



# Les approches temporelles en imagerie cohérente

---

Jean-Marie Nicolas

**2008D016**

Octobre 2008

Département Traitement du Signal et des Images  
Groupe TII : Traitement et Interprétation des Images

# Les approches temporelles en Imagerie Cohérente

Jean Marie Nicolas

Institut TELECOM, TELECOM ParisTech, LTCI CNRS

46 rue Barrault, 75634 PARIS Cedex 13

jean-marie.nicolas@telecom-paristech.fr

## 1 Méthodes temporelles et méthodes fréquentielles

### 1.1 Introduction

Tant en physique qu'en traitement de signal, les approches temporelles et les approches fréquentielles ont été deux méthodologies utilisées de manière généralement concurrentes : si une des deux approches ne donne pas la simplicité analytique souhaitée, on utilise la seconde. Il est bien connu en effet qu'un problème ne s'énonce quasiment jamais simplement à la fois dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel. Par exemple, la seule fonction usuelle qui soit représentée avec le même niveau de complexité dans les deux mondes est la gaussienne : la transformée de Fourier d'une gaussienne est en effet une gaussienne. L'expérience montre qu'il y a toujours un espace où l'expression est plus simple que dans l'autre, d'autant que si une fonction est à support borné dans un espace, sa transformée de Fourier a un support infini dans l'autre.

Les techniques utilisées en traitement de signal sont solidement ancrées dans le domaine fréquentiel. Les générateurs sinusoïdaux ont toujours été plus faciles à construire et à utiliser que les générateurs impulsionsnels. Etudier un circuit en utilisant un grand nombre de sinusoïdes de différentes fréquences revient à en étudier la réponse fréquentielle sur une gamme de fréquences donnée. De même, les premiers sonogrammes utilisaient un certain nombre de filtres analogiques passe bande sur plusieurs octaves. En règle générale, il semble plus aisé de passer dans le monde des fréquences que de demeurer dans le monde de l'impulsionnel : une sinusoïde, même de durée infinie, est toujours plus sympathique qu'un Dirac que l'on ne saura jamais générer correctement puisque sa durée se devrait d'être nulle (sans parler des problèmes liés à l'énergie instantanée d'un tel signal).

### 1.2 L'équation des ondes

Un exemple flagrant de cette double démarche réside dans l'étude de la propagation des ondes en dimension 3 : ceci concerne un certain nombre de thématiques actuelles tant dans le domaine de l'électromagnétisme (radars de toutes sortes) que de l'acoustique au sens large (acoustique audio, acoustique sous marine, ultrasons médicaux, sismique). Si l'on décrit ces ondes par une grandeur  $\Psi$  (qui peut être un champ, mais aussi une grandeur physique comme la pression acoustique, ...), cette grandeur doit vérifier, en milieu homogène non dispersif, l'équation de propagation suivante, appelée équation de d'Alembert :

$$\square\Psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \nabla^2\Psi = 0 \quad (1)$$

L'opérateur  $\square$  s'appelle le d'Alembertien et l'opérateur  $\nabla^2$  (*i.e.* div grad) est l'opérateur de Laplace.

Dans cette relation,  $c$  représente la vitesse de propagation de l'onde et est une constante du milieu (puisqu'il est supposé non dispersif).

Dans le cas où on recherche une solution de type sinusoidal, donc rattachée à une fréquence unique  $f$ , la relation de d'Alembert, que vérifiait  $\Psi$ , devient l'équation de Helmholtz, que vérifie maintenant  $\Psi_H$  :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2\right)\Psi_H = 0. \quad (2)$$

$k$  est le nombre d'onde et vérifie :

$$k = \frac{2\pi f}{c}$$

La solution générale s'écrit alors :

$$\Psi_H e^{j2\pi ft}$$

La recherche des solutions de l'équation de d'Alembert et de celle d'Helmholtz a conduit de nombreux scientifiques au XIX<sup>ème</sup> siècle à franchir des étapes fondamentales dans la compréhension de la propagation des ondes. Il faut cependant noter que l'approche fréquentielle (équation de Helmholtz, espace de dimension 3) a fait l'objet de la majeure partie des travaux, l'approche temporelle (donc dans un espace de dimension 4) offrant de sérieuses difficultés analytiques.

### 1.3 Le principe de Huyghens : application à la diffraction par un écran plat

Si la solution en espace libre dans le cas d'une source ponctuelle est bien connue dans les deux cas, la solution générale dans le cas d'une source étendue s'appuie d'une part sur un outillage mathématique puissant (les fonctions de Green et le théorème de Green) et d'autre part sur un principe physique célèbre : le principe de Huyghens. Ce dernier postule que si l'on connaît un front d'onde à l'instant  $t$ , tout se passe, à l'instant  $t + dt$ , comme si chaque point de ce front d'onde se comportait comme une source élémentaire isotrope.

Dans le cas d'une source étendue monochromatique, l'étude du rayonnement d'une ouverture de surface  $\Sigma$  positionné dans un écran opaque infini a mené à des résultats célèbres. Sous certaines approximations : conditions de Kirchhoff (la grandeur et la dérivée sont nulles sur l'écran opaque), condition de rayonnement de Sommerfeld (pour "oublier" ce qui se passe à l'infini), conditions de Fresnel ( $k \gg \frac{1}{r}$ ), on montre alors que l'expression de la solution en un point  $P$  ne dépend que de l'état ondulatoire sur cette surface  $\Sigma$  :

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \int \int_{\Sigma} \frac{e^{jkr}}{r} \mathcal{H}(U) ds \quad (3)$$

$\mathcal{H}(U)$  étant une fonctionnelle de  $U$  sur cette ouverture  $\Sigma$ ,  $r$  étant la distance entre le point  $P$ , défini par ses coordonnées  $(x, y, z)$ , et un point  $Q$  de la surface  $\Sigma$ , défini par ses coordonnées  $(0, y_1, z_1)$  (figure 1). Tout revient à ne considérer que la surface  $\Sigma$  dont chaque point est alors une source ponctuelle : en dehors de cette surface, et à tout instant, aucun point de l'espace ne contribue au champ en  $P$ .

Le problème majeur de cette expression est que, dans l'intégrand,  $r$  apparaît :

- au dénominateur : on ne peut sortir cette expression que si  $r$  est sensiblement le même entre le point  $P$  et tout point de l'ouverture.
- dans le terme de phase : or, ce terme peut très rapidement tourner sur son domaine  $[0; 2\pi]$  et il ne semble pas envisageable de simplifier sans approximation cette expression afin de la sortir du terme intégral.

Pour simplifier le terme de phase, et connaissant l'expression de  $r$

$$r = \sqrt{x^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$$

on peut tenter d'en effectuer un développement limité dans les cas suivants :

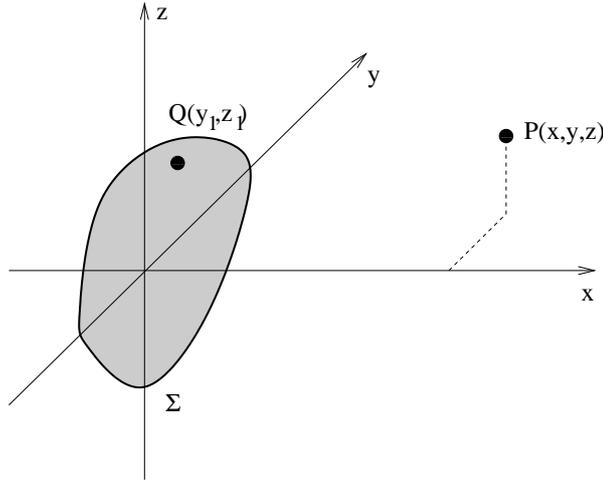


FIG. 1 – Principe de Huyghens : le champ en un point  $P(x, y, z)$  créé par une source étendue  $\Sigma$  s'effectue en considérant tous les points  $Q(0, y_1, z_1)$  de cette source.

– si  $x \gg \sqrt{(y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$  on a alors :

$$r \approx x + \frac{(y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}{2x}$$

appelé parfois approximation de Fresnel (si cette relation n'est pas vérifiée, on dira que l'on est dans la zone de Fresnel : ce point sera détaillé dans l'approche temporelle)

– si de plus  $y_1^2 + z_1^2 \ll y^2 + z^2$ , on a :

$$r \approx x + \frac{y^2 + z^2}{2x} - \frac{y y_1 + z z_1}{x}$$

on est dans l'approximation de Fraunhofer : on dit aussi que l'on est dans la zone de Fraunhofer.

Ce n'est donc que dans des conditions bien précises vérifiant l'approximation de Fraunhofer que l'on peut avoir

$$U(P) \approx \frac{1}{4\pi \hat{r}} e^{jk\left(x + \frac{y^2 + z^2}{2x}\right)} \iint_{\Sigma} e^{-j(f_y y_1 + f_z z_1)} \mathcal{H}(U) dy_1 dz_1 \quad (4)$$

avec  $\hat{r}$  la distance moyenne entre  $P$  et la surface,  $f_y = \frac{ky}{x}$ ,  $f_z = \frac{kz}{x}$ . On reconnaît ici la transformée de Fourier de  $\mathcal{H}$ .

C'est ce résultat assez extraordinaire –calculer la transformée de Fourier d'une ouverture est souvent réalisable analytiquement– qui a assuré le succès de l'approche fréquentielle. Il est alors trivial de démontrer les cas suivants :

- pour une ouverture circulaire, le champ s'exprime selon la transformée de Fourier d'un disque : c'est une fonction de Bessel,
- pour une ouverture rectangulaire, le champ s'exprime selon la transformée de Fourier d'un rectangle : c'est le produit de deux sinus cardinaux.

L'application de cette méthode s'est très vite élargie à des signaux non monochromatiques. Tout d'abord les signaux “bande étroite” ont été ainsi abordés : dans la mesure où les fréquences utilisées sont proches de la fréquence centrale, on peut imaginer de sommer les solutions monochromatiques obtenues par la relation 4 pour la bande étudiée.

Cependant, pour les signaux “large bande”, différents problèmes apparaissent :

- l'approximation de Fraunhofer dépend de la fréquence : pour une certaine distance  $r$ , elle peut être vérifiée pour certaines fréquences du spectre et pas pour d'autres.
- la distinction entre “champ proche” (approximation de Fresnel valide, approximation de Fraunhofer non valide) et “champ lointain” (approximation de Fraunhofer valide) dépend aussi de la fréquence.

## 1.4 Réponse impulsionnelle du baffle plan

Puisque le modèle fréquentiel apparaît solidement ancré –et souvent à juste raison– dans le paysage de la propagation, on peut se demander si une approche temporelle peut se justifier. La source est alors plus difficile à traiter puisqu’il faut associer au “dirac spatial” (lié à la localisation de l’écran) un dirac temporel (signal impulsionnel en temps). A priori, rien ne semble facile dans ce formalisme. D’une part, le formalisme initial semble plus compliqué, puisqu’il s’agit de trouver la solution  $\Psi(X, t)$  du problème de Cauchy qui s’exprime comme suit :

$$\square\Psi(X, t) = \delta(t) \otimes f(X) \quad \text{avec } X = (x, y, z)$$

$\otimes$  représentant un produit tensoriel.

D’autre part, la solution qui existe [8] pour une source impulsionnelle ponctuelle située en  $X_0$  s’écrit :

$$\Psi(X, t) = \frac{1}{4\pi |X - X_0|} \delta\left(t - \frac{|X - X_0|}{c}\right) \quad (5)$$

Il faut souligner la particularité de l’espace 3-D qui permet à l’instant  $t$  de ne considérer que les sources situées en  $X$  tel que  $\frac{|X - X_0|}{c} = t$  : les sources contribuant à l’écriture de la solution sont donc placés sur une sphère de rayon  $ct$  (donc dans un sous espace de dimension 2)<sup>1</sup>.

Pour connaître le champ créé par une source étendue en un point  $X$  à l’instant  $t$ , il suffit donc de sommer toutes les contributions pour des sources élémentaires telles que  $t = \frac{|X - X_0|}{c}$  : c’est exactement le principe de Huyghens. On peut s’attendre à ce que le résultat soit en général difficile à exprimer analytiquement.

Cependant un cas de figure spécifique à l’acoustique : le baffle circulaire plan (dirac de vitesse acoustique sur un disque) a fait l’objet de travaux analytiques conduisant à une solution simple et exploitable. Deux voies sont possibles. La première fait appel aux propriétés vraiment curieuses des transformations intégrales des fonctions de Bessel [5] : seul un spécialiste de ce type de fonction saura en comprendre les subtilités. La seconde, celle de Stepanishen [6], très intuitive, a un formalisme analytique très simple et mérite que l’on en rappelle la démarche.

### 1.4.1 Le baffle plan analysé selon Stepanishen

Soit une ouverture circulaire de rayon  $a$ . Le modèle du baffle plan “piston”, proposé par Stepanishen [6], suppose alors que celui ci est excité par un dirac en vitesse : cela revient à supposer qu’il est possible en  $t = 0$  de déplacer instantanément le baffle d’une certaine valeur (à cause des forces inertielles, cela n’est bien évidemment pas possible).

$\Psi$  s’obtient alors au point  $X$  en sommant la relation 5 sur le baffle. Il faut donc chercher pour chaque instant  $t$  l’intersection de la sphère de rayon  $ct$  centrée en  $X$  avec le baffle.

Pour cela, considérons tout d’abord le cas où  $X$  se trouve sur l’axe du baffle, *i.e.*  $X = (x, 0, 0)$ . Dans ce cas, cette intersection consiste en des cercles inscrits sur le baffle (figure 2).

Dans le cas où elle existe (conditions sur  $t$ ), calculons la surface de l’intersection sur le baffle d’un ballon de centre  $X$ , de rayon  $ct$  et d’épaisseur  $c\delta t$  :

- cette intersection est de rayon  $r = \sqrt{c^2t^2 - x^2}$
- en dérivant l’expression  $r^2 = c^2t^2 - x^2$ , il vient :

$$dr = c \frac{ct}{r} dt$$

- d’où la surface

$$2\pi r dr = 2\pi c ct dt$$

qui est proportionnelle au temps.

---

<sup>1</sup>Le théorème de Weyl précise que cette propriété : intégration sur une hypersurface des sources potentielles, n’est valide que dans un espace impair, de dimension supérieure ou égale à 3.

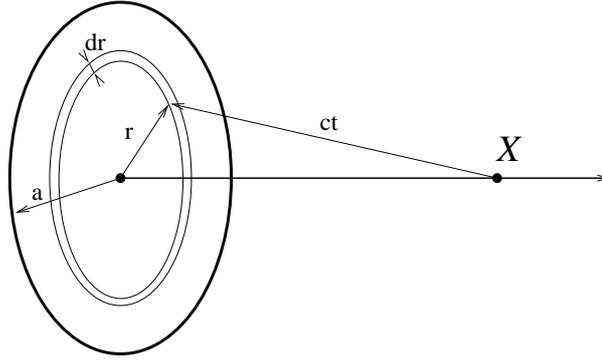


FIG. 2 – Baffle plan : analyse de la réponse impulsionnelle pour un point  $X$  situé sur l'axe du baffle à une distance  $x$  du centre du baffle.

Or le champ  $\Psi$  est en  $\frac{1}{r} = \frac{1}{ct}$  (formule 5), c'est à dire inversement proportionnel au temps : la contribution du baffle plan est alors proportionnelle à l'expression :

$$2\pi c dt$$

Elle est donc constante quel que soit l'instant d'illumination au point  $X$ .

C'est sur la base de ce raisonnement (et de l'expression 5) que l'on démontre que  $\Psi$  s'écrit :

$$\Psi = \begin{cases} 0 & \text{si } ct < x \\ \frac{c}{2} & \text{si } x < ct < \sqrt{x^2 + a^2} \\ 0 & \text{si } \sqrt{x^2 + a^2} < ct \end{cases} \quad (6)$$

Le signal est donc non nul et constant pour  $t \in [t_1; t_2]$  avec :

$$t_1 = \frac{x}{c}$$

$$t_2 = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{c}$$

Pour un point situé sur l'axe, la réponse est donc constante ou nulle : ce qui veut dire que par construction géométrique, l'atténuation géométrique en  $\frac{1}{r}$  est naturellement compensée par une surface d'émission plus grande (la surface des couronnes augmente linéairement en fonction du rayon  $r$ ). Bien entendu, ce résultat, simplissime, est lié à la géométrie du système et relève de l'exception.

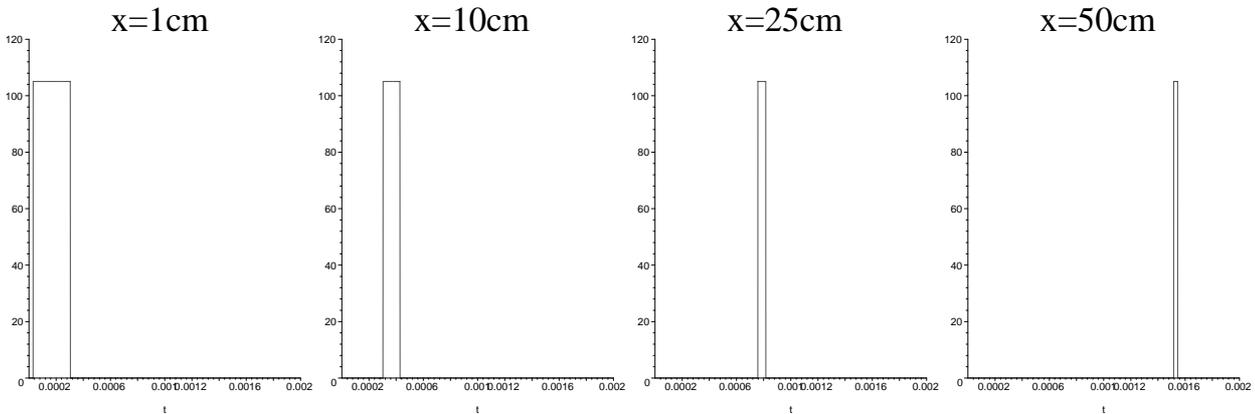


FIG. 3 – Réponse impulsionnelle du baffle plan (rayon 10 cm) pour diverses valeurs de  $x$  et pour un observateur situé sur l'axe ( $c=330\text{m/s}$ ).

