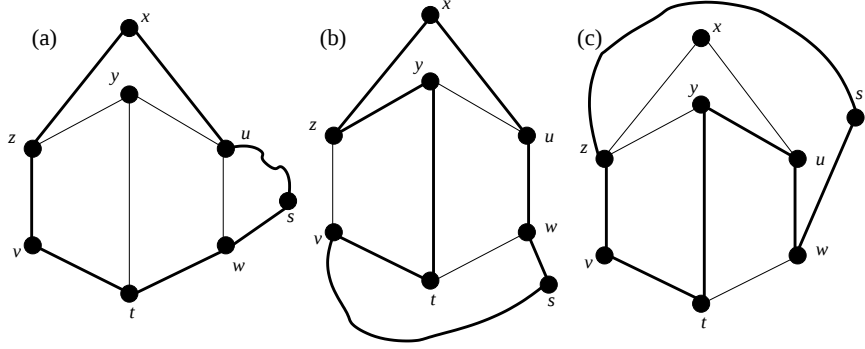


Figure 5: Lemme 2, illustrations pour le résultat 1.

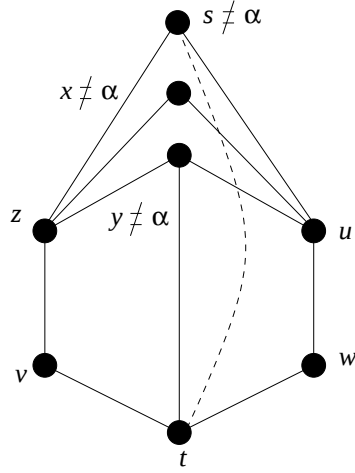


Figure 6: Lemme 2, illustration pour le résultat 3.

2. Si le sommet v est différent de α , alors v n'a aucun voisin hors de Y .

Ce résultat s'obtient exactement de la même manière que le résultat 1.

3. Il n'existe pas de sommet n'appartenant pas à Y et différent de α qui soit adjacent à la fois à z et u .

En effet, supposons qu'un sommet s différent de α et hors de Y soit adjacent à la fois à z et u (voir figure 6) ; d'après le lemme 1, le sommet x n'étant pas adjacent à t et ni x ni s n'étant point d'articulation, le sommet s est adjacent à t . Ni s ni y n'étant point d'articulation, le fait que s et y soient adjacents à t contredit le lemme 1.

4. Si v est différent de α et si le sommet z a un voisin s n'appartenant pas à Y , alors s est le sommet α et on a la chaîne z, α, u .

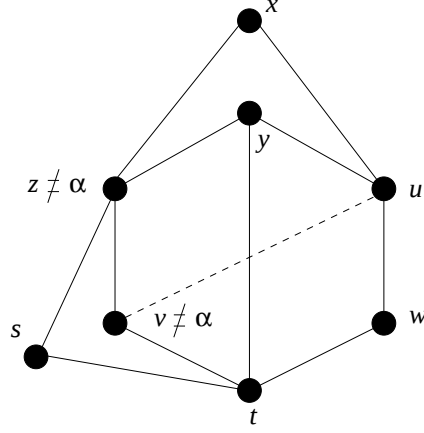


Figure 7: Lemme 2, illustration pour le résultat 4, lorsque C arrive en t .

On suppose que v est différent de α et on rappelle que le sommet z est différent de α ; on suppose que le sommet z a un voisin s hors de Y . Le sommet z étant différent de α , la proposition 1 montre qu'il existe une (H, s, Y, z) -chaîne, qu'on nomme C .

La chaîne C ne peut arriver ni en x , ni en y , ni en v , car on aurait alors un $\mathcal{C}_{\geq 7}$. Pour la même raison, elle ne peut pas non plus arriver en w , cf. figure 5(c).