Cependant, ce résultat très particulier, car intrinsèquement lié à la géométrie de la source, est utile car il permet de mieux comprendre les notions de **champ proche** et de **champ lointain**. En effet, pour une source monochromatique donnée de longueur d'onde  $\lambda$  (et de fréquence  $f$ ), la convolution par  $\Psi$  (fonction créneau) joue le rôle de filtre passe-bas (la transformée de Fourier d'un créneau temporel est un sinus cardinal en fréquence, centré à l'origine des fréquence). Ce créneau peut être arbitrairement aussi bref que l'on peut le souhaiter : il suffit de s'éloigner suffisamment. Partons donc d'un point suffisamment éloigné pour que la fréquence de coupure du créneau soit très grande par rapport à la fréquence de la source. En se rapprochant de la source, à une distance  $x_1$ , on peut alors rencontrer le cas suivant :

$$\sqrt{x_1^2 + a^2} - x_1 = \lambda$$

ce qui revient à écrire :

$$x_1 = \frac{a^2 - \lambda^2}{2\lambda}.$$

Cette relation ne peut être écrite bien entendu que si  $a > \lambda$ . Dans ce cas, la durée du créneau est égale à la période du signal : la convolution du signal par ce créneau donne alors un signal identiquement nul. On observe ce que l'on appelle un **zéro de Fresnel**.

Si on s'approche encore plus du baffle, on peut observer d'autres zéros, le  $p$ -ème zéro de Fresnel s'observant à la distance

$$x_p = \frac{a^2 - p^2\lambda^2}{2p\lambda}.$$

à condition que  $a > p\lambda$ .

On peut qualifier la zone entre l'origine et le premier zéro de Fresnel comme étant la **zone de Fresnel** : on est alors en **champ proche**. Au delà, on peut parler de **champ lointain**. Le critère pour définir champ proche et champ lointain est donc de comparer  $x$  avec la grandeur :

$$\frac{a^2 - \lambda^2}{2\lambda} \tag{7}$$

qui peut dans certains cas ( $\lambda \ll a$ ) s'écrire simplement :

$$\frac{a^2}{2\lambda}$$

- en **champ proche** la convolution par  $\Psi$  joue le rôle de filtre passe-bas. Le signal pourra alors être totalement éteint si la durée utile de  $\Psi$  est un multiple de  $\frac{\lambda}{c}$  : on est dans la zone de Fresnel, zone dans laquelle peuvent apparaître les "zéros de Fresnel".
- Au delà (*i.e.* en **champ lointain**), la convolution par  $\Psi$  ne joue plus de rôle majeur atténuateur.

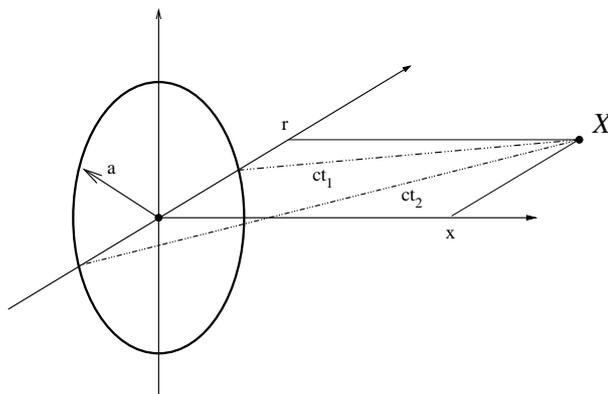


FIG. 4 – Baffle plan : analyse de la réponse impulsionnelle pour un point  $X$  dont la projection est situé en dehors du baffle.

Lorsque  $X$  se projette en dehors du baffle ( $r > a$ , figure 4), on peut montrer que [6] :

$$\Psi = \frac{c}{\pi} \operatorname{Arccos} \left( \frac{r^2 + c^2 t^2 - x^2 - a^2}{2r\sqrt{c^2 t^2 - x^2}} \right) \quad (8)$$

si  $\sqrt{c^2 t^2 - x^2} > a - r$  et  $\sqrt{c^2 t^2 - x^2} < a + r$ . Autrement,  $\Psi$  est nul.

Le signal est donc non nul pour  $t \in [t_1; t_2]$  avec :

$$t_1 = \frac{\sqrt{x^2 + (r - a)^2}}{c}$$

$$t_2 = \frac{\sqrt{x^2 + (r + a)^2}}{c}$$

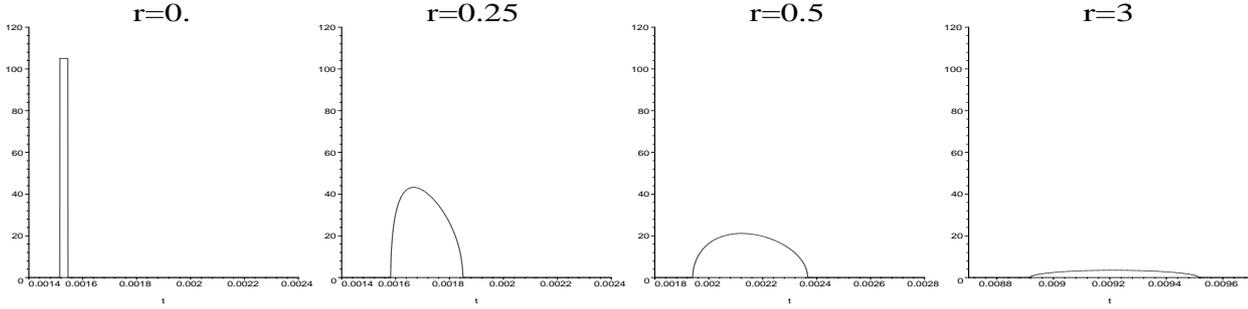


FIG. 5 – Réponse impulsionnelle du baffle plan pour diverses valeurs de  $r$  (distance de l'observateur par rapport à l'axe du baffle).  $c=330$ ,  $a=10\text{cm}$ ,  $x=50\text{cm}$ .

La figure 5 donne cette réponse sur l'axe ( $r=0$ ) ainsi que pour d'autres distances à l'axe ; les échelles temporelles et d'amplitude sont les mêmes. On peut noter la décroissance de l'amplitude due à la fois à l'augmentation de la distance (atténuation géométrique en  $\frac{1}{r}$ ) et à l'augmentation de la durée de la réponse (l'énergie restant constante). L'augmentation de la durée de la réponse joue l'effet d'un filtre passe bas.

Très curieusement, la transformée de Fourier  $\hat{\Psi}$  de l'expression 8 (valable donc en dehors de l'axe du baffle) existe dans les tables, ce qui permet d'écrire :

$$\hat{\Psi} = ac \int_0^\infty \frac{J_1(\beta a) J_0(\beta r)}{\sqrt{\beta^2 c^2 - \omega^2}} e^{-z\sqrt{\beta^2 c^2 - \omega^2}} d\beta \quad (9)$$

C'est cette curieuse expression qui a conduit Oberhettinger à formuler la réponse impulsionnelle du piston à partir du monde fréquentiel [5].

Enfin, on peut traiter le dernier cas ( $0 < r < a$ , figure 6). Il s'analyse en deux étapes :

– le cas du baffle plan classique pour  $t_0 < t < t_1$  avec :

$$t_0 = \frac{x}{c}$$

$$t_1 = \frac{\sqrt{x^2 + (a - r)^2}}{c}$$

On retrouve alors tout simplement une réponse constante puisque tout se passe comme si on était sur l'axe d'un baffle plan de rayon  $a - r$ . On a alors :

$$\Psi = \frac{c}{2}$$

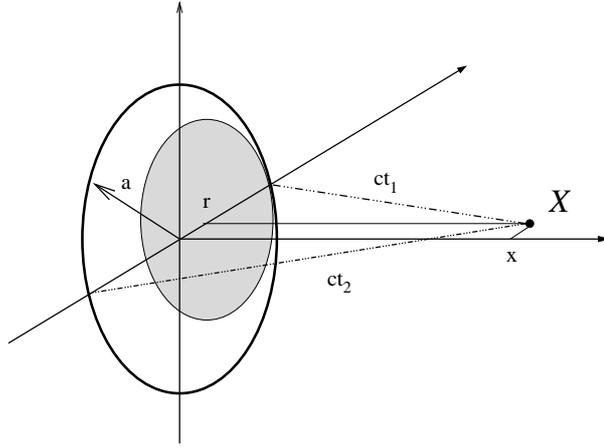


FIG. 6 – Baffle plan : analyse de la réponse impulsionnelle pour un point  $X$  dont la projection est située à l'intérieur du baffle. Au début, tout se passe comme si la source était un disque de rayon  $a - r$  avec le point  $X$  sur l'axe de ce disque. Ensuite, on considère une source en croissant de lune qui donne la même expression analytique que le cas de la figure 4.

– un cas intermédiaire pour  $t_1 < t < t_2$  avec :

$$t_1 = \frac{\sqrt{x^2 + (a - r)^2}}{c}$$

$$t_2 = \frac{\sqrt{x^2 + (a + r)^2}}{c}$$

On trouve alors le résultat obtenu “hors axe”, équation 8 :

$$\Psi = \frac{c}{\pi} \operatorname{Arccos} \left( \frac{r^2 + c^2 t^2 - x^2 - a^2}{2r\sqrt{c^2 t^2 - x^2}} \right)$$

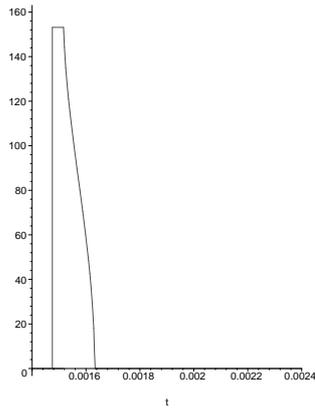


FIG. 7 – Réponse impulsionnelle pour un point  $X$  dont la projection est situé à l'intérieur du baffle.

Pour  $t = t_1$ , *i.e.*  $r = a$ , on montre aisément que l'expression 8 s'écrit :

$$\Psi = \frac{c}{\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{c}{2}$$

ce qui assure la continuité de  $\Psi$  puisque l'on retrouve l'expression 6.

### 1.4.2 Le baffle plan en champ lointain

En champ lointain, et hors axe, la réponse impulsionnelle du baffle plan (équation 8) ressemble à une demi-ellipse, de forme presque symétrique. En posant  $l = \sqrt{x^2 + r^2}$ , on peut montrer alors que [2] :

$$\Psi \simeq \frac{c a}{\pi r} \sin \phi \quad \text{avec} \quad \cos \phi = \frac{l(ct - l)}{ar} \quad \text{si} \quad ct \in [\sqrt{x^2 + (r - a)^2}; \sqrt{x^2 + (r + a)^2}]$$

la durée de ce signal étant à peu près  $t_s = \frac{2ar}{cl}$ . On peut alors montrer que l'expression de la transformée de Fourier de  $\Psi$  (équation 9) se simplifie et s'écrit :

$$\widehat{\Psi}(f) \simeq \frac{a^2}{l} \frac{J_1(\pi t_s f)}{\pi t_s f} e^{2j\pi \frac{l}{c} f}$$

La fonction de Bessel  $J_1(x)$  a son premier zéro en  $x = 3,837$ . Donc, en champ lointain, le baffle plan se comporte comme un filtre passe bas de fréquence de coupure :

$$\pi t_s f_c = 3,837 \Rightarrow f_c = \frac{1,22}{t_s} = 0,61 \frac{cl}{ar} \quad (10)$$

Remarquons que si, au lieu d'une ouverture circulaire, il y avait une fente infinie de largeur  $2a$ , la réponse impulsionnelle aurait été une simple fenêtre rectangulaire de durée :

$$\Delta t = t_s = 2 \frac{ar}{cl}$$

et la fréquence de coupure aurait été

$$f_{cR} = \frac{1}{\Delta t} = 0,5 \frac{cl}{ar} \quad (11)$$

Le baffle circulaire a donc le même comportement qu'une fenêtre d'apodisation : la fréquence de coupure est légèrement plus grande que celle correspondant à la fenêtre temporelle (élargissement du lobe), et on peut penser que les secondaires seront atténués. Cependant, on conserve le même ordre de grandeur pour la fréquence de coupure : celle liée à la fenêtre temporelle de la réponse impulsionnelle..

### 1.4.3 Premières conclusions

La force de l'analyse de Stepanishen est de s'affranchir totalement des notions de **champ proche** et de **champ lointain**. L'expression analytique que l'on trouve ainsi pour la réponse impulsionnelle du baffle plan est donc unique et indépendante de la zone de l'espace, ce que l'approche fréquentielle ne permet pas. Pour une source non impulsionnelle, il suffit de convoluer cette réponse impulsionnelle avec le signal temporel de la source pour avoir la réponse du baffle plan (ou bien effectuer un produit des transformées de Fourier dans l'espace des fréquences). C'est fondamentalement la raison qui a poussé, dans les années 80, les spécialistes d'échographie à adopter cette démarche, les transducteurs médicaux de l'époque étant très souvent à géométrie circulaire.

Tout d'abord, la première constatation que l'on peut noter est que le support temporel du signal,  $\Delta t$ , joue un rôle essentiel. Ce rôle peut s'analyser directement dans les deux cas suivants :

- Pour un observateur situé sur l'axe, la réponse est constante sur cet interval temporel. Il vient alors tout naturellement à l'esprit que l'on est dans le cas d'un filtre passe bas, dont la fréquence de coupure se déduit de manière évidente :

$$f_c = \frac{1}{\Delta t}$$

- En champ lointain, et hors axe, le signal a une forme elliptique et le premier minimum de son spectre, que l'on peut assimiler à une fréquence de coupure, est lié à la durée du signal par la relation :

$$f_c = \frac{1,22}{\Delta t}$$

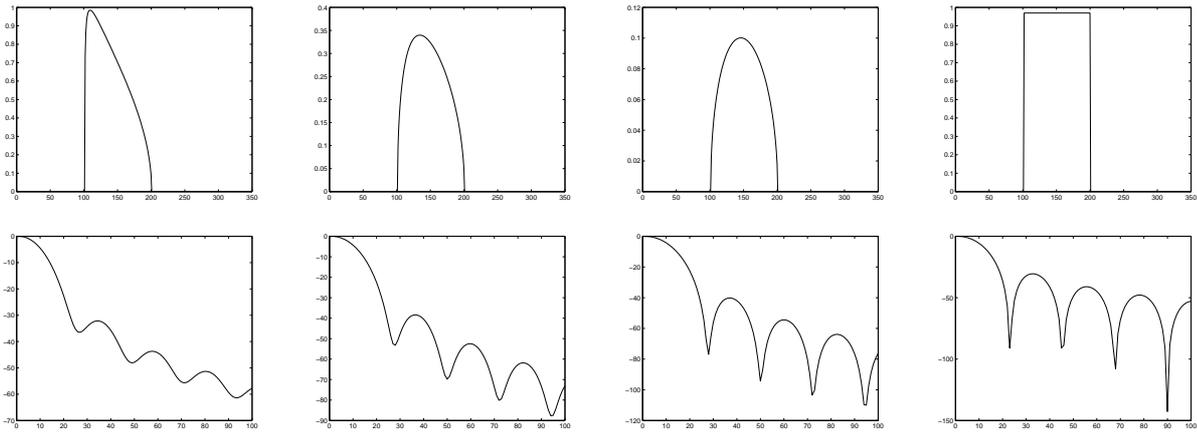


FIG. 8 – Réponse impulsionnelle (ligne supérieure) et fréquentielle (ligne inférieure) du baffle plan (rayon 10 cm) pour diverses valeurs de  $r$  et pour un observateur situé hors de l’axe ainsi que pour un observateur situé sur l’axe (figures de droite). Attention, sur ces figures, l’échelle des temps est arbitraire et la durée des signaux identiques, ce qui permet de comparer les spectres à un facteur d’échelle près.

Stricto sensu, ces deux relations ne peuvent se généraliser de manière exacte, mais, globalement, on peut observer sur plusieurs cas que la fonction “piston hors axe” présente bien une fréquence de coupure, plus ou moins affirmée, et qui est plus ou moins l’inverse de la durée du signal, comme l’illustre la figure 8.

En second lieu, pour une excitation sinusoïdale, de période  $\tau$ , de fréquence  $f$  et de longueur d’onde  $\lambda$ , on voit que la durée de la réponse est à comparer avec la durée de l’arche de sinusoïde  $\tau$ . Si ces deux durées sont voisines, on peut s’attendre à ce que le signal sinusoïdal soit filtré, puisque la fréquence de coupure de l’antenne est alors voisine de la fréquence du signal.

La démarche qu’il est alors tentant de proposer consiste à se focaliser sur la durée de la réponse impulsionnelle et sur sa comparaison avec la période du signal. Si cette durée est très faible, le signal ne sera quasiment pas modifié. Si cette durée est comparable, on peut s’attendre à un minimum dans la réception du signal. Une validation de ce principe peut se faire sur l’étude de l’antenne rectangulaire en propagation 2-D.

## 1.5 Application : l’antenne rectangulaire

### 1.5.1 Description du problème

Une intéressante application de cette approche est celle de l’antenne rectangulaire, que l’on analysera ici par souci de clarté et de simplification dans l’espace 2-D.

Dans l’espace 2-D, on considère donc une antenne-segment AB de longueur  $2L$ , d’axe  $Ox$ , parallèle à  $Oy$  (figure 9). On suppose qu’elle émet un signal “bande étroite” d’amplitude unité, centré sur la fréquence  $f$ , de période  $\tau$  et de longueur d’onde  $\lambda$ . On va se placer en **champ lointain**, ce qui permet de considérer que la distance OP est, à l’échelle de la longueur d’onde  $\lambda$ , comparable à la distance OA. Par un simple développement limité au premier ordre, on a :

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{x^2 + L^2} \\ &\simeq x^2 + \frac{L^2}{2x} \end{aligned}$$

La condition sur ce développement limité s’écrit alors  $\frac{L^2}{2x} \ll \lambda$ , ce qui est la définition du champ lointain (formule 7) : on est en zone de Fraunhofer.

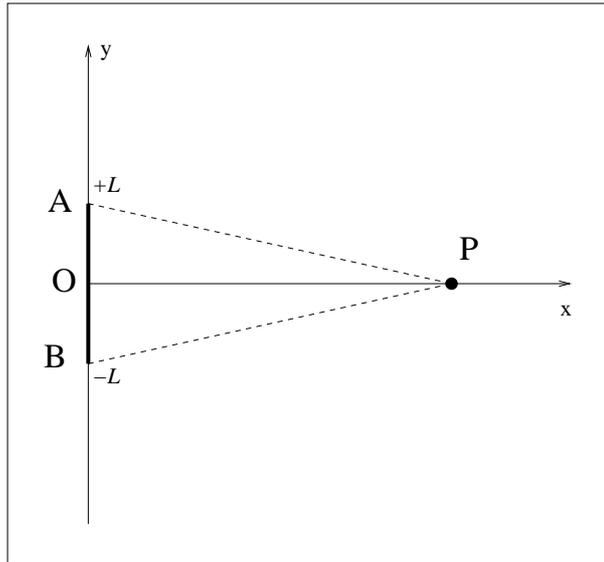


FIG. 9 – Modèle d'antenne linéaire de longueur  $2L$ .

### 1.5.2 Calcul classique de la réponse de l'antenne

La réponse d'une antenne est décrite par exemple par la relation donnant l'amplitude du champ reçu en fonction de l'angle que fait l'axe de l'antenne avec un observateur situé en un point  $P$  : on a alors une représentation polaire.

En champ lointain, on peut aussi décrire cette amplitude en fonction de la distance du point  $P$  à l'axe de l'antenne (figure 10).

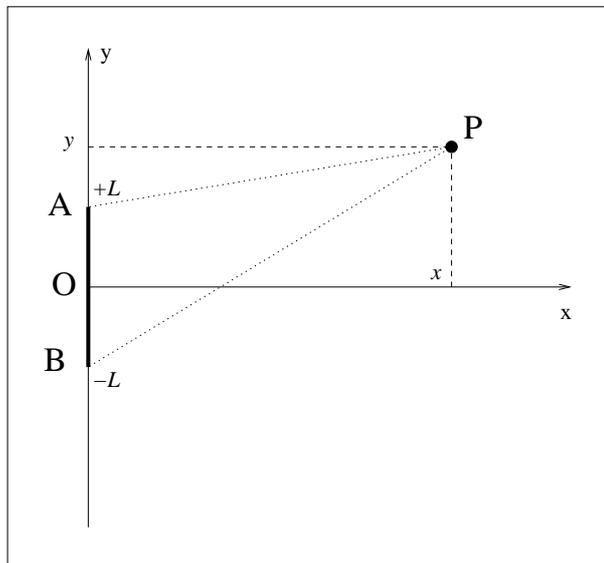


FIG. 10 – Calcul de la réponse d'une antenne linéaire : déplacement de l'observateur perpendiculairement à l'axe de l'antenne.

Pour un point  $P$ , de coordonnées  $(x, y)$ , à la distance  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  de l'origine, la réponse de l'antenne peut se calculer en appliquant le principe de Huyghens : tous les points de l'antenne agissent comme des sources élémentaires isotropes unitaires et le champ se calcule par intégration (application de l'équation 3) :

$$A(x, y) = \int_{-L}^{+L} \frac{e^{jk\sqrt{x^2+(y-y_1)^2}}}{\sqrt{x^2+(y-y_1)^2}} dy_1 \quad (12)$$

Puisque l'on est en champ lointain, cette intégrale se simplifie :

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \frac{e^{jkr}}{r} \int_{-L}^{+L} e^{j\frac{kyy_1}{x}} dy_1 \\ &= \frac{e^{jkr}}{r} 2L \frac{\sin(\frac{kLy}{x})}{\frac{kLy}{x}} \end{aligned} \quad (13)$$

On a ainsi retrouvé que la réponse temporelle est le célèbre sinc (sinus cardinal). On sait alors que les zéros sont observés pour les valeurs  $y_p$  (avec  $p > 0$ ) :

$$y_{0,p} = p \frac{\lambda x}{2L} \quad (14)$$

et que les lobes secondaires sont observables en

$$y_{max,p} = (p + \frac{1}{2}) \frac{\lambda x}{2L} \quad (15)$$

Sur le secondaire d'ordre  $p$ , on peut remarquer que la valeur absolue de l'amplitude peut s'écrire :

$$|A(x, y_{max,p})| = A(x, 0) \frac{2}{\pi} \frac{1}{2p+1} \quad (16)$$

### 1.5.3 Autre méthode : “Huyghens point à point” et découpage en deux sous antennes

Le calcul de Huyghens peut curieusement s'effectuer autrement et permettre de mettre en évidence les propriétés des zéros. En effet, rien n'empêche de découper une intégrale en deux autres intégrales :

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \frac{e^{jkr}}{r} \int_{-L}^{+L} e^{j\frac{kyy_1}{x}} dy_1 \\ &= \frac{e^{jkr}}{r} \left( \int_{-L}^0 e^{j\frac{kyy_1}{x}} dy_1 + \int_0^{+L} e^{j\frac{kyy_1}{x}} dy_1 \right) \end{aligned}$$

et d'effectuer ensuite un changement de variable  $y_1 = y'_1 - L$  dans le premier terme intégral

$$A(x, y) = \frac{e^{jkr}}{r} \left( \int_0^L e^{j\frac{ky(y'_1-L)}{x}} dy'_1 + \int_0^{+L} e^{j\frac{kyy_1}{x}} dy_1 \right)$$

ce qui donne :

$$A(x, y) = \frac{e^{jkr}}{r} \left( e^{-j\frac{kyL}{x}} + 1 \right) \int_0^{+L} e^{j\frac{kyy_1}{x}} dy_1$$

Le terme entre parenthèse s'annule pour  $\frac{kyL}{x} = \pi \text{ mod. } 2\pi$ , *i.e.*

$$y_p = p \frac{\lambda x}{2L}$$

Avec  $p > 0$ , on retrouve donc exactement les zéros obtenus précédemment (formule 14) sans qu'aucun calcul d'intégrale n'ait été requis.

Interprétons maintenant autrement ce découpage d'intégrale (exact au sens mathématique du terme) : découpons l'antenne en deux antennes identiques de taille moitié (on supposera que la juxtaposition de ces deux antennes se comporte exactement comme l'antenne initiale : ce qui veut dire que la physique se

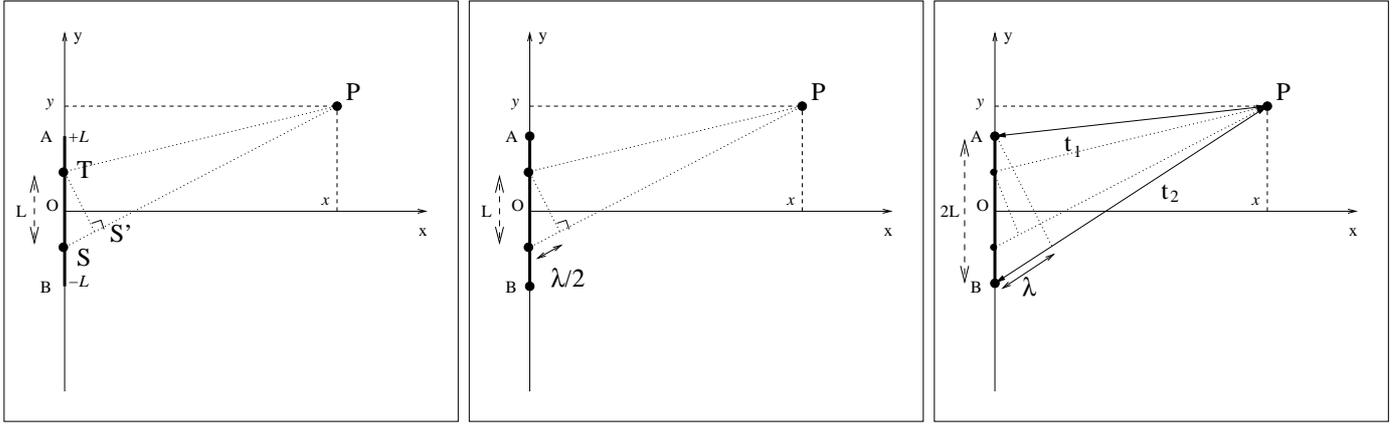


FIG. 11 – Huyghens point à point. A gauche, on apparie les points  $T$  et  $S$  de l’antenne (de dimension  $2L$ ) de telle sorte que la distance entre  $T$  et  $S$  soit  $L$ . On considère une position particulière de  $P$  telle que la différence entre le trajet  $PS$  et le trajet  $PT$  soit égal à  $\frac{\lambda}{2}$  : dans ce cas la somme des contributions de  $S$  et de  $P$  est nulle (figure du milieu). La totalité de l’antenne est couverte dès lors que le point  $T$  occupe toutes les positions entre  $O$  et  $A$  : les contributions de tous ces points seront annulées par les contributions de tous les points entre  $B$  et  $O$ . Notons alors que la différence des trajets entre  $P$  et les bords d’antenne (points  $A$  et  $B$ ) est égal à  $\lambda$ .

doit ici d’être linéaire). Considérons arbitrairement sur la demi-antenne supérieure un point  $T$  : on peut lui associer un point sur la demi-antenne inférieure  $S$ . Ces deux points sur l’antenne sont distants de  $L$  (voir figure 11).

Si l’on compare les trajets  $TP$  et  $SP$ , on constate, pour  $y > 0$ , que le trajet  $SP$  est plus long d’une longueur  $SS'$ . Or, comme nous sommes en hypothèse monochromatique, on sait que si ce trajet est égal à  $\frac{\lambda}{2}$ , on observera un phénomène d’interférences destructives et que l’amplitude en  $P$  sera nulle. Pour observer ce phénomène, il suffit que (en approximant angle, tangente et sinus) :

$$\frac{y}{x} = \frac{\lambda}{2L} \quad i.e. \quad y = \frac{\lambda x}{2L}$$

On retrouve bien évidemment la même condition que précédemment (relation 14 avec  $p = 1$ ), qui ne dépend pas de la position choisie pour le point arbitraire  $T$ .

Si on considère donc que chaque point de la demi antenne supérieure peut ainsi être associé à un point de la demi-antenne inférieure, et puisque la condition d’annulation ne dépend pas du point, mais uniquement de la dimension de l’antenne totale, de la longueur d’onde et de la position de  $P$ , on en déduit que, pour cette valeur de  $y$ , on observe une annulation de l’amplitude et donc le premier zéro de l’antenne.

En résumé, pour une antenne de longueur  $2L$ , on observe le premier zéro en :

$$y_1 = \frac{\lambda x}{2L} \tag{17}$$

et, dans ce cas, la différence entre le trajet  $PA$  et le trajet  $PB$  est égal à  $\lambda$  (figure 11, à droite).

$$d(PB) - d(PA) = \lambda \tag{18}$$

On a ainsi trouvé un critère qui ne fait intervenir que les bords de l’antenne.

En passant dans le domaine temporel, soient  $t_1$  la durée du trajet  $AP$  et  $t_2$  la durée du trajet  $BP$ . On vient de montrer que le premier zéro, en  $y_1$ , vérifie la relation :

$$t_2 - t_1 = \tau$$

On retrouve la philosophie précédemment appliquée au baffle plan consistant à privilégier l’analyse de la durée de la réponse impulsionnelle : on applique donc cette démarche soit lors de la définition des zéros de Fresnel, soit en champ lointain pour définir les fréquences de coupure.

On peut se demander si cette annulation de l'amplitude correspond bien à un *premier zéro*. Le moyen le plus simple est de considérer la distance  $S'S$ . Lorsque  $P$  est sur l'axe, cette distance est nulle. Elle est monotone puisque l'on peut écrire  $SS' = \frac{Ly}{x}$ . Puisque l'on est en champ lointain, la contribution de chaque demi antenne s'écrit :

$$\int_0^{+L} e^{j \frac{ky y_1}{x}} dy_1$$

et dans le terme intégral, le terme de phase varie entre 0 et  $\pi$ . Donc le résultat de l'intégrale a une amplitude non nulle.

Toujours de manière phénoménologique, considérons une variation continue de  $y$  à partir de la valeur nulle. Plusieurs étapes (illustrées figure 12) peuvent alors s'observer :

- Au fur et à mesure que  $y$  croît, la différence entre les trajets  $AP$  et  $BP$  augmente jusqu'à la valeur  $\frac{\lambda}{2}$  : comme précédemment, on montre aisément que l'amplitude décroît, mais demeure non nulle.
- Puis, pour des valeurs de  $y$  supérieure, on peut construire dans l'antenne initiale une sous antenne  $AS$  telle que la différence de trajet entre  $AP$  et  $SP$  soit égale à  $\frac{\lambda}{2}$ . Par un raisonnement identique au précédent, ce point  $S$  est l'origine d'une sous antenne "inférieure"  $SB$  qui peut être associée à une sous antenne "supérieure" de même dimension  $AR$  de telle sorte qu'elles soient en opposition de phase et aient donc une contribution nulle au point  $P$ . On peut alors considérer que l'antenne initiale est réduite à une sous antenne de dimension réduite  $RS$ .
- Enfin, le point  $A'$  se confond avec le point  $O$  : la sous antenne  $RS$  est de dimension nulle. On a alors découpé l'antenne initiale en deux sous antennes égales qui sont en opposition de phase. L'amplitude reçue en  $P$  est alors nulle.

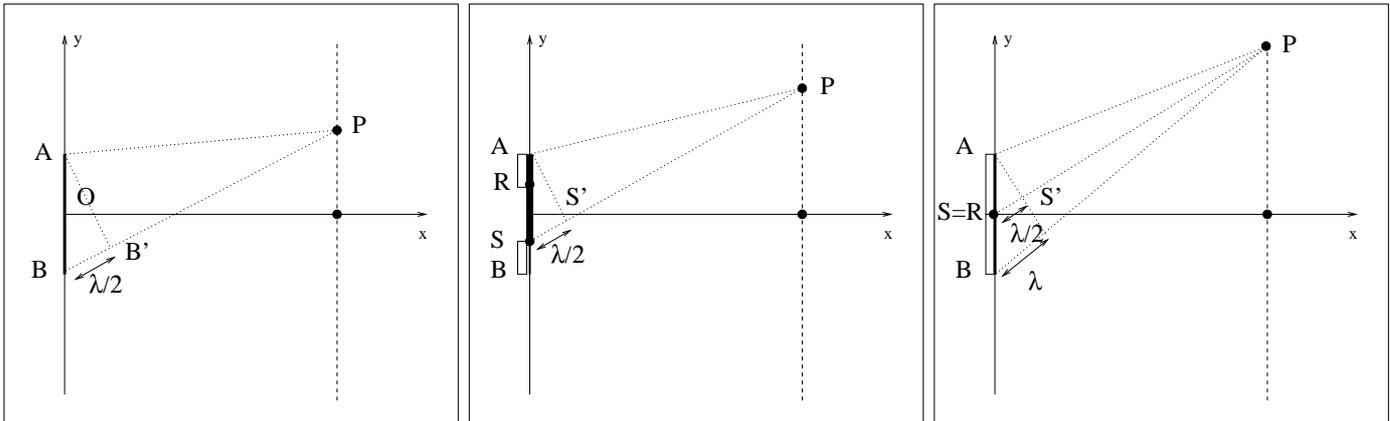


FIG. 12 – Huyghens point à point. Le point  $P$  s'éloigne de l'axe. Tout d'abord (figure de gauche),  $P$  atteint une position telle que la différence de trajet entre  $P$  et les bords d'antenne (points  $A$  et  $B$ ) est égale à  $\frac{\lambda}{2}$ . Puis (figure du milieu), tandis que le point  $P$  continue de s'éloigner, on peut définir une sous antenne  $AS$  telle que la différence de trajet entre  $P$  et les bords de cette sous antenne soit égale à  $\frac{\lambda}{2}$ . Cela revient à définir deux sous antennes  $AR$  et  $SB$  telles que la somme de leur contribution à l'amplitude reçue en  $P$  soit nulle (opposition de phase). Enfin (figure de droite), on arrive au cas de la figure 11 où l'antenne initiale est découpée en deux sous antennes identiques (puisque  $S$  est confondu avec  $R$ ) telles que la somme de leur contribution à l'amplitude reçue en  $P$  soit nulle. On arrive ainsi au premier zéro de l'antenne initiale.