Supposons maintenant que la chaîne C arrive en t ; nécessairement, C est de longueur 1 (il s'agit de l'arête $\{s, t\}$), sinon on aurait un $\mathcal{C}_{\geq 7}$; or on a choisi L de sorte que, si la chaîne z, α, t existe, alors $\alpha \in Y$: le sommet s est donc différent de α ; d'après le lemme 1, appliqué à s et v , soit v , soit s doit être adjacent à u et les sommets s et v n'ont aucun voisin n'appartenant pas à $\{z, t, u\}$. On va montrer que v ne peut pas être adjacent à u ; pour cela, on suppose que le sommet v est adjacent au sommet u . En rappelant que le sommet y n'a aucun voisin n'appartenant pas à $\{z, u, t\}$, on a (voir figure 7) :

$$B(\{t, y\}) = B(\{t, v\}) = \{y, z, t, u, v\} \cup B(t).$$

Les paires de sommets $\{t, y\}$ et $\{t, v\}$ ne sont donc pas séparées. Le sommet v ne peut donc pas être adjacent à u . On montrerait de même que, si s était adjacent à u , les paires $\{t, y\}$ et $\{t, s\}$ ne seraient pas séparées. Ni v , ni s ne peut être adjacent à u : la chaîne C ne peut pas arriver en t .

Il reste l'éventualité que C arrive en u . Alors, comme précédemment, on voit que C est nécessairement de longueur 1 : on a la chaîne z, s, u . Le résultat 3 montre que le sommet s est α , ce qui achève la preuve du résultat 4.

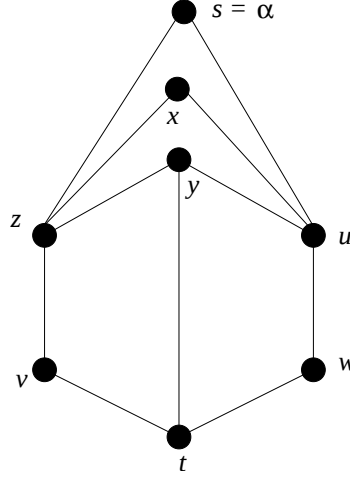


Figure 8: Lemme 2, illustration pour le résultat 6.

5. Si u est différent de α et si u a un voisin s n'appartenant pas à Y , alors s est le sommet α et on a la chaîne u, α, z .

On suppose que u est différent de α et, par hypothèse, w est différent de α . La preuve du résultat 4 s'appuie sur la propriété que les sommets z et v sont autres que α . On peut reprendre cette preuve pour démontrer symétriquement le résultat 5.

6. α est en u ou v .

Supposons que u et v soient différents de α . D'après les résultats 1 et 2, les sommets v et w n'ont alors aucun voisin hors de Y ; d'après les résultats 4 et 5, les sommets z et u peuvent seulement avoir le sommet α comme voisin hors de Y , voisin qui leur est alors commun (voir figure 8). On a :

$$B(\{w, z\}) = B(\{v, u\}) = Y \text{ ou } B(\{w, z\}) = B(\{v, u\}) = Y \cup \{\alpha\}.$$

Les paires $\{w, z\}$ et $\{v, u\}$ ne sont pas séparées. On en déduit donc que soit u soit v est égal à α .

7. Les paires $\{x, t\}$ et $\{z, w\}$ ne sont pas séparées.

D'après le résultat précédent, t est différent de α . On a :

$$B(\{x, t\}) \cap Y = B(\{z, w\}) \cap Y = Y.$$

Rappelons que les sommets x, y , et w n'ont aucun voisin hors de Y (lemme 1 et résultat 1). Pour séparer les paires $\{x, t\}$ et $\{z, w\}$, il faut que t ou z ait un voisin hors de Y qui les sépare.

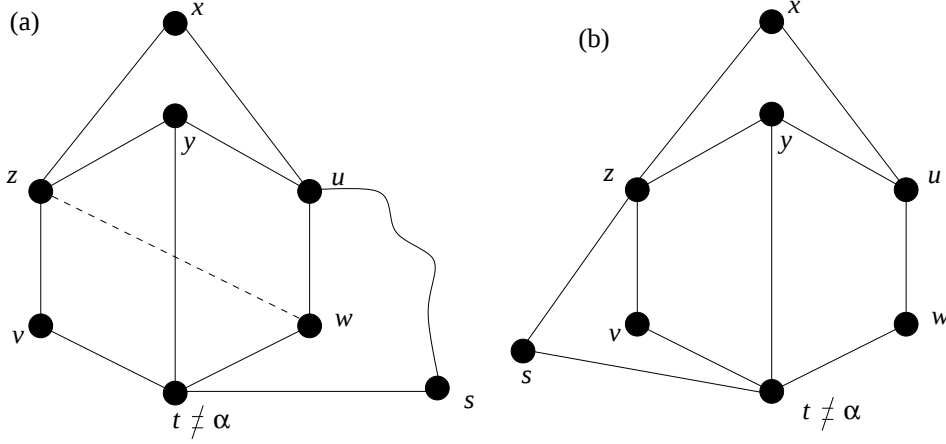


Figure 9: Lemme 2, illustrations pour le résultat 7.

Supposons d'abord que t ait un voisin s hors de Y qui sépare les paires $\{x, t\}$ et $\{z, w\}$; d'après la proposition 1, t n'étant pas sommet d'articulation, il y a une (H, s, Y, t) -chaîne, C , qui ne peut arriver ni en v , ni en w , car on aurait un $\mathcal{C}_{\geq 7}$; elle ne peut arriver non plus ni en x , ni en y , car ces sommets n'ont pas de voisins n'appartenant pas à Y . Supposons que C arrive en u , voir figure 9(a) ; cela signifie que C se réduit à la chaîne u, s, t (sinon, existence d'un $\mathcal{C}_{\geq 7}$), et, d'après les hypothèses sur L ou d'après le résultat 6, s est différent de α ; d'après le lemme 1 appliqué à w et s , il faut que w ou s soit adjacent à z . Supposons qu'il s'agisse de w ; on a :

$$B(\{t, y\}) = B(\{t, w\}) = \{y, z, t, u, v, w\} \cup B(t).$$

Comme y et w n'ont aucun voisin hors de Y , seul x pourrait séparer $\{t, y\}$ et $\{t, w\}$, mais on sait déjà que les seuls voisins de x dans G sont z et u . Les paires de sommets $\{t, y\}$ et $\{t, w\}$ ne sont donc pas séparées. Le sommet w ne peut donc pas être adjacent à z ; on montrerait de même que si s était adjacent à z , les paires $\{t, y\}$ et $\{t, s\}$ ne seraient pas séparées. La chaîne C ne peut donc pas arriver en u , et ne peut alors plus arriver qu'en z , et elle est de longueur 1 : voir figure 9(b), où s et z sont voisins. Ceci contredit toutefois le choix de s , qui devait séparer $\{x, t\}$ et $\{z, w\}$.

Supposons maintenant que z ait un voisin s hors de Y qui sépare les paires $\{x, t\}$ et $\{z, w\}$; d'après la proposition 1, z n'étant pas sommet d'articulation, il y a une (H, s, Y, z) -chaîne C , qui ne peut arriver ni en v , ni en x , ni en y , sinon on aurait un $\mathcal{C}_{\geq 7}$; d'après le résultat 1, elle ne peut pas non plus arriver en w . Supposons que la chaîne C arrive en u ; elle serait alors de longueur 1 et, le sommet s n'étant pas

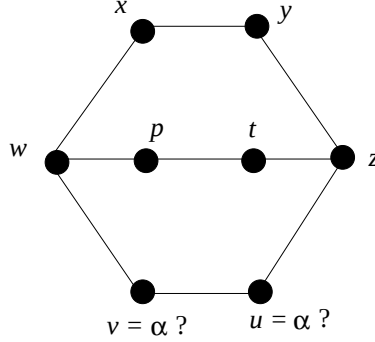


Figure 10: Le graphe K du lemme 3.

le sommet d'articulation, cela contredirait le résultat 3. La chaîne C arrive donc en t et elle est de longueur 1 ; s et t sont voisins, ce qui contredit à nouveau le choix de s .

On ne peut pas séparer les paires $\{x, t\}$ et $\{z, w\}$.

L'hypothèse que H ne possède pas de $\mathcal{C}_{\geq 7}$ est contredite, et la démonstration du lemme 2 est ainsi achevée. $\square$

Lemme 3 *On considère le graphe K représenté par la figure 10 et on suppose que, si α existe, il est en u ou v . Si le graphe H possède le graphe K comme sous-graphe partiel, alors H possède un cycle de longueur au moins 7 comme sous-graphe partiel.*

Preuve. On note Y l'ensemble des 8 sommets de K . On suppose que le graphe H possède le graphe K comme sous-graphe partiel et que, si α existe, il est en u ou v .