#### 1.5.4 “Huyghens point à point” et découpage en $2p$ sous antennes : les positions des zéros

Le raisonnement qui nous a menés au découpage en deux sous antennes peut s'appliquer à  $2p$  sous antennes, de telle sorte qu'au point  $P$  chaque paire de sous antennes ait une contribution nulle à l'amplitude du signal reçu. Par construction (sous antennes identiques), chaque paire de sous antennes a une largeur  $\frac{L}{p}$  et on applique le raisonnement du paragraphe précédent à cette paire : un zéro s'observe pour

une position  $y_p$  du point  $P$  donnée par la relation :

$$y_p = p \frac{\lambda x}{2L}$$

Pour l'antenne initiale, vue comme l'association de ces  $p$  paires d'antennes, ces positions correspondent à des zéros. Sans calcul, on retrouve donc exactement les zéros obtenus précédemment de manière analytique (formule 14).

Ce principe est donc illustré figure 13 avec des découpages en 2 sous antennes, 4 sous antennes et 6 sous antennes.

On peut donner une définition de la résolution en l'identifiant à la distance entre le premier zéro et l'origine : dans ce cas, deux cibles seront séparées si l'une d'entre elles est sur l'axe du lobe principal et que la seconde se trouve sur le premier zéro.

$$res_y = \frac{\lambda x}{2L} \quad (19)$$

Cette définition peut différer de celles trouvées dans la littérature car le choix du premier zéro est un critère sévère. En général, on trouve la formulation suivante :

$$res_y = \beta \frac{\lambda x}{2L} \quad (20)$$

avec  $\beta \leq 1$  ( $\beta = 0,61$  pour la relation 10 et  $\beta = 0,5$  pour la relation 11).

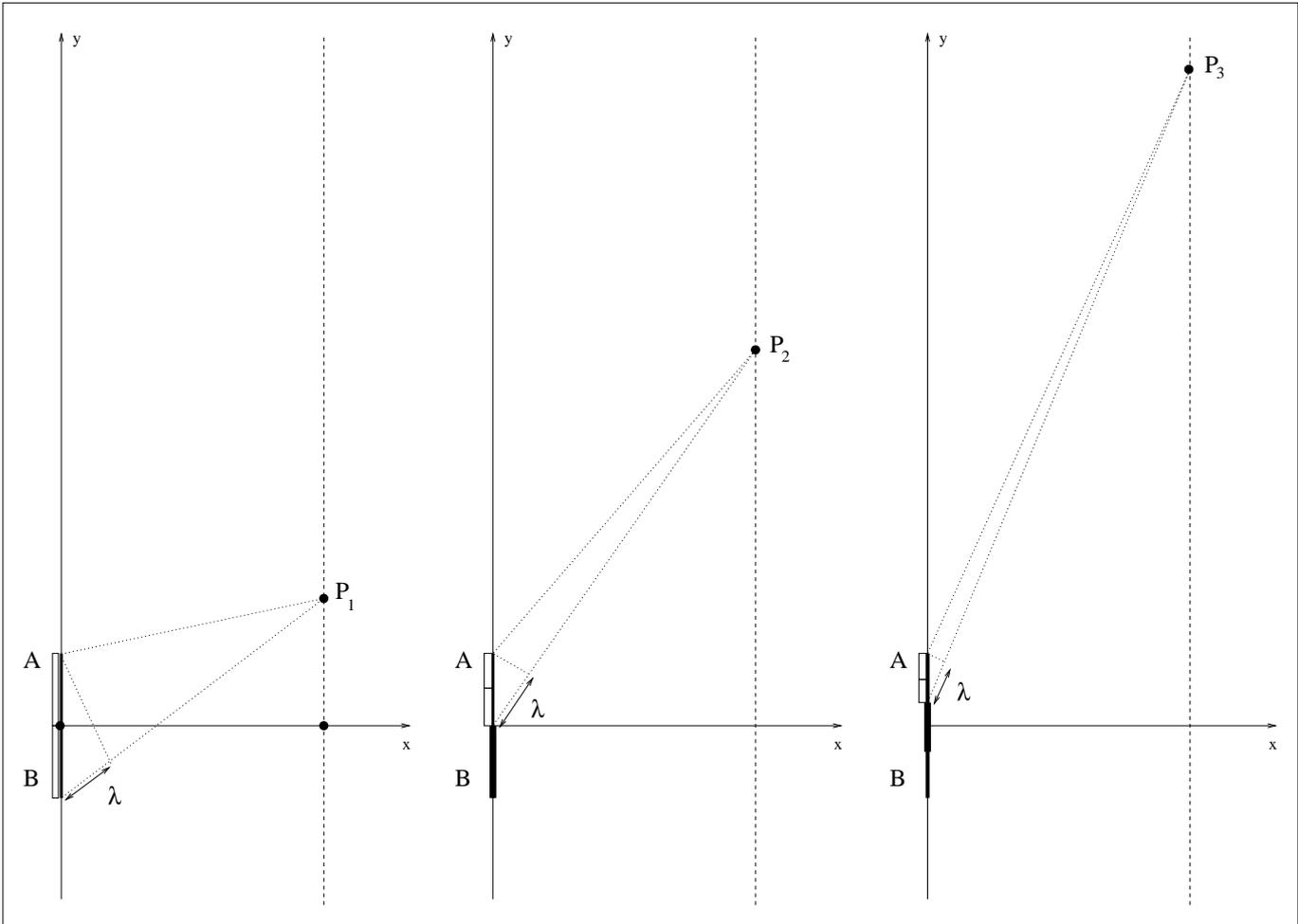


FIG. 13 – Huyghens point à point. A gauche, le critère initial pour l’antenne entière (largeur  $2L$ ), découpée en deux sous antennes identiques (largeur  $L$ ) donnant la position du premier zéro :  $y_1$ . Au milieu, on considère 2 sous antennes identiques (largeur  $L$ ) : dans chacune de ces sous antennes, on peut appliquer le critère donnant la position de leur zéro (exemple sur la sous antenne supérieure), ce qui donne le deuxième zéro de l’antenne initiale. A droite, on considère 3 sous antennes identiques (largeur  $\frac{2L}{3}$ ) : dans chacune de ces sous antennes, on peut appliquer le critère donnant la position de leur zéro, qui est en fait le troisième zéro de l’antenne initiale.

### 1.5.5 “Huyghens point à point” et découpage en $2p + 1$ sous antennes : les positions des secondaires

Si la recherche des zéros passe par un découpage en nombre pair de sous antennes identiques, les secondaires peuvent se retrouver simplement en découpant l’antenne en nombre impair de sous antennes identiques. Dans le cas de 3 sous antennes (figure 14), on va donc rechercher la position de  $P$  telle qu’elle corresponde au premier zéro de 2 sous antennes (antenne  $SB$ ), dont la dimension globale est  $\frac{4L}{3}$ . En appliquant la relation 17, on a alors directement la position du premier secondaire :

$$y_{sec,1} = \frac{\lambda x}{\frac{4L}{3}} = \frac{3 \lambda x}{2 \cdot 2L}$$

On remarque que la troisième sous antenne (antenne  $AS$ ) présente alors une différence de marche égale à  $\frac{\lambda}{2}$  entre ses deux bords d’antenne : elle a donc une contribution non nulle en  $P$ .

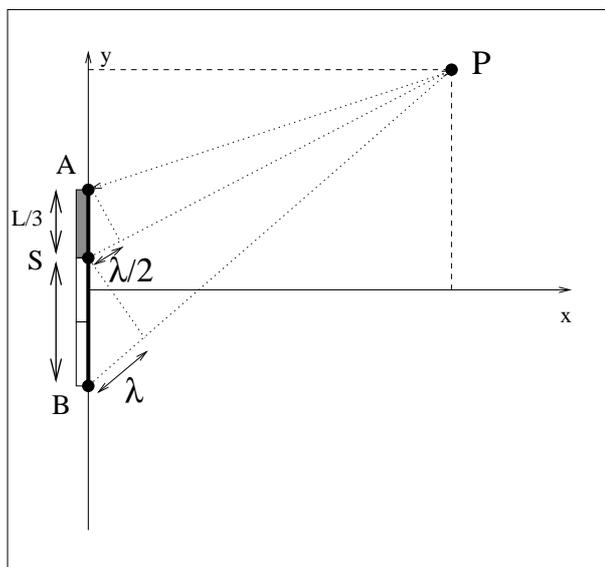


FIG. 14 – Huyghens point à point : recherche du premier secondaire. On découpe l’antenne en trois sous antennes identiques. On choisit la position de  $P$  de sorte que le critère d’annulation soit vérifié, par exemple, pour les deux sous antennes inférieures. Tout se passe comme si l’antenne “effective” avait une longueur  $\frac{L}{3}$ .

Il est facile de généraliser au  $p$ -ème secondaire, donné par la relation

$$y_{sec,p} = \frac{2p + 1}{2} \frac{\lambda x}{2L}$$

Quant à l’amplitude reçue, on constate que, dans le cas du  $p$ -ème secondaire, la longueur de la sous antenne utile est égale à

$$L_{utile,p} = \frac{1}{2p + 1}$$

On sait donc que l’amplitude reçue sera borné par ce terme.

### 1.5.6 “Huyghens point à point” : synthèse

L’approche originale proposée ici propose, par simple analyse géométrique et par simple analyse de la durée du signal reçu (ou de manière équivalente, par analyse des différences de marche entre bords d’antennes), un positionnement des zéros et des lobes secondaires.

Zéro	$y_{zero,p} = p \frac{\lambda x}{2L}$
Secondaire	$y_{sec,p} = (p + \frac{1}{2}) \frac{\lambda x}{2L}$
Résolution (distance du premier zéro)	$res_y = \frac{\lambda x}{2L}$

Ce sont exactement les valeurs trouvées par l'approche "classique" (équations 14 et 15).

Mieux, pour les secondaires, l'amplitude se déduit simplement du fait que, pour le secondaire d'ordre  $p$ , seule une portion d'antenne,  $\frac{1}{2p+1}$ , est à l'origine du signal reçu. Or si l'on considère le résultat théorique (formule 16), on voit qu'au facteur  $\frac{2}{\pi}$  près, on retrouve le même résultat.

Ce terme correctif correspond au fait que la phase du signal émis par la portion d'antenne, de dimension  $\frac{2L}{2p+1}$ , au point correspondant à un secondaire, varie entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$ . Or on a :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi = \pi$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{j\phi} d\phi = 2$$

Le fait que la phase ne soit pas uniforme sur cette portion d'antenne donne donc ce terme correctif.

L'analyse temporelle semble donc un outil intuitif permettant rapidement de dimensionner un problème de diffraction. En comparant la durée de la réponse impulsionnelle avec la période du signal, on en conclut aisément si le système "passe" le signal émis, ou si le système peut se comporter comme un filtre.

Bien entendu, cette analyse est principalement qualitative : son utilisation quantitative requiert soit des termes correctifs quant à la fréquence effective de coupure, soit des ajustements quant à l'amplitude effective du signal reçu.

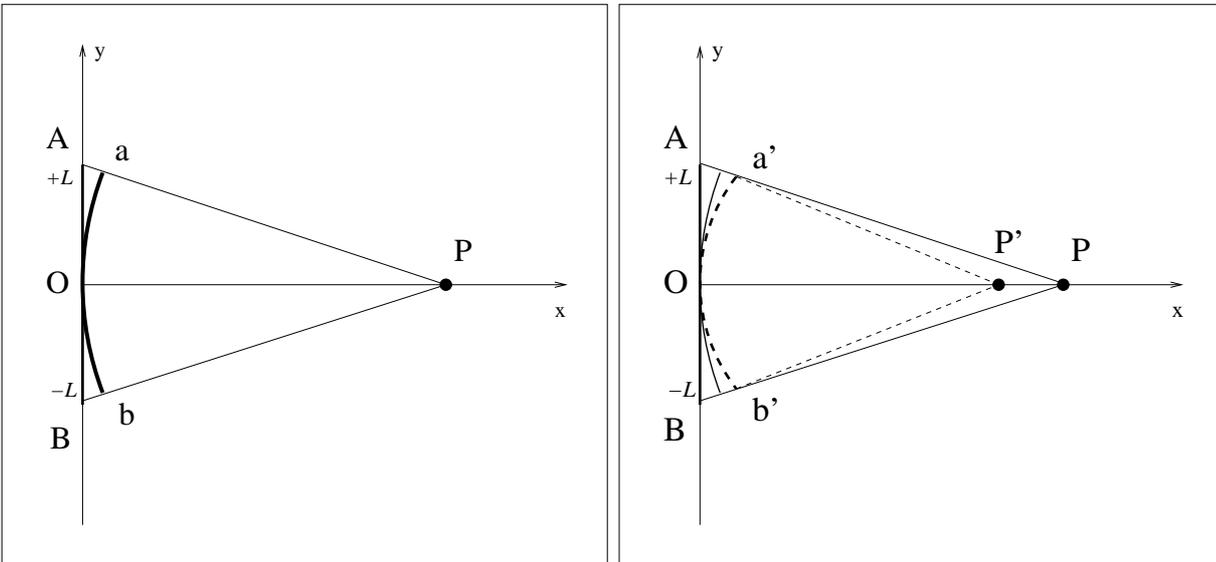


FIG. 15 – Antenne linéaire. La focalisation est assurée au point  $P$  de sorte que l'antenne (extrémités  $A$  et  $B$ ) est assimilable à une portion de cercle centré en  $P$  et d'extrémités  $a$  et  $b$  (figure de gauche). Pour un point  $P'$  plus proche de l'antenne, la focalisation est assurée si l'antenne est assimilable à une portion de cercle centré en  $C$  et d'extrémités  $a'$  et  $b'$  (figure de droite).

## 1.6 Autres formes d'antenne : Antenne concave

Dans le cas de l'imagerie échographique, on montre aisément que les tissus imagés sont en champ proche. Aussi les résultats de type impulsionnels sont d'un grand intérêt. Ceci explique pourquoi c'est dans cette discipline qu'a été démontré la formulation de la réponse impulsionnelle de l'antenne concave [1].

La formulation obtenue n'est malheureusement pas des plus simples.

D'autres configurations géométriques ont été aussi analysées, comme les transducteurs coniques [4]. C'est d'ailleurs dans cet article que Mathias Fink a posé son concept de "volume isochrone".

## 2 Applications de l'approche temporelle : le Radar à Synthèse d'Ouverture (RSO)

### 2.1 Profondeur de champ d'une antenne

L'approche temporelle est très utile dans l'analyse de la profondeur de champ d'une ouverture focalisée. Considérons donc dans le plan une ouverture linéaire  $AB$  focalisée au point  $P(x, 0)$  : le temps de vol entre ce point  $P$  et tout point de cette ouverture est donc identique. Globalement, l'antenne linéaire focalisée est une portion de cercle  $ab$  (figure 15 gauche) et on a  $d(OP) = d(aP) = d(bP)$ .

Considérons maintenant sur l'axe un autre point  $P'(x', 0)$ . Si l'antenne linéaire  $AB$  est focalisée en ce point  $P'$ , elle sera assimilable à une autre portion de cercle  $a'b'$  (figure 15 droite) et on a  $d(OP') = d(a'P') = d(b'P')$ .

Puisque les portions de cercles changent avec la position du point  $P$ , on voit que la focalisation d'une onde doit s'effectuer en tout point  $P$  visé, ce qui n'est guère réaliste. En pratique, on prend en compte la profondeur de champ, qui permet d'avoir une réponse "correcte" non seulement sur un point, mais dans le voisinage d'un point. Cette profondeur de champ est donc déterminé par deux points  $C$  et  $D$  de part et d'autre du point  $P$  initialement visé

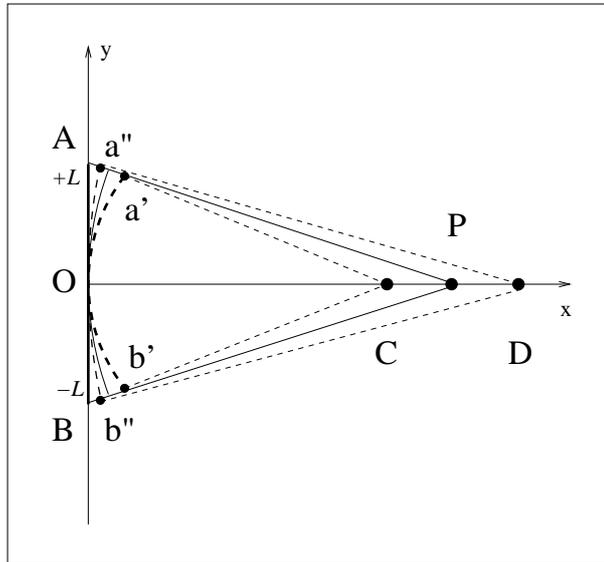


FIG. 16 – Profondeur de champ d'une antenne focalisée en  $P$ . Pour un point  $C$  plus proche de l'antenne, la focalisation est théoriquement assurée si l'antenne est assimilable à une portion de cercle centré en  $C$  et d'extrémités  $a'$  et  $b'$ . Pour un point  $D$  plus éloigné de l'antenne, la focalisation est théoriquement assurée si l'antenne est assimilable à une portion de cercle centré en  $C$  et d'extrémités  $a''$  et  $b''$ .

Pour établir ces positions caractéristiques, on va simplement adopter une approche temporelle identique à celle utilisée dans l'antenne rectangulaire. En se plaçant dans un cadre monochromatique (défini

par une longueur d'onde  $\lambda$ ), on considère donc que la distance extrême du point  $C$  par rapport au point  $P$  doit vérifier :

$$d(aC) - d(OC) = \lambda$$

Dans ce cas, on s'attend à ce que le signal soit nul. Vu que l'on se place en champ lointain, cette relation est équivalente à :

$$(d(AC) - d(OC)) - (d(AP) - d(OP)) = \frac{\lambda x^2}{L^2}$$

ce qui donne la position des points  $C$  et  $D$  de la figure 16.