Le graphe G étant sans $(1, \leq 2)$ -jumeaux, les ensembles $\{x, t\}$ et $\{y, p\}$ sont séparés. Par symétrie entre $\{x, y\}$ et $\{p, t\}$, puis par symétrie entre x et y , il suffit de supposer que le sommet x possède un voisin qui n'appartient pas à $B(\{y, p\})$. Or $B(\{y, p\}) \supseteq \{x, y, z, p, t, w\}$. On a alors les possibilités suivantes :

- x est voisin de $s \in X \setminus Y$, $s \neq \alpha$. Comme $x \neq \alpha$, il existe une (H, s, Y, x) -chaîne C . Si C arrive en w, y, p, t, v , ou u , alors on a un $\mathcal{C}_{\geq 7}$; et si C arrive en z , alors soit on a directement un $\mathcal{C}_{\geq 7}$, soit C est de longueur 1, ce qui signifie que les arêtes $\{x, s\}$ et $\{s, z\}$ existent, avec $y \neq \alpha, s \neq \alpha$, et on peut appliquer le lemme 2.
- $\{x, v\}$ est une arête ou $\{x, u\}$ est une arête. Dans les deux cas, il existe un $\mathcal{C}_{\geq 7}$.

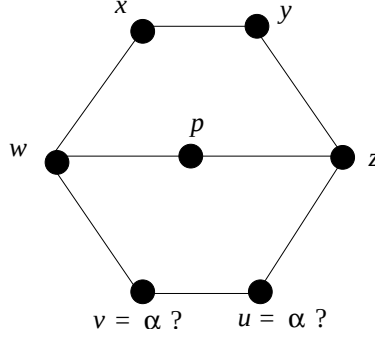


Figure 11: Le graphe K' du lemme 4.

Dans tous les cas ci-dessus, on obtient un $\mathcal{C}_{\geq 7}$, et le lemme 3 est ainsi démontré. $\square$

Lemme 4 *On considère le graphe K' représenté sur la figure 11 et on suppose que, si α existe, il est en u ou v . Si le graphe H possède le graphe K' comme sous-graphe partiel, alors H possède un cycle de longueur au moins 7 comme sous-graphe partiel.*

Preuve. On note Y l'ensemble des 7 sommets de K' ; on suppose que le graphe H admet le graphe K' comme sous-graphe partiel et que, si α existe, il est en u ou v . Le graphe G étant sans $(1, \leq 2)$ -jumeaux, les ensembles $\{p, x\}$ et $\{p, y\}$, dont les boules contiennent toutes deux les sommets x, y, z, w , et p , sont séparés ; on peut, sans perte de généralité, supposer que le sommet x admet un voisin qui n'est pas dans $B(\{p, y\})$. On a alors les possibilités suivantes :

- (a) x est voisin de $s \in X \setminus Y$, $s \neq \alpha$. Comme $x \neq \alpha$, il existe une (H, s, Y, x) -chaîne C . Si C arrive en w, y, p, v , ou u , alors on a un $\mathcal{C}_{\geq 7}$; et si C arrive en z , alors soit on a directement un $\mathcal{C}_{\geq 7}$, soit C est de longueur 1 et on peut appliquer le lemme 2, cf. preuve du lemme 3.
- (b) $\{x, u\}$ est une arête ; alors il existe un $\mathcal{C}_{\geq 7}$.
- (c) $\{x, v\}$ est une arête, voir figure 12 ; les ensembles $\{z, x\}$ et $\{z, w\}$, dont les boules contiennent tous les sommets de Y , étant séparés, le sommet w ou le sommet x doit avoir un voisin n'appartenant pas à Y . S'il s'agit de x , l'étude faite ci-dessus en (a) s'applique à nouveau. Examinons donc maintenant le sommet w , un voisin $s \in X \setminus Y$ de w qui ne soit voisin ni de x ni de z , et une (H, s, Y, w) -chaîne, C . Si C donne naissance à une chaîne de longueur 3 entre w et z dont seules les extrémités, w et z , sont dans Y , on applique le lemme 3 ; dans tous les autres cas, on observe directement que H contient un $\mathcal{C}_{\geq 7}$.

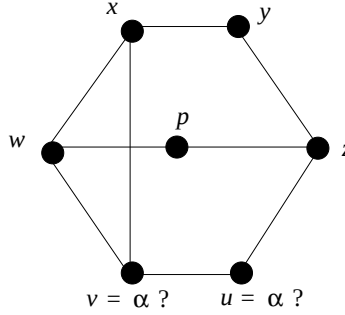


Figure 12: Illustration pour la preuve du lemme 4, avec l'arête $\{x, v\}$.

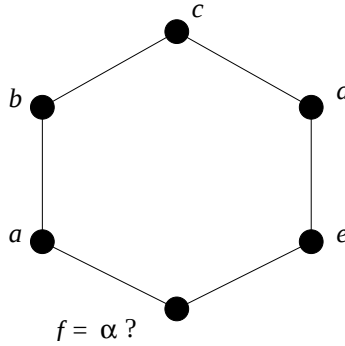


Figure 13: Le cycle de longueur 6 considéré pour le lemme 5.

Tous les cas conduisent à l'existence d'un cycle de longueur au moins 7. Le lemme 4 est ainsi démontré. $\square$

On peut maintenant montrer :

Lemme 5 *Le plus long cycle de H n'est pas de longueur 6.*

Preuve. On procède par l'absurde en supposant que le plus long cycle de H est de longueur 6 ; si H possède un $\mathcal{C}_6$ contenant le sommet α , on choisit un tel cycle, sinon on choisit un $\mathcal{C}_6$ quelconque. On note a, b, c, d, e , et f les sommets de ce cycle, et on pose $Y = \{a, b, c, d, e, f\}$. Si le cycle contient le sommet α , on suppose que le sommet α est en f (voir figure 13). Les lemmes 2, 3, et 4 ainsi que l'inexistence d'un $\mathcal{C}_{\geq 7}$ montrent qu'il n'y a pas d'autre chaîne de longueur au moins 2 ayant ses extrémités dans Y et son (ses) autre(s) sommet(s) hors de Y que :

- une éventuelle chaîne de longueur 2 entre les sommets a et e ;
- une éventuelle chaîne de longueur 2 ou 3 entre les sommets c et f .

En effet, si une chaîne relie 2 sommets consécutifs du cycle, elle donne un $\mathcal{C}_{\geq 7}$; si elle relie 2 sommets à distance 2, autres que a et e , ou bien

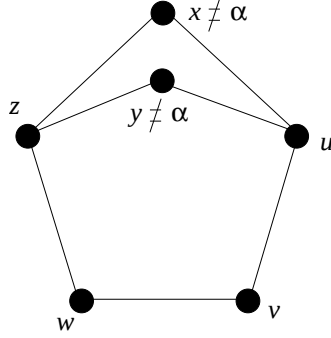


Figure 14: Le graphe M du lemme 6.

on a un $\mathcal{C}_{\geq 7}$, ou bien le lemme 2 s'applique ; si elle relie 2 sommets opposés autres que c et f , soit elle donne un $\mathcal{C}_{\geq 7}$, soit le lemme 3 ou 4 s'applique ; enfin si elle est de longueur au moins 4 entre c et f , alors H contient un $\mathcal{C}_{\geq 7}$.

Les boules des ensembles $\{a, d\}$ et $\{b, e\}$ contiennent Y ; ces ensembles ne sont pas séparés, car on vient de voir que b et d n'ont pas de voisin hors de Y , et que a et e soit n'ont pas de voisin hors de Y , soit ont un seul voisin hors de Y , voisin qui leur est commun. $\square$

4 Le plus long cycle de H n'est pas de longueur 5

Lemme 6 *Si le graphe H possède le graphe M représenté par la figure 14 comme sous-graphe partiel avec $x \neq \alpha$ et $y \neq \alpha$, alors H possède un cycle de longueur au moins 6 comme sous-graphe partiel.*

Preuve. Supposons que H admette le graphe M , avec $x \neq \alpha$ et $y \neq \alpha$, comme sous-graphe partiel. Les ensembles $\{z, x\}$ et $\{z, y\}$ étant séparés, il faut que le sommet x ou le sommet y ait un voisin s assurant cette séparation. Supposons, sans perte de généralité, qu'il s'agisse du sommet x . S'il y a une arête entre x et v ou w , on a un $\mathcal{C}_{\geq 6}$. Sinon, le sommet x a un voisin s n'appartenant pas à M ; le sommet x n'étant pas sommet d'articulation, il existe une (H, s, M, x) -chaîne qui dans tous les cas va engendrer un $\mathcal{C}_{\geq 6}$. $\square$

Lemme 7 *Le plus long cycle de H n'est pas de longueur 5.*

Preuve. On suppose que le plus long cycle de H est de longueur 5 et donc qu'il n'y a pas de $\mathcal{C}_{\geq 6}$. S'il existe un $\mathcal{C}_5$ contenant l'éventuel sommet d'articulation α , on choisit ce cycle et sinon on choisit un $\mathcal{C}_5$ quelconque ; on nomme a, b, c, d, e les sommets du cycle, et, si le cycle contient α , on suppose que $\alpha = e$ (voir figure 15).