On a ainsi une première approximation pour la taille de la tâche de focalisation<sup>2</sup> :

$$d_{champ} = 2 \frac{\lambda x^2}{L^2}$$

Si on remplace la dimension de l'ouverture par la résolution latérale (formule 19), on obtient :

$$d_{champ} = 4 \frac{res_y^2}{\lambda}$$

## 2.2 Antenne synthétique

### 2.2.1 Principes

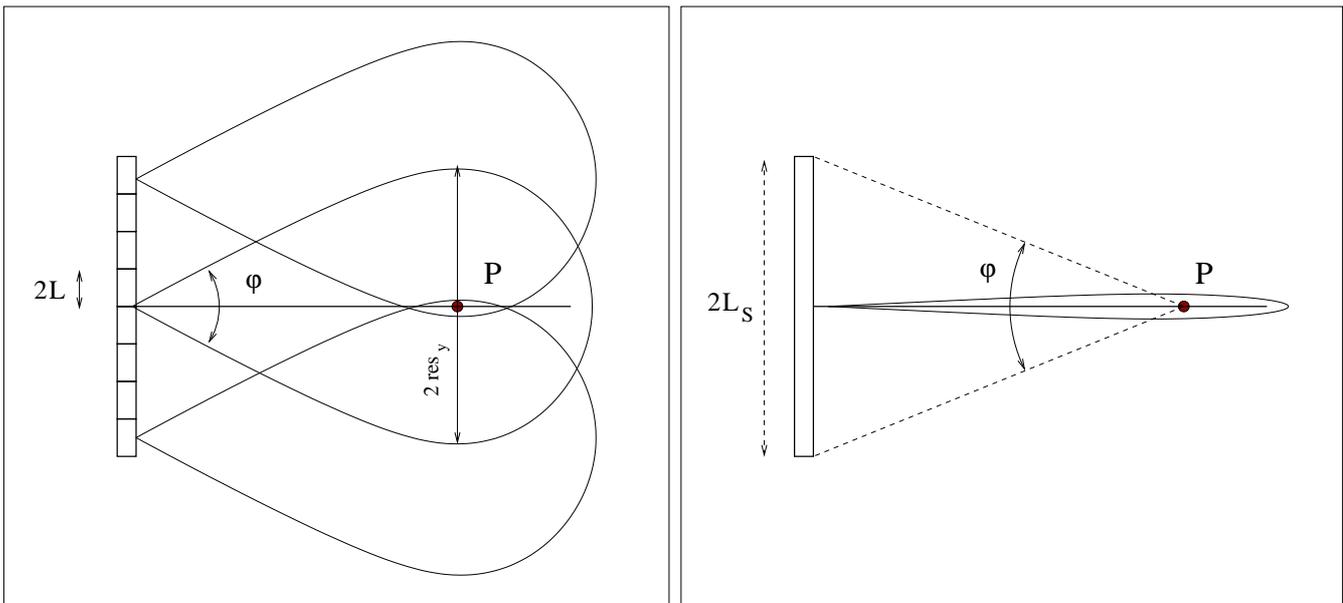


FIG. 17 – Antenne synthétique. A gauche la cible demeure dans le lobe principal (d'ouverture angulaire  $\varphi$ ) durant le déplacement de l'antenne. A droite, tout se passe comme si l'antenne a une grande taille de sorte que le lobe soit affiné.

Une antenne plane a donc une résolution azimutale que l'on peut définir en fonction de la longueur d'onde, de la distance d'observation  $R$  et de la dimension de l'antenne  $2L$  (formule 19) :

$$res_y = \frac{\lambda R}{2L}$$

<sup>2</sup>En posant  $D = 2L$ ,  $F = x$  et  $d_z = d(CD)$ , on trouve une expression proche de celle proposée par Vignon [7] :  
 $d_z = 7\lambda \left(\frac{F}{D}\right)^2$

Ce résultat est très pénalisant en pratique dans le monde de l'électromagnétisme, par exemple pour les radars satellitaires pour lesquels la distance entre l'objet à imager et l'antenne est de l'ordre de plusieurs centaines de kilomètres. Dans cette configuration, une antenne de plusieurs kilomètres est requise pour avoir une résolution décimétrique, ce qui est irréalisable. Dans le cas du satellite ERS, l'antenne a une longueur  $2L = 10\text{m}$ , se trouve à peu près à une distance  $R=1000\text{km}$  et la longueur d'onde est  $\lambda = 5\text{cm}$ . La résolution est alors  $res_y = 5\text{km}$ .

Il est néanmoins possible d'avoir une résolution à l'échelle de la dimension de l'antenne, c'est à dire décimétrique, avec un tel système (et quelle que soit la distance d'observation  $R$ ) si l'on peut archiver les acquisitions au fur et à mesure du déplacement du système. En effet, une antenne de longueur  $2L$  a un lobe principal dont l'ouverture  $\varphi$  se définit par la relation :

$$\varphi = \frac{2res_y}{R} = \frac{\lambda}{L} \quad (21)$$

Cela revient à constater qu'une cible demeure visible sur une distance  $2L_S$  (figure 17)

$$2L_S = R\varphi = 2res_y = \frac{\lambda R}{L} \quad (22)$$

et si l'on peut considérer que la connaissance de cet objet sur cette distance  $2L_S$  revient à se doter d'une antenne synthétique de largeur  $2L_S$ , la nouvelle résolution  $res_{y,S}$  s'exprime alors

$$res_{y,S} = \frac{\lambda R}{2L_S} = \frac{\lambda R}{\frac{\lambda R}{2L}} = L.$$

On trouve ainsi le résultat bien connu qu'une antenne synthétique a une résolution égale à la moitié de l'antenne physique, quelle que soit la distance à laquelle on se place. En fait, plus on s'éloigne, plus la dimension de l'antenne synthétique augmente (le point  $P$  est en pratique visible plus longtemps).

Pour ERS, on obtient finalement une antenne synthétique de 10km (cas extrême, avec  $\beta = 1$ ) et une résolution de 5m (l'échantillonnage s'effectuant à 4,6m).

Il est intéressant de noter que cette résolution est indépendante aussi de la définition de la résolution de l'antenne. En effet, si l'on prend la relation 20

$$res_y = \beta \frac{\lambda R}{2L}$$

on définira la visibilité d'une cible par

$$2L_S = 2res_y = \beta \frac{\lambda R}{L}$$

et la nouvelle résolution  $res_{y,S,\beta}$  s'exprime alors

$$res_{y,S,\beta} = \beta \frac{\lambda R}{2L_S} = \beta \frac{\lambda R}{\beta \frac{\lambda R}{L}} = L$$

relation identique à celle déjà trouvée précédemment.

Une simple considération entropique permet d'affirmer que si la résolution azimutale est  $L$ , il faut échantillonner spatialement l'acquisition au moins tous les  $L$ . Mais une analyse de type temporelle peut aussi s'appliquer ici pour obtenir ce résultat.

Soit  $\delta$  le pas d'échantillonnage sur l'antenne synthétique. Considérons la différence de temps de vol  $\tau$  sur une extrémité de l'antenne synthétique (coté  $y > 0$ ) entre les deux dernières acquisitions (figure 18). On a :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{c} \left( \sqrt{R^2 + L_S^2} - \sqrt{R^2 + (L_S - \delta)^2} \right) \\ &\simeq \frac{L_S \delta}{Rc} \end{aligned} \quad (23)$$

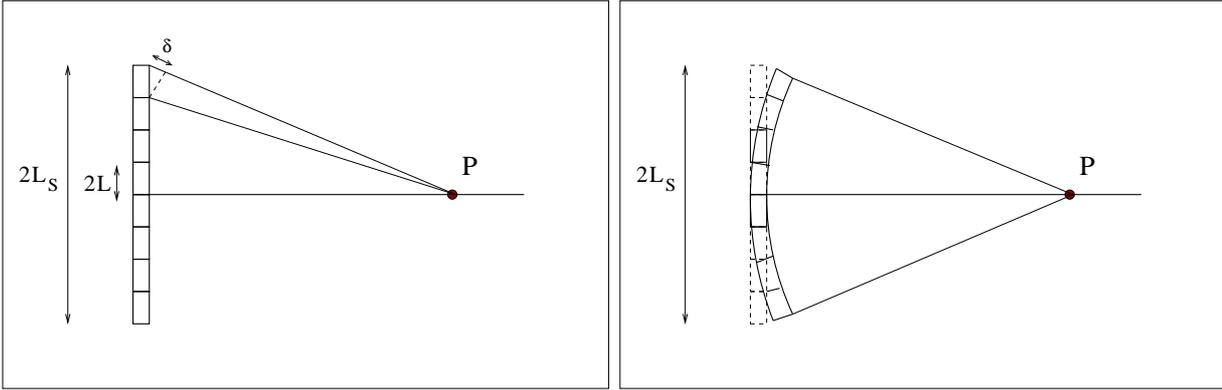


FIG. 18 – Calcul de l'échantillonnage par méthode temporelle : on estime la différence de trajet  $\delta$  entre le point  $P$  et les deux derniers éléments de l'antenne (figure de gauche). La synthèse est alors possible car on peut, sans erreur, corriger les retards et tout se passe comme si on disposait d'une antenne concave focalisée au point  $P$  (figure de droite).

ce qui donne

$$\delta = \frac{Rc\tau}{L_S} \quad (24)$$

Pour vérifier Shannon,  $c\tau$  doit être inférieur à  $\lambda$  pour que la différence de phase soit strictement entre  $-\pi$  et  $\pi$ , ce qui donne

$$\delta \leq \frac{R\lambda}{L_S}$$

c'est à dire

$$\delta \leq L \quad (25)$$

Pour ERS, on trouve  $\delta \sim 4, 3m < L = 5m$ .

### 2.2.2 RSO satellitaire

Dans le cas d'un système RSO satellitaire, on peut considérer en première approximation que la Terre est plate et que le satellite est en route rectiligne uniforme (la prise en compte de la rotondité de la Terre ainsi que de sa rotation propre est néanmoins aisée à traiter [3]).

On considère que le système émet et reçoit des signaux cadencés par la *PRF* (*Pulse Repetition Frequency*, ou *FRI* : Fréquence de Répétition des Impulsions), *i.e.* l'intervalle de temps  $\delta t$  entre les émissions du Radar est  $\delta t = \frac{1}{PRF}$ .

Soit  $T_0$  l'instant où le capteur est le plus proche du point à imager (on parle dans le monde du Sonar de CPA : *Closest Point Approach*) : c'est le point  $C$  (figure 19). Soit  $V_S$  la vitesse du satellite. Alors les signaux à prendre en compte pour reconstruire le point  $P$  sont entre les instants  $T_A$  et  $T_B$  :

$$\begin{aligned} T_A &= T_0 - \frac{L_S}{V_S} \\ T_B &= T_0 + \frac{L_S}{V_S} \end{aligned}$$

et connaissant  $L_S$  (équation 22), on en déduit la durée d'intégration nécessaire :

$$\Delta T = \frac{2L_S}{V_S} = \frac{\lambda R}{LV_S} \quad (26)$$

Pour ERS, on trouve  $\Delta T \simeq 1, 3s$ .

La *PRF* doit vérifier la condition sur le pas d'échantillonnage spatial (relation 25), ce qui donne :

$$\delta t \leq \frac{L}{V_S} \quad \text{c'est à dire} \quad PRF \geq \frac{V_S}{L} \quad (27)$$

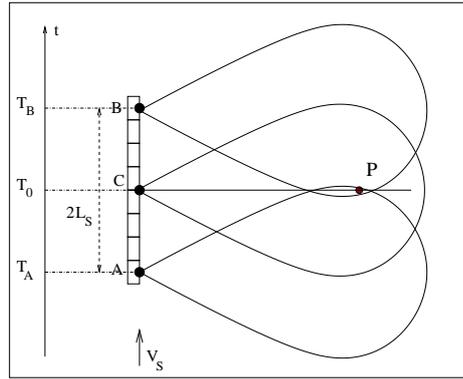


FIG. 19 – Radar RSO satellitaire : le radar suit une route rectiligne uniforme.

### 2.2.3 Dépointage et Doppler-centroïde

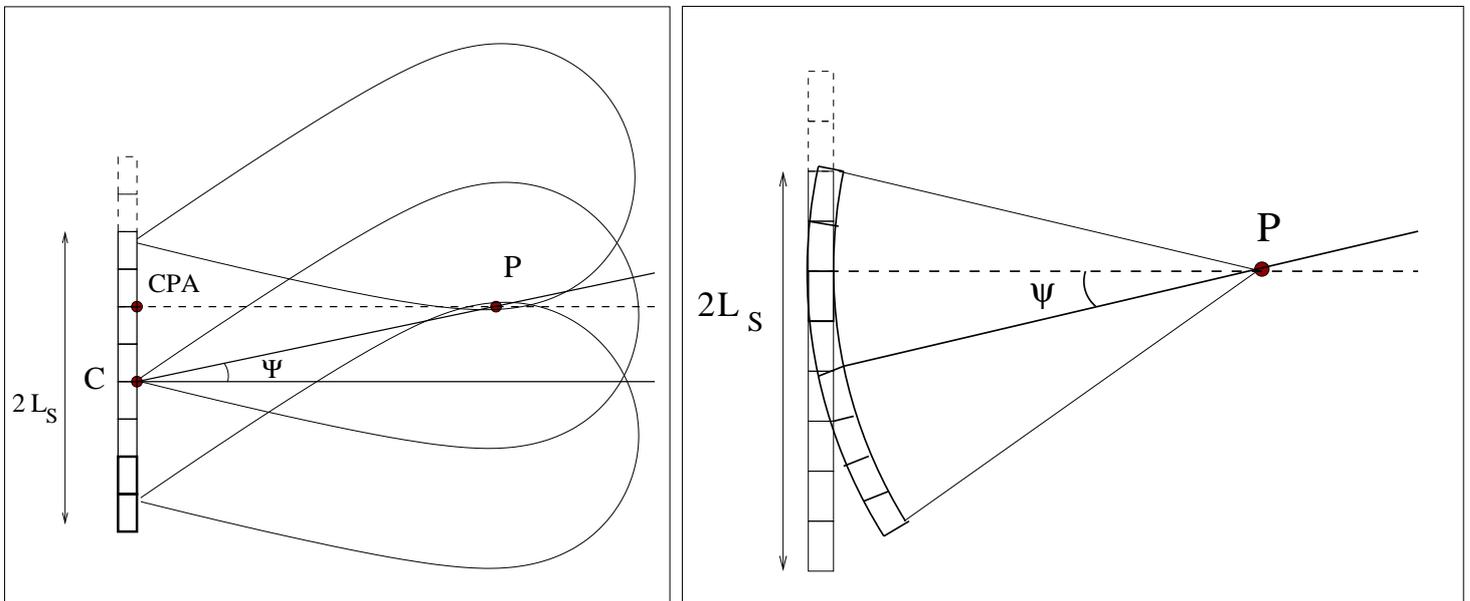


FIG. 20 – Antenne synthétique. A gauche la cible demeure dans le lobe principal (d’ouverture angulaire  $\varphi$ ) durant le déplacement de l’antenne, mais cette dernière est dépointée de  $\Psi$  et le centre  $C$  de l’antenne synthétique ne correspond plus au CPA. A droite, après focalisation en  $P$ , tout se passe comme si on disposait d’une antenne concave dépointée d’un angle  $\Psi$ .

En pratique, l’antenne n’est jamais exactement parallèle à la trajectoire du satellite : il existe un léger angle de dépointage  $\Psi$  (appelé souvent *squint*). A cause de ce dépointage, lorsque le point  $P$  est au centre du lobe d’antenne (figure 20 gauche), la position correspondante de l’antenne (le point  $C$ ) ne correspond pas au point où celle-ci est la plus proche du point  $P$  (le CPA). La focalisation sur le point  $P$  s’effectue toujours par synthèse d’une antenne concave, mais celle-ci est alors elle aussi dépointée (figure 20 droite).

Pour les données brutes, l’amplitude maximale s’observe donc au point  $C$  (ordonnée  $y_C$ ), alors que l’antenne est en rapprochement (ou en éloignement) du CPA. Une analyse communément pratiquée dans le monde du Radar consiste à remarquer que ce rapprochement (ou cet éloignement) va se traduire par un décalage Doppler des signaux. Au point  $C$ , on mesurera un décalage Doppler  $f_{DC}$ , appelé “Doppler

Centroid”, et donné par la relation :

$$\begin{aligned} f_{DC} &= \frac{V_{radial}}{c} f_0 \\ &= \frac{V_S y_C}{c R} f_0 \end{aligned}$$

A cause de ce dépointage, la relation 24 s’écrit :

$$\delta = \frac{Rc\tau}{L_S + |y_C|} \leq \frac{Rc\tau}{L_S} \quad (28)$$

$\delta$  est alors plus petit, ce qui requiert de changer la *PRF* si l’on souhaite à la fois vérifier le critère de Shannon et avoir un spectre centré en 0. Dans le cadre de données satellitaires, on ne change pas pour autant la *PRF* : il suffit de la choisir légèrement plus élevée afin de prendre en compte un éventuel dépointage. Aussi observe-t-on communément un repliement de spectre qui est sans conséquence –tant que la bande du signal n’excède pas la bande passante du système d’acquisition– lors de la synthèse dès lors que la valeur de  $\Psi$  (ou la position  $y_C$ ) est connue.

## 2.3 MTI : Moving Target Imaging

L’hypothèse fondamentale de l’imagerie RSO est que la cible demeure immobile et que le capteur se déplace selon un mouvement connu<sup>3</sup>. Si la cible est elle même mobile, la synthèse RSO pose donc problème. Dans l’hypothèse où les mouvements (cible et capteur) sont rectilignes uniformes, le référentiel est galiléen et tout semble se résoudre à un simple changement de repère : la vitesse du capteur sera modifiée pour que la cible soit immobile dans ce repère.