Comme précédemment, l'inexistence d'un $\mathcal{C}_{\geq 6}$ et le lemme 6 montrent que la seule chaîne possible de longueur au moins 2 dont les extrémités

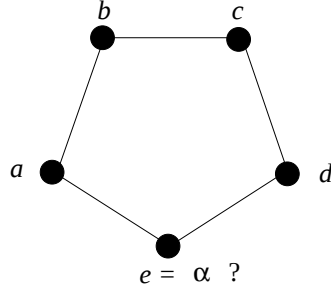


Figure 15: Le cycle de longueur 5 considéré pour le lemme 7.

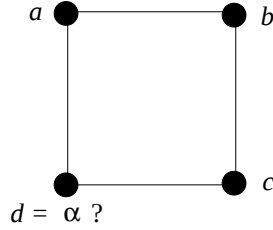


Figure 16: Le cycle de longueur 4 considéré pour le lemme 8.

sont dans le cycle et les autres sommets n'appartiennent pas au cycle est une chaîne de longueur 2 entre a et d . Cela ne permet pas de séparer les ensembles $\{a, c\}$ et $\{b, d\}$, ce qui achève la preuve du lemme 7, grâce au fait que a, c, b, d ne sont pas point d'articulation. $\square$

5 Le plus long cycle n'est pas de longueur 4 ou 3

Lemme 8 *Le plus long cycle de H n'est pas de longueur 4.*

Preuve. Supposons que le plus long cycle de H soit de longueur 4. On choisit un tel cycle, on nomme a, b, c, d ses sommets et on suppose sans perte de généralité que le sommet d'articulation n'est ni en a , ni en b , ni en c (voir figure 16).

Les ensembles $\{b, a\}$ et $\{b, c\}$ étant séparés, il existe une chaîne de longueur au moins 2 dont une extrémité est a ou c , l'autre extrémité, distincte de la première, est sur le cycle et les autres sommets n'appartiennent pas au cycle ; la seule possibilité, pour ne pas avoir de $\mathcal{C}_{\geq 5}$, est une chaîne a, s, c où s n'appartient pas au cycle, mais alors le sommet s ne sépare pas les ensembles $\{b, a\}$ et $\{b, c\}$, ce qui achève la preuve du lemme 8. $\square$

Lemme 9 *Le plus long cycle de H n'est pas de longueur 3.*

Preuve. Supposons que le plus long cycle de H soit de longueur 3 ; on choisit un $\mathcal{C}_3$ quelconque, on nomme a, b, c ses sommets et on suppose sans perte de généralité que l'éventuel sommet d'articulation n'est ni en a , ni en b . Il n'y a alors pas moyen de séparer les ensembles $\{c, a\}$ et $\{c, b\}$ sans créer de $\mathcal{C}_{\geq 4}$, d'où une contradiction. $\square$

6 Existence d'un cycle de longueur au moins 7

Théorème 1 *Tout graphe non orienté connexe d'ordre au moins 2 sans $(1, \leq 2)$ -jumeaux possède un cycle élémentaire de longueur au moins 7 comme sous-graphe partiel.*

Preuve. On a vu, peu avant la Section 3, que le graphe H admet un cycle ; d'après les lemmes 5,7–9, son plus long cycle ne peut pas être de longueur 6, 5, 4, ou 3 : le plus long cycle de H , et donc le plus long cycle de G , est de longueur au moins 7. $\square$

7 Conclusion : remarques et questions ouvertes

On va mettre en parallèle certains résultats obtenus sur les graphes sans $(1, \leq 2)$ -jumeaux et les graphes sans $(r, \leq 1)$ -jumeaux, en laissant ouvertes ces questions dans le cas des graphes sans $(r, \leq \ell)$ -jumeaux, $r \geq 1$, $\ell \geq 1$.