Cependant, on peut noter expérimentalement que certains artefacts apparaissent sur l’image, d’où la nécessité d’analyser finement le phénomène. Deux cas sont à étudier séparément :

- cible et antenne ont des mouvements parallèles,
- cible et antenne ont des mouvements perpendiculaires entre eux.

Le cas général se déduit alors de cette double analyse.

Les techniques traditionnelles sont souvent lourdes à mettre en œuvre et ne sont pas aisées à comprendre. Par exemple, en imagerie RSO, si l’on applique le célèbre algorithme RD (Range-Doppler), il apparaît que le mouvement parallèle s’interprète comme une modification du Doppler, alors que justement un mouvement parallèle a un Doppler négligeable. Dans le même temps, les artefacts liés à un mouvement radial, qui possède effectivement un fort Doppler, ne peuvent s’analyser simplement.

Nous allons voir que l’analyse temporelle apporte des explications aisées à comprendre : une fois de plus, par une simple analyse des retards mesurés sur le bord de l’antenne (synthétique ou non), il sera possible d’en déduire les effets du mouvement par simple comparaison avec la longueur d’onde.

### 2.3.1 Mouvements parallèles

Commençons par le cas où la cible a un mouvement parallèle à celui de l’antenne (figure 21). Soit un point  $P$  observé par l’antenne synthétique : nous avons vu que, pour une cible immobile, celle-ci a une longueur  $2L_S$  et les bords d’antenne sont les points  $A$  et  $B$ . Soit une cible mobile située au point  $P$  lorsque l’antenne physique se trouve en  $A$  (début d’imagerie par synthèse d’ouverture avec l’antenne synthétique de longueur  $2L_S$ ). Cette cible se trouve alors au point  $P'$  lorsque l’antenne physique se trouve en  $B$  (fin d’imagerie par synthèse d’ouverture).

Pour savoir si cette cible est correctement imagée, il suffit de calculer la différence entre les trajets  $PB$  et  $P'B$  (ce qui revient à comparer les trajets  $PA$  et  $P'B$ ) : cette différence de trajet  $\delta$  est alors à comparer avec la longueur d’onde. On peut s’attendre à ce que la focalisation soit déficiente si

$$d(PA) - d(P'B) = \lambda$$

---

<sup>3</sup>La situation duale : cible mobile et capteur immobile est aussi envisageable et exploitable : c’est le domaine de l’ISAR (*Inverse Synthetic Array Radar*).

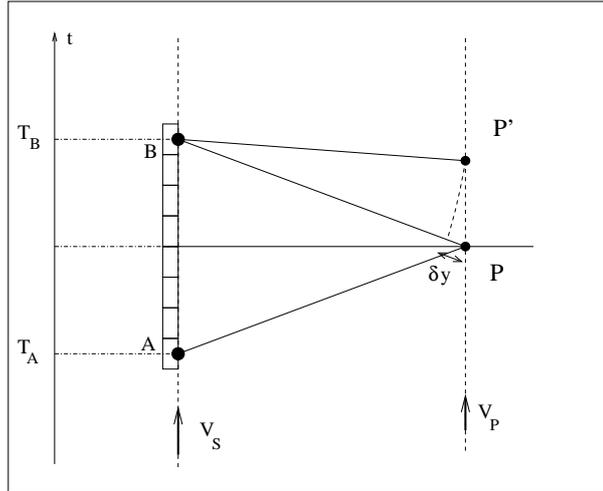


FIG. 21 – MTI (Moving Target Imaging). On considère une antenne synthétique de longueur  $2L_S$  : les données utiles pour imager le point  $P$  sont acquises entre les points  $A$  et  $B$ . La cible est en  $P$  quand elle est acquise par le premier bord de l’antenne synthétique (capteur en  $A$ ). A cause de son mouvement propre, elle se trouve en  $P'$  quand elle est acquise par l’autre extrémité de l’antenne synthétique (capteur en  $B$ ). La focalisation sera imparfaite dès lors que les trajets  $BP$  et  $BP'$  diffèrent d’une longueur  $\delta$ .

Or nous avons déjà analysé le comportement d’une antenne lorsqu’il y avait une différence de marche entre les deux extrémités : c’était la relation 18 du paragraphe dédié à l’approche “Huyghens point à point” (paragraphe 1.5.3) qui a permis de définir le premier zéro et la résolution d’une antenne. On en conclut qu’une cible mobile devient défocalisée dès que son mouvement la conduit hors de la cellule de résolution.

Ce raisonnement valide une approche intuitive qui consiste à remarquer qu’une cible mobile va tout simplement apparaître au cours du temps dans diverses cellules de résolution. Au lieu d’apparaître dans un pixel unique, elle va “baver” sur plusieurs pixels. Connaissant la durée d’intégration  $\Delta T$  requise par l’antenne synthétique (relation 26), on en déduit que la cible va “baver” sur (au moins) deux pixels dès que sa vitesse (en valeur absolue) dépasse la valeur  $V$  telle que :

$$V \Delta T = res_{y,S} = L$$

donc

$$V = V_S \frac{L^2}{\lambda R}$$

c’est à dire de l’ordre de 3,7m/s pour ERS.

Si l’on souhaite imager correctement la cible, il faut prendre en compte le fait que, selon le sens de la vitesse de la cible, la dimension de l’antenne synthétique va être plus grande ou plus petite (figure 22). Si l’on considère que les mouvements sont rectilignes, les référentiels sont galiléens : en effectuant un changement de remère de sorte que la cible soit immobile, tout se passe comme si le capteur avait une vitesse  $V'_S = V_S - V_P$ . Dans ce nouveau référentiel, la dimension de l’antenne synthétique est toujours égale à  $L_S$ . La durée de l’intégration  $\Delta T$  est alors modifiée :

$$\Delta T' = \frac{2L_S}{V_S - V_P}$$

Elle est donc augmentée lorsque cible et capteur vont dans le même sens (la cible est en effet visible plus longtemps dans le lobe d’antenne), et diminuée lorsque cible et capteur vont dans un sens opposé (la cible est en effet visible moins longtemps dans le lobe d’antenne). Cette nouvelle dimension d’antenne synthétique s’écrit :

$$L'_S = L_S \frac{V_S}{V_S - V_P}$$

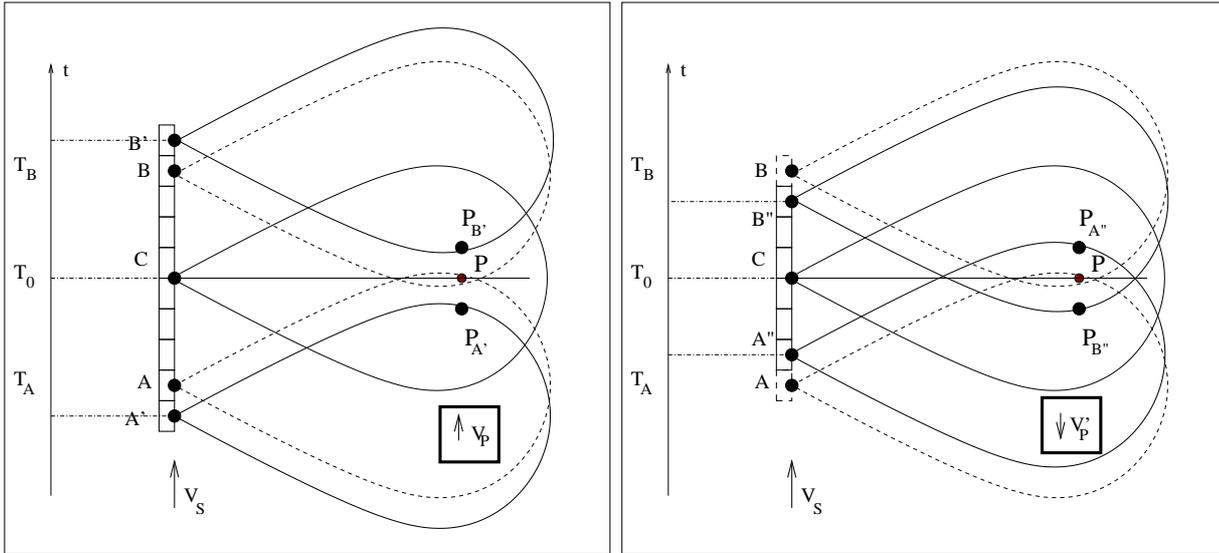


FIG. 22 – MTI. A gauche, la cible (vitesse  $V_P$ ) et le capteur (vitesse  $V_S$ ) se déplacent dans la même direction et dans le même sens : la cible entre plus tôt dans le lobe d’antenne en  $P_{A'}$  et en sort plus tard en  $P_{B'}$ . L’antenne synthétique est plus grande (zone utile :  $A'B'$ ). A droite, la cible (vitesse  $V_P'$ ) et le capteur (vitesse  $V_S$ ) se déplacent dans la même direction, mais en sens inverse : la cible entre plus tard dans le lobe d’antenne en  $P_{A''}$  et en sort plus tôt en  $P_{B''}$ . L’antenne synthétique est plus petite (zone utile :  $A''B''$ ).

Puisque, en pratique, l’échantillonnage  $\delta$  sur l’antenne synthétique (équation 25) n’est pas changé,  $\delta$  doit aussi vérifier

$$\delta \leq L \frac{V_S}{V_S - V}$$

pour pouvoir éventuellement focaliser correctement sur la cible mobile. Cette condition est toujours vérifiée en pratique pour ERS.

Quoique la dimension de l’antenne synthétique varie (dans le référentiel absolu), la résolution de la cible demeure constante et égale à  $L$  puisque c’est la valeur de la résolution dans le référentiel lié à la cible. Il faut aussi noter que l’angle sous lequel la cible est observée demeure constant. La cible sera suréchantillonnée si antenne et cible vont dans le même sens (la cible est visible plus longtemps), et sous échantillonnée dans le cas contraire (la cible sera visible moins longtemps). Notons toutefois que deux synthèses seront requises : l’une pour la scène (tous les objets imagés sont supposés immobiles) et l’autre pour la cible mobile.

### 2.3.2 Mouvements radiaux

Les mouvements radiaux (perpendiculaires à la trajectoire de l’antenne) ont une interprétation intuitive beaucoup plus malaisée. En effet, on observe sur les images que ce type de cible est correctement focalisé (il demeure dans un même pixel), mais que sa localisation selon l’axe  $Oy$  est incorrecte. Dans ce cas aussi, une interprétation temporelle mène aisément à une interprétation correcte.

Soit une cible en mouvement radial observée par une antenne synthétique de longueur  $2L_S$  et de bords d’antenne synthétique  $A$  et  $B$ . Cette cible mobile est située au point  $P$  lorsque l’antenne physique se trouve en  $A$  (début d’imagerie par synthèse d’ouverture avec l’antenne synthétique de longueur  $2L_S$ ) et au point  $P'$  lorsque l’antenne physique se trouve en  $B$  (fin d’imagerie par synthèse d’ouverture). Autrement dit, cette cible en mouvement radial de vitesse  $V_P$  (figure 23), entre à l’instant  $t_1$  dans le lobe d’antenne du capteur (point  $P$ ) et elle en sort à l’instant  $t_3$  (point  $P'$ ). Soit  $\delta$  la différence entre les trajets  $PA$  et  $P'B$  :

$$\delta = d(PA) - d(P'B)$$

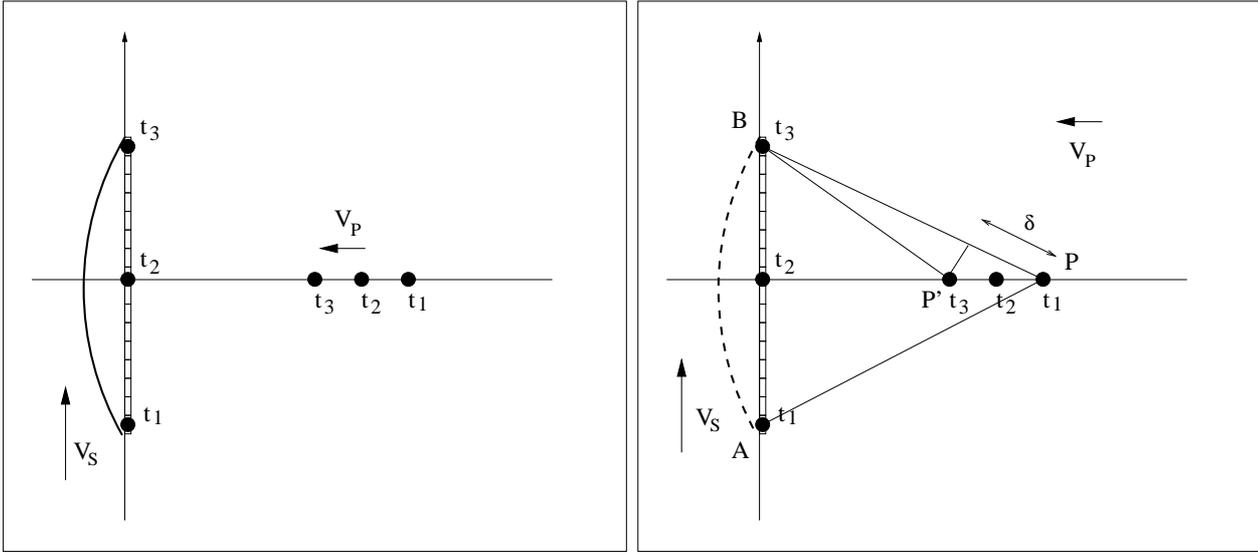


FIG. 23 – MTI : mouvement radial de la cible dans un référentiel absolu. La cible entre, au point  $P$ , à l'instant  $t_1$  dans le lobe d'antenne et en sort, au point  $P'$ , à l'instant  $t_3$ . Les trajets  $AP$  (correspondant au début de l'acquisition) et  $BP'$  (correspondant à la fin d'acquisition) diffèrent de la longueur  $\delta$ .

Si cette différence est égale à la longueur d'onde, la focalisation ne sera pas assurée. Cela revient à dire qu'il y aura défocalisation dès que la cible se sera déplacée d'une longueur d'onde  $\lambda$  pendant le temps d'intégration  $\Delta T = \frac{\lambda R}{LV_S}$  (formule 26). Cette situation est vérifiée dès que la vitesse (en valeur absolue) atteint la valeur  $\tilde{V}$  telle que  $\tilde{V}\Delta T = \lambda$ , c'est à dire :

$$\tilde{V} = V_S \frac{L}{R} \quad (29)$$

ce qui correspond à une vitesse très faible en pratique (de l'ordre de 3,7 cm/s pour ERS-1!!).

Considérons donc le cas où la vitesse de la cible dépasse ce seuil. En fait, on affirme seulement que la focalisation n'est pas vérifiée au point initialement considéré dans l'hypothèse où la cible serait immobile (point  $P$  de la figure 23). La cible n'est donc pas imagée en  $P$ .

Or nous allons montrer qu'il existe un point (correspondant à une cible immobile) tel que les lois de focalisation, qui garantissent sa visibilité à sa bonne position, assurent aussi la focalisation sur notre cible mobile : si ce point existe, la cible mobile apparaît **ailleurs** que sa vraie position physique, et de surcroît correctement focalisée!! Pour cela, considérons le référentiel dans lequel la cible est immobile (figure 24 gauche). Le capteur a alors une vitesse  $\vec{V}'_S = \vec{V}_S - \vec{V}_P$ . Comme dans le cas précédent, l'amplitude de la vitesse du capteur change, mais, cette fois ci, sa direction est aussi modifiée : apparaît un dépointage  $\delta\Psi = \frac{V_P}{V_S}$  (en supposant  $V_P \gg V_S$ ). Le centre de l'antenne synthétique pointe donc "à coté" du point  $P$ , en un point distant de  $-R\delta\Psi$ . Autrement dit, le CPA est aussi modifié de manière similaire. Le nouveau CPA,  $C'$ , positionné en  $y_{C'}$ , vérifie  $y_{C'} = R\delta\Psi$ , c'est à dire :

$$y_{C'} = R \frac{V_P}{V_S}$$

c'est à dire, lorsque  $V_P = \tilde{V}$  (condition 29, qui correspond au cas limite de défocalisation),

$$y_{C'} = L = res_{y,S}.$$

L'observation correcte du point  $P$  s'effectue donc en un autre point décalé de  $y_{C'} = res_{y,S}$ . Si l'image est formée de sorte que l'interligne est égal à la résolution azimutale, cela revient à observer l'image de la cible une ligne au dessus (ou au dessous) de sa position réelle.



Expérimentalement, on observe que si l'on décale les deux capteurs les franges d'interférence deviennent de plus en plus bruitées. On observe même leur disparition lorsque cette distance entre capteurs atteint une grandeur appelée *base critique*.

Tant que l'on ne considère que le cas de la rétrodiffusion par des cibles uniques dans une cellule de résolution, ce phénomène ne peut s'expliquer. Il faut faire intervenir la notion de chatoiement (*speckle*) pour en trouver l'origine.

Nous allons voir qu'une approche temporelle permet d'expliquer et de quantifier facilement la base critique.

### 3.1 Le speckle en imagerie RSO : application à l'interférométrie

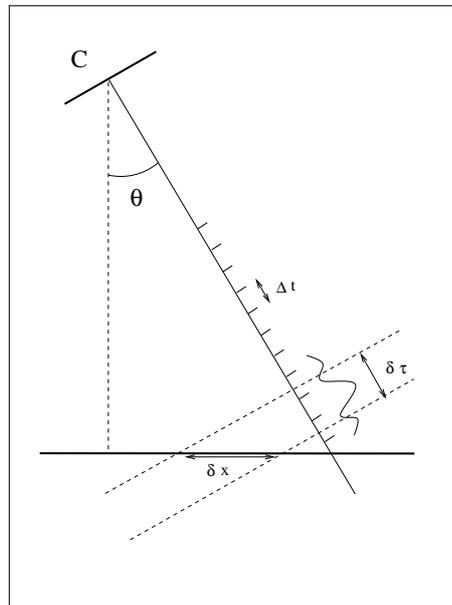


FIG. 25 – Radar RSO en visée latérale (incidence  $\theta$ ) : case temporelle ( $\Delta t$ ), résolution temporelle ( $\delta \tau$ ), résolution au sol ( $\delta x$ ).

Le principe du Radar à Synthèse d'Ouverture (tout comme le Sonar) suppose l'utilisation d'une antenne à la fois en émission et en réception (figure 25) et visant latéralement selon une incidence donnée. Le principe de la rétrodiffusion est finalement assez simple :

- l'onde incidente illumine le sol,
- le sol réémet cette onde vers l'antenne principalement par mécanisme de rétrodiffusion d'un grand nombre de cibles élémentaires que l'on peut considérer comme ponctuelles,
- le signal reçu est échantillonné avec un pas temporel  $\Delta t$  plus petit que la résolution temporelle  $\delta \tau$
- la résolution temporelle correspond à une résolution au sol  $\delta x$

Une fois le signal émis par le radar, tout se passe donc comme si une cellule de résolution au sol agissait comme une antenne émettant vers le Radar agissant comme récepteur : c'est le concept d'"antenne-sol". Il faut donc analyser cette antenne-sol et son diagramme de directivité.

A la différence du cas de l'antenne rectangulaire étudiée au paragraphe 1.5, la phase sur l'antenne-sol n'est pas constante puisque, sauf cas exceptionnel (sol parfaitement lisse à l'échelle de la longueur d'onde, ce qui peut s'observer à la surface d'une étendue d'eau calme), aucune corrélation de phase ne peut exister entre les différentes cibles présentes sur le sol.

L'analyse complète de ce type d'antenne sort du cadre de ce travail : il ne sera pas question ici d'en commenter le diagramme de directivité. On supposera simplement que, pour une distribution aléatoire de diffuseurs, on observe un diagramme d'antenne dont on ne cherchera pas à déterminer la réponse exacte.

## 3.2 Base critique

### 3.2.1 Conjecture

En configuration interférométrique (figure 26), on peut considérer qu’une même zone du sol (la cellule de résolution  $AB$  de dimension  $\delta x$ ) est observée par deux capteurs : l’un maître (capteur  $C$ ) et l’autre esclave (capteur  $C'$ ). Si l’on considère le capteur  $C$ , la réponse du sol est fonction des diffuseurs élémentaires et de l’angle d’incidence  $\theta$  : cet angle joue un rôle essentiel dans la réponse de la cellule de résolution puisqu’il introduit une rampe de phase le long de cette cellule. On peut aussi lier cette rampe à la différence de longueur entre la trajet  $CA$  et le trajet  $CB$  :  $d(DB)$  ( $D$  étant la projection de  $A$  sur la droite  $CB$ ). Pour le capteur  $C'$ , l’effet de la rampe de phase sera différent, puisqu’elle sera liée à la différence de longueur entre la trajet  $C'A$  et le trajet  $C'B$  :  $d(D'B)$ . Par un raisonnement identique à celui mené pour l’antenne rectangulaire, on s’attend à un changement fondamental de la réponse de l’“antenne sol” dès que cette différence  $d(D'B) - d(DB)$  est de l’ordre de la longueur d’onde  $\lambda$ . Nous avons vu que dans le cas de l’antenne rectangulaire cette différence de trajet conduisait à des modifications d’amplitude et avait permis de définir la position du premier zéro. Nous allons voir que cette différence de trajet va fondamentalement modifier la phase, ce qui est lourd de conséquences en interférométrie.

La démarche adoptée est d’abord de vérifier cette conjecture par simulations, puis de proposer des ébauches de solutions dans des cas simples.

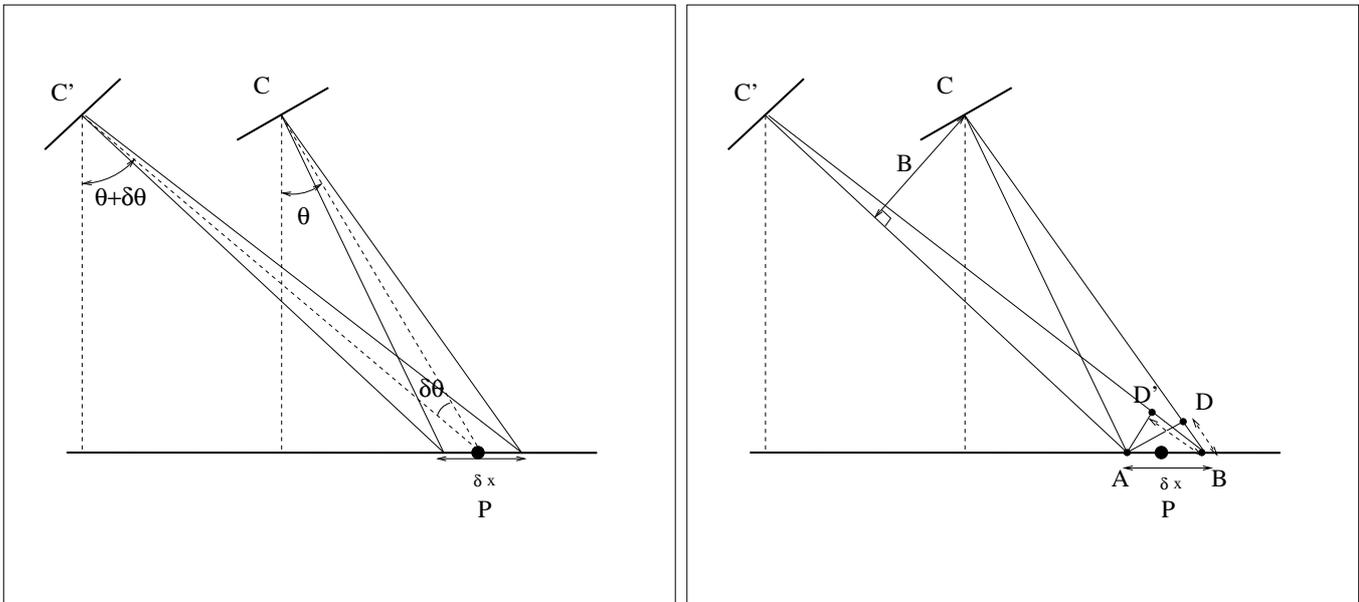


FIG. 26 – Radar RSO : l’antenne  $C$  émet en direction du sol. Le sol agit alors comme une antenne dont la dimension est la résolution au sol ( $\delta x$ ). La phase sur cette antenne est aléatoire (les diffuseurs élémentaires situés sur cette portion de sol n’ont aucune raison d’être corrélés en phase, hormis le cas du miroir plan). Cette “antenne-sol” réémet vers le capteur initial (antenne  $C$ ) : la scène peut donc être imagée. Si la même zone du sol est imagée par un autre capteur  $C'$  dont l’incidence est  $\theta + \delta\theta$ , tout revient à considérer que le sol réémet vers ce capteur  $C'$  dans une direction faisant un angle  $\delta\theta$  avec la direction initiale (correspondant au capteur  $C$ ) et induisant une rampe de phase liée à  $\delta\theta$ .

### 3.2.2 Simulations

Pour se convaincre du bien fondé de cette approche et faute d’expression analytique exacte, on peut aisément effectuer une simulation en supposant que l’“antenne sol” est composée de  $N$  sources équidistribuées de même amplitude, mais de phase aléatoire. Le signal acquis par le capteur  $C$  selon une incidence  $\theta$  est alors une somme cohérente des réponses élémentaires de ces  $N$  sources ponctuelles

D	Cohérence moyenne théorique	Cohérence moyenne simulée	Ecart type de la phase théorique	Ecart type de la phase simulée	$\eta$
0.	0.178	0.178	1.76	1.95	$2\pi$
0.10	0.198	0.199	1.27	1.42	
0.20	0.25	0.25	0.83	0.85	
0.30	0.33	0.36	0.52	0.46	
0.40	0.42	0.49	0.35	0.27	
0.50	0.51	0.62	0.25	0.18	$\pi$
0.60	0.61	0.74	0.19	0.13	
0.70	0.70	0.85	0.14	0.088	
0.80	0.80	0.93	0.105	0.055	
0.90	0.90	0.98	0.066	0.026	
1.00	1.00	1.00	0.	0.	0.

TAB. 1 – Comparaison des valeurs de cohérence et d'écart type de la phase obtenue par simulation et selon les formules théoriques (équation 30 pour la cohérence moyenne, intégration numérique de  $p(\varphi|D, L)\varphi^2$  – équation 31– pour l'écart type de la phase).

auxquelles on adjoint les effets de la rampe de phase lié à  $\theta^5$ . On peut ainsi générer une image de pixels  $S_{i,j}$  acquise par le capteur  $C$  en supposant que chaque “antenne sol” correspondant à des cellules de résolution disjointes est totalement décorrélée de ses voisines.

Pour générer l'image observée par le capteur  $C'$  selon une incidence  $\theta + \delta\theta$ , il faut alors considérer les effets de la rampe de phase lié à  $\theta + \delta\theta$  et la réponse acquise par le capteur  $C'$  est alors une somme cohérente des réponses élémentaires des  $N$  sources ponctuelles de l'antenne-sol auxquelles on adjoint les effets de cette seconde rampe. Pour établir ce terme de phase correctif, on considère le terme de rampe de phase utilisé précédemment pour le capteur  $C$  et on lui adjoint un terme lié à la différence entre les deux rampes, c'est à dire fonction de la différence entre l'angle d'incidence de  $C' : \theta + \delta\theta$  et celui de  $C : \theta$ . On peut ainsi générer l'image de pixels  $S'_{i,j}$  acquise par le capteur  $C'$

Le phénomène que l'on cherche à mettre en évidence est une décorrélation totale entre la phase mesurée par le capteur  $C$  et celle mesurée par le capteur  $C'$  dès lors que la différence entre les rampes de phase mesurée à l'extrémité de l'antenne sol (le point  $B$ ) atteint  $2\pi$ , ce qui revient bien à dire que la différence de marche en bord d'antenne est égal à  $\lambda$ .

Pour l'observer, il suffit de générer une rampe de phase dont le paramètre  $\eta$  varie entre 0 et  $2\pi$  entre les deux extrémités de l'antenne. Pour un point quelconque de l'antenne-sol  $P$ , connaissant la phase dans le cas du capteur  $C$ , on rajoute donc une phase déterministe  $\phi(P)$  :

$$\phi(P) = \eta \frac{d(AP)}{d(AB)}$$

afin d'établir la phase dans le cas du capteur  $C'$ . Pour une valeur de ce paramètre donnée, et pour un pixel donné, on calcule la cohérence entre les deux images, qui est en fait le produit interférométrique :

$$\frac{S_{i,j} S'_{i,j}^*}{\sqrt{S_{i,j} S_{i,j}^*} \sqrt{S'_{i,j} S'_{i,j}^*}} = e^{j\varphi}$$

En multivue (calcul dans un voisinage  $\mathcal{V}_{i,j}$  di pixel  $S_{i,j}$ ), le produit interférométrique s'écrit :

$$\frac{\sum_{(i',j') \in \mathcal{V}_{i,j}} S_{i',j'} S'_{i',j'}^*}{\sqrt{\sum_{(i',j') \in \mathcal{V}_{i,j}} S_{i',j'} S_{i',j'}^*} \sqrt{\sum_{(i',j') \in \mathcal{V}_{i,j}} S'_{i',j'} S'_{i',j'}^*}} = d e^{j\varphi}$$

<sup>5</sup>Comme la phase initiale de ces  $N$  sources ponctuelles est aléatoire, l'ajonction d'une rampe de phase ne changera rien à la distribution de ces phases et tout se passe comme si on tirait simplement une phase pour chaque source, sans prendre en compte la rampe

Pour  $L = 25$ , la simulation montre que, lorsque le paramètre de la rampe  $\eta$  varie de 0 à  $2\pi$ , la cohérence passe de 1 à 0,178 et l'écart type de la phase passe de 0 à 1,95 (ce qui correspond à une phase équadistribuée sur  $[0; 2\pi]$ ). Les valeurs sont reprises dans le tableau 1.

Les lois de la cohérence sont bien connues en interférométrie. Pour un interférogramme multivue (nombre de vues  $L$ ), et étant donné la cohérence théorique  $D$ , on montre que la loi de la cohérence empirique  $d$  s'écrit :

$$p(d|D, L) = 2(L-1)(1-D^2)^L d(1-d^2)^{L-2} {}_2F_1(L, L; 1; d^2 D^2)$$

La moyenne de la cohérence (moment d'ordre 1) est donnée par :

$$\bar{d} = (1-D^2)^L \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(L)}{\Gamma(L+\frac{1}{2})} {}_3F_2(L, L, \frac{3}{2}; 1, L+\frac{1}{2}; D^2) \quad (30)$$

et le moment d'ordre 2 s'écrit :

$$(1-D^2)^L \frac{1}{L} {}_3F_2(L, L, 2; 1, L+1; D^2)$$

ce qui permet d'en déduire l'écart type.

De même la distribution de la phase, centrée en 0, s'écrit :

$$p(\varphi|D, L) = \frac{(1-D^2)^L}{2\pi} \frac{1}{2L+1} {}_2F_1\left(2, 2L; L+\frac{3}{2}; \frac{1+D\cos(\varphi)}{2}\right) \quad (31)$$

On montre que, dans ce cas, la valeur moyenne est nulle. L'écart type de la phase n'a malheureusement pas d'expression analytique : aussi il est judicieux d'utiliser un logiciel de calcul formel comme Maple pour en obtenir les valeurs pour certaines valeurs de  $D$  et de  $L$ .

Il est donc possible de comparer les effets des variations de la cohérence théorique  $D$  ( $D \in [0, 1]$ ) et ceux dus à une rampe de phase  $\eta$  ( $\eta \in [2\pi, 0]$ ). Les valeurs théoriques sont reprises dans le tableau 1. Il est aussi possible de tracer la valeur moyenne de la cohérence empirique (figure 27) et l'écart type de la phase (figure 28). Si globalement les résultats sont comparables, il faut cependant noter une différence de comportement au voisinage de  $D = 1$  (rampe de phase nulle). Une interprétation possible est que la rampe de phase n'a aucune influence sur la différence de phase au point  $A$ . Pour de faibles rampes, l'effet de cette rampe sera très faible pour les points voisins du point  $A$ , qui seront donc fortement cohérents.

On peut aussi comparer les allures des courbes suivantes :

- la valeur moyenne de la cohérence pour  $D$  variant entre 0 et 1 (cas de la valeur théorique, figure 27 droite) et pour la rampe de phase variant entre  $2\pi$  et 0 (cas des données simulées, figure 27 gauche).
- l'écart type de la phase pour  $D$  variant entre 0 et 1 (cas de la valeur théorique, figure 28 droite) et pour la rampe de phase variant entre  $\pi$  et 0 (cas des données simulées, figure 28 gauche).

Globalement les comparaisons sont concluantes<sup>6</sup>.

### 3.2.3 Calcul de la base critique

Pour une rampe de phase de valeur  $\eta = 2\pi$ , c'est à dire telle que la différence de marche en bor d'antenne vérifie  $d(BD') - d(BD) = \lambda$ , la cohérence est donc nulle : la distance entre  $C$  et  $C'$  correspond alors à la "base critique".

On peut facilement écrire  $d(BD)$  et  $d(BD')$  :

$$\begin{aligned} d(BD) &= d(CA) - d(CB) \simeq \delta x \sin \theta \\ d(BD') &= d(C'A) - d(C'B) \simeq \delta x \sin(\theta + \delta\theta) \simeq \delta x \sin \theta + \delta x \cos \theta \delta\theta \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$d(BD') - d(BD) = \lambda \Rightarrow \delta x \cos \theta \delta\theta = \lambda$$

---

<sup>6</sup>On peut remarquer que les simulations donnent une cohérence plus élevées pour de faibles valeurs de  $\eta$  : en fait, le lien entre  $D$  et  $\eta$  n'est pas une simple relation linéaire.

Soit  $\tilde{B}_{C,\perp}$  la base orthogonale critique : l'angle  $\delta\theta$  étant faible, on peut écrire  $\tilde{B}_{C,\perp} = R\delta\theta$ , ce qui donne la relation : la condition :

$$\tilde{B}_{C,\perp} = \frac{R\lambda}{\delta x \cos\theta} \quad (32)$$

La base critique est en général définie dans un contexte d'écholocation : le déphasage doit être pris en compte sur un trajet aller-retour. Le calcul précédent doit être mené en considérant un déphasage de  $\frac{\lambda}{2}$  en bord d'antenne, ce qui permet de retrouver l'expression bien connue des spécialistes d'interférométrie :

$$B_{C,\perp} = \frac{R\lambda}{2\delta x \cos\theta}$$

Tout se passe comme si la cellule de résolution  $\delta x$  avait un lobe d'antenne  $\delta\theta_c = \frac{B_{C,\perp}}{R}$  qui s'exprime selon la relation suivante :

$$\delta\theta_c = \frac{\lambda}{2\delta x \cos\theta} \quad (33)$$

Par cette approche "temporelle", il a donc été possible d'introduire aisément la notion de base critique et de retrouver les formules classiquement utilisées en interférométrie.