On vérifie facilement qu'un graphe réduit à un cycle de longueur 7 (ou plus) est sans $(1, \leq 2)$ -jumeaux, et qu'un graphe constitué d'un $\mathcal{C}_7$ et d'une ou plusieurs cordes possède des $(1, \leq 2)$ -jumeaux. Ainsi,

- tout graphe connexe d'ordre au moins 2 sans $(1, \leq 2)$ -jumeaux est d'ordre au moins 7 et le seul graphe connexe d'ordre 7 sans $(1, \leq 2)$ -jumeaux est le graphe réduit à $\mathcal{C}_7$.

De manière similaire, on sait que

- tout graphe connexe d'ordre au moins 2 sans $(r, \leq 1)$ -jumeaux est d'ordre au moins $2r + 1$ et le seul graphe connexe d'ordre $2r + 1$ sans $(r, \leq 1)$ -jumeaux est la chaîne à $2r + 1$ sommets [4],[10],[3].

Considérons maintenant les deux graphes de la figure 17. Ces graphes sont sans $(1, \leq 2)$ -jumeaux et ne possèdent pas de $\mathcal{C}_{\geq 7}$ sans corde. Ainsi,

- on ne peut pas ajouter au théorème 1 la propriété d'avoir un $\mathcal{C}_{\geq 7}$ comme sous-graphe *induit*.

Cela diffère du cas des $(r, \leq 1)$ -jumeaux, dans lequel il a été montré que

- tout graphe connexe d'ordre au moins 2 sans $(r, \leq 1)$ -jumeaux contient la chaîne à $2r + 1$ sommets comme sous-graphe *induit* [1].

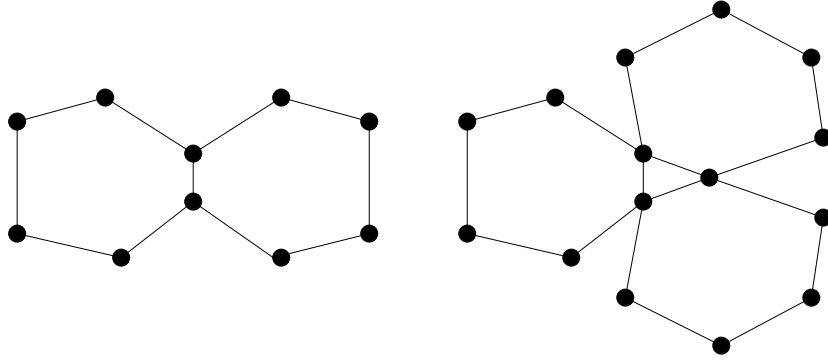


Figure 17: Deux graphes sans $(1, \leq 2)$ -jumeaux et sans $\mathcal{C}_{\geq 7}$ sans corde.

Finalement, on peut observer que le plus petit cycle possible, $\mathcal{C}_3$, peut apparaître dans un graphe sans $(1, \leq 2)$ -jumeaux, ainsi qu'en atteste par exemple le deuxième graphe de la figure 17.

Références

1. D. Auger : Induced paths in twin-free graphs, *Electron. J. Combinatorics*, Vol. 15(1), N17, 2008.
2. C. Berge : *Graphes*, Gauthier-Villars, 1983.
3. I. Charon, I. Honkala, O. Hudry, et A. Lobstein : Structural properties of twin-free graphs, *Electron. J. Combinatorics*, Vol. 14(1), R16, 2007.
4. I. Charon, O. Hudry, et A. Lobstein : On the structure of identifiable graphs: results, conjectures, and open problems, *Proceedings 29th Australasian Conference in Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, pp. 37–38, Taupo, New Zealand, 2004.
5. R. Diestel : *Graph Theory*, Springer, 3e édition, 2005.
6. S. Gravier et J. Moncel : Construction of codes identifying sets of vertices, *Electron. J. Combinatorics*, Vol. 12(1), R13, 2005.
7. I. Honkala, T. Laihonen et S. Ranto : On codes identifying sets of vertices in Hamming spaces, *Designs, Codes and Cryptography*, Vol. 24, pp. 193–204, 2001.
8. T. Laihonen et J. Moncel : On graphs admitting codes identifying sets of vertices, *Australasian J. Combinatorics*, Vol. 41, pp. 81–91, 2008.
9. T. Laihonen et S. Ranto : Codes identifying sets of vertices, *Lecture Notes in Computer Science*, No. 2227, pp. 82–91, Springer-Verlag, 2001.
10. J. Moncel : Codes identifiants dans les graphes, Thèse de Doctorat, Université de Grenoble, France, 165 pages, juin 2005.