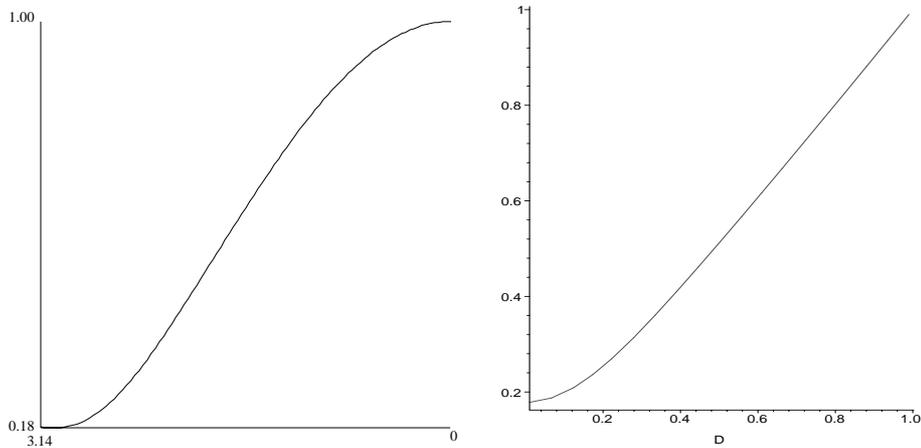


FIG. 27 – Variation de la valeur moyenne de la cohérence : simulation (à gauche) et cas théorique (à droite,  $L = 25$ ).

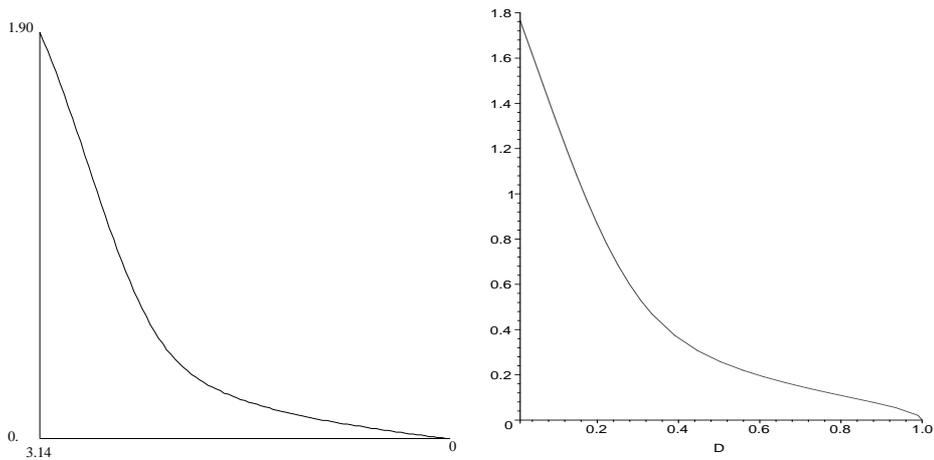


FIG. 28 – Ecart type de la phase : simulation (à gauche) et cas théorique (à droite,  $L = 25$ ).

### 3.2.4 Une ébauche de démonstration

Sur le plan analytique, il n'y a malheureusement pas de démonstration simple de cette conjecture. Par le biais de deux cas simples, nous allons néanmoins essayer d'exprimer analytiquement la cohérence.

#### Analyse de la rétrodiffusion de deux cibles

Considérons un premier cas d'école : 2 cibles d'amplitudes identiques unité, mais de phases aléatoires indépendantes  $\varphi_1, \varphi_2$  (figure 29 gauche).

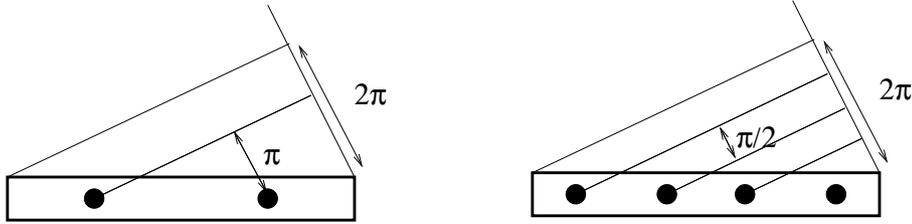


FIG. 29 – Simulation de chatoiement. On considère des cibles (deux sur la figure de gauche, quatre sur la figure de droite) équiréparties sur l'antenne-sol. On considère une rampe de phase donnant une différence de  $2\pi$  sur les bords de l'antenne-sol. Les cibles ont même amplitude, mais leurs phases, décorréées, suivent une loi constante sur  $[0, 2\pi]$ .

Le signal initial émis peut s'écrire :

$$S = e^{\varphi_1} + e^{\varphi_2}$$

Si l'on rajoute une rampe de phase, le signal s'écrit :

$$S_\alpha = e^{\varphi_1} + e^{\varphi_2 + \alpha}$$

Pour la valeur  $\alpha = \pi$ , on a :

$$\tilde{S} = e^{\varphi_1} - e^{\varphi_2}$$

$\tilde{S}$  correspond alors au signal reçu par  $C'$ .

Calculons la cohérence entre  $S$  et  $\tilde{S}$  :

$$\begin{aligned} W &= S\tilde{S}^* \\ &= (e^{\varphi_1} + e^{\varphi_2})(e^{-\varphi_1} - e^{-\varphi_2}) \\ &= 2j \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$

En posant  $G_2(\alpha, \beta) = \cos(\beta - \alpha)$ , on peut écrire :

$$W = S\tilde{S}^* = 2jG_2(\varphi_1, \varphi_2 + \frac{\pi}{2})$$

Il faut aussi noter que l'énergie du signal  $S$  s'écrit :

$$\begin{aligned} S S^* &= (e^{\varphi_1} + e^{\varphi_2})(e^{-\varphi_1} + e^{-\varphi_2}) \\ &= 2 + 2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ &= 2 + 2G_2(\varphi_1, \varphi_2) \end{aligned}$$

et que de même l'énergie du signal  $\tilde{S}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{S} \tilde{S}^* &= (e^{\varphi_1} - e^{\varphi_2})(e^{-\varphi_1} - e^{-\varphi_2}) \\ &= 2 - 2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ &= 2 - G_2(\varphi_1, \varphi_2) \end{aligned}$$

La fonction  $G_2$  dépend de deux variables aléatoires décorréelées  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ . On a donc

$$\int_0^{2\pi} G_2(\varphi_1, \varphi_2) d\varphi_1 = \int_0^{2\pi} G_2(\varphi_1, \varphi_2) d\varphi_2 = 0$$

On en déduit les deux conclusions suivantes :

- On trouve alors un résultat très curieux pour l'interférogramme monovue : la phase interférométrique est constante et égale à

$$\phi = \frac{\pi}{2}$$

Le fait que la phase interférométrique soit égale à  $\frac{\pi}{2}$  peut aussi se démontrer géométriquement par construction de Fresnel. cette démonstration requiert explicitement que les deux cibles aient la même amplitude.

- On a donc montré :  $\overline{W} = 0$ ,  $\overline{SS^*} = 2$  et  $\overline{\tilde{S}\tilde{S}^*} = 2$ . Donc, en moyenne, la cohérence est nulle. Pour l'interférogramme multivue, en sommant sur  $L$  pixels, on aura :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^L S_i \tilde{S}_i^* &= \sum_{i=1}^L (e^{\varphi_{i,1}} + e^{\varphi_{i,2}}) (e^{-\varphi_{i,1}} - e^{-\varphi_{i,2}}) \\ &= 2j \sum_{i=1}^L \sin(\varphi_{i,2} - \varphi_{i,1}) \\ &= 2j \sum_{i=1}^L G_2(\varphi_{i,1}, \varphi_{i,2} + \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

puisque  $G_2(\alpha, \beta) = \cos(\beta - \alpha) = \sin(\beta - \alpha + \frac{\pi}{2})$

Si les phases  $\varphi_{i,k}$  (avec  $i \in [1, L]$  et  $k \in [1, 2]$ ) sont décorréelées, cette somme sera en moyenne nulle. Dans le même temps calculons  $SS^*$  :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^L S_i S_i^* &= \sum_{i=1}^L (e^{\varphi_{i,1}} + e^{\varphi_{i,2}}) (e^{-\varphi_{i,1}} + e^{-\varphi_{i,2}}) \\ &= 2L + 2 \sum_{i=1}^L \cos(\varphi_{i,2} - \varphi_{i,1}) \\ &= 2L + 2 \sum_{i=1}^L G_2(\varphi_{i,1}, \varphi_{i,2}) \end{aligned}$$

Si les phases  $\varphi_{i,k}$  (avec  $i \in [1, L]$  et  $k \in [1, 2]$ ) sont décorréelées, cette somme sera en moyenne égale à  $2L$ . On trouvera un résultat analogue pour  $\tilde{S}\tilde{S}^*$  :

$$\tilde{S}\tilde{S}^* = 2L - 2 \sum_{i=1}^L G_2(\varphi_{i,1}, \varphi_{i,2})$$

On en déduit que l'interférogramme multivue, qui s'écrit dans cette configuration :

$$\frac{j \sum_{i=1}^L G_2(\varphi_{i,1}, \varphi_{i,2} + \frac{\pi}{2})}{\sqrt{\left(L^2 - \left(\sum_{i=1}^L G_2(\varphi_{i,1}, \varphi_{i,2})\right)^2\right)}}$$

a une cohérence qui tend vers 0 pour  $L \rightarrow \infty$ . Notons que sa phase est toujours égale à  $\frac{\pi}{2}$ . On a donc montré sur ce cas simplissime qu'un déphasage de  $\pi$  appliqué sur le second diffuseur donne une cohérence nulle, dans la mesure où les phases initiales sont décorréelées.

## Analyse de la rétrodiffusion de quatre cibles

Pour généraliser cette constatation et comprendre intuitivement les raisons de ce résultat, considérons un second cas d'école : 4 cibles équidistante, d'amplitudes identiques unité, mais de phases aléatoires indépendantes  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  (figure 29 droite). Le signal initial émis peut s'écrire :

$$S = e^{\varphi_1} + e^{\varphi_2} + e^{\varphi_3} + e^{\varphi_4}$$

Si l'on rajoute la rampe de phase, on a alors :

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= e^{\varphi_1} + e^{\varphi_2 + \frac{\pi}{2}} + e^{\varphi_3 + \pi} + e^{\varphi_4 + \frac{3\pi}{2}} \\ &= e^{\varphi_1} + e^{\varphi_2 + \frac{\pi}{2}} - e^{\varphi_3} - e^{\varphi_4 + \frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}S S^* &= (e^{\varphi_1} + e^{\varphi_2} + e^{\varphi_3} + e^{\varphi_4}) (e^{-\varphi_1} + e^{-\varphi_2} + e^{-\varphi_3} + e^{-\varphi_4}) \\ &= 4 + 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j>i}^4 \cos(\varphi_j - \varphi_i) \\ &= 4 + \sum_{i=1}^3 \sum_{j>i}^4 G_2(\varphi_i, \varphi_j)\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}\tilde{S} \tilde{S}^* &= (e^{\varphi_1} + e^{\varphi_2 + \frac{\pi}{2}} - e^{\varphi_3} - e^{\varphi_4 + \frac{\pi}{2}}) (e^{-\varphi_1} + e^{-\varphi_2 - \frac{\pi}{2}} - e^{-\varphi_3} - e^{-\varphi_4 - \frac{\pi}{2}}) \\ &= 4 + 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j>i}^4 \cos(\varphi_j - \varphi_i) \\ &= 4 + \sum_{i=1}^3 \sum_{j>i}^4 \alpha_{i,j} G_2(\varphi_i, \varphi'_j)\end{aligned}$$

Dans cette dernière expression, on a introduit un premier paramètre,  $\alpha_{i,j}$ , qui est en fait une puissance de  $e^{\frac{\pi}{4}}$ , et implicitement un second,  $\beta_{i,j} \in \mathbb{N}$ , tel que  $\varphi'_j = \varphi_j + \beta_{i,j} \frac{\pi}{4}$  (la démarche suivie est analogue à celle qui sera employée pour le calcul de la cohérence  $S \tilde{S}^*$  et sera alors mieux explicitée).

Dans ces deux termes apparaît une constante (de valeur 4) qui est en fait le nombre de cibles : c'est aussi la valeur moyenne.

La cohérence s'écrit :

$$\begin{aligned}W &= S \tilde{S}^* \\ &= (e^{\varphi_1} + e^{\varphi_2} + e^{\varphi_3} + e^{\varphi_4}) (e^{-\varphi_1} + e^{-(\varphi_2 + \frac{\pi}{2})} - e^{-\varphi_3} - e^{-(\varphi_4 + \frac{\pi}{2})})\end{aligned}$$

C'est parce que l'on peut appairer les cibles deux à deux en choisissant les paires déphasées de  $\pi$  qu'il n'y a pas de terme constant. En revanche, les expressions  $S S^*$  et  $\tilde{S} \tilde{S}^*$  exhibent une constante égale au nombre de cibles élémentaires.

Les "termes croisés" requièrent un calcul moins trivial, le regroupement des termes pouvant donner :

– des cosinus, comme dans

$$e^{\varphi_1} e^{-(\varphi_2 + \frac{\pi}{2})} + e^{-\varphi_1} e^{\varphi_2} = e^{-\frac{\pi}{4}} (e^{\varphi_1 - \varphi_2 - \frac{\pi}{4}} + e^{-\varphi_1 + \varphi_2 + \frac{\pi}{4}}) = 2 e^{-\frac{\pi}{4}} \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2 - \frac{\pi}{4}\right)$$

– des sinus, comme dans

$$e^{\varphi_3} e^{-\varphi_1} - e^{\varphi_1} e^{-\varphi_3} = e^{\varphi_3 - \varphi_1} - e^{-(\varphi_3 - \varphi_1)} = 2j \sin(\varphi_3 - \varphi_1)$$

et comme dans :

$$e^{\varphi_4} e^{-\varphi_1} - e^{\varphi_1} e^{-\varphi_4 - \frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{4}} (e^{\varphi_4 - \varphi_1 + \frac{\pi}{4}} - e^{-\varphi_4 - \varphi_1 - \frac{\pi}{4}}) = 2j e^{-\frac{\pi}{4}} \sin\left(\varphi_4 - \varphi_1 + \frac{\pi}{4}\right)$$

On montre alors que l'on a :

$$\begin{aligned}
W &= 2 e^{-j\frac{\pi}{4}} \left( \cos \left( \varphi_1 - \varphi_2 - \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left( \varphi_3 - \varphi_4 - \frac{\pi}{4} \right) \right) \\
&\quad + 2 \left( j \sin(\varphi_3 - \varphi_1) + j e^{j\frac{\pi}{4}} \sin \left( \varphi_4 - \varphi_1 - \frac{\pi}{4} \right) + \sin(\varphi_4 - \varphi_2) \right) + e^{-j\frac{\pi}{4}} j \sin \left( \varphi_3 - \varphi_2 - \frac{\pi}{4} \right) \\
&= \sum_{i=1}^3 \sum_{j>i}^4 \alpha_{i,j} G_2(\varphi_i, \varphi'_j)
\end{aligned}$$

Dans cette expression,  $\alpha_{i,j}$  est une puissance (entière) de la grandeur complexe  $e^{j\frac{\pi}{4}}$  et on a aussi  $\varphi'_j = \varphi_j + \beta_{i,j} \frac{\pi}{4}$ , avec  $\beta_{i,j}$  entier. Contrairement au cas à 2 cibles,  $W$  n'a pas une phase indépendante des grandeurs  $\varphi_i$ .

Dans la mesure où les phases initiales  $(\varphi_i, \varphi_j)$  sont décorréelées, les phases  $(\varphi_i, \varphi'_j)$ , obtenues par ajout d'une constante sont aussi décorréelées. A la différence de  $S S^*$  et de  $\tilde{S} \tilde{S}^*$ , la moyenne de  $W$  est donc nulle.

Il est alors aisé d'en déduire que, comme au paragraphe précédent, l'interférogramme multivue a une cohérence qui tend vers zéro pour  $L \rightarrow \infty$ .

### Cas général

Augmenter le nombre de diffuseurs de phase aléatoires décorréelées dans une cellule de résolution ne peut qu'amplifier le phénomène de perte de cohérence. On peut donc être convaincu que, pour une différence de marche de  $\lambda$  en bord d'"antenne-sol", les deux acquisitions obtenues par les deux capteurs fournissent des images de cohérence nulle.

Deux points restent à évoquer :

- Pour la bonne marche des calculs dans ces deux cas simples, ainsi que pour une mise en œuvre plus aisée dans un code informatique, les cibles élémentaires ont été équiréparties dans l'"antenne-sol". En réalité, leur positionnement est aléatoire (il n'y a aucune raison que cette disposition de cibles soit un cristal –pour les physiciens– ou un pavage régulier –pour les mathématiciens–). Or ce positionnement aléatoire, plus désordonné, conduit à une augmentation d'entropie : on ne peut espérer d'un tel mécanisme qu'il conduise à une augmentation de la cohérence, c'est à dire à une compensation de la perte de cohérence observée, puisque la cohérence est, somme toute, une mesure de l'entropie : plus la cohérence est forte, plus l'entropie est faible. Donc le raisonnement tenu sur un positionnement strict se généralise à un positionnement aléatoire.
- L'amplitude des cibles élémentaires est aussi identique pour toutes les cibles : là aussi, cela simplifie l'approche analytique. Sur le plan de la simulation, cette contrainte peut aisément se contourner : par exemple, pour générer des images de chatoiement il est alors bien connu qu'en tirant amplitude et phase de chaque cible élémentaire, le nombre de ces cibles peut être fortement diminuée pour obtenir des images ressemblant, en loi empirique, à du chatoiement pleinement développé. Le problème est alors de choisir une loi qui n'impose pas *de facto* son comportement au résultat (par exemple, il n'est pas souhaitable de générer une amplitude par un tirage d'une loi de Nakagami!!).

### 3.3 Autre approche de la cohérence

Reprenons l'analyse de l'antenne-sol : celle-ci, placée dans un repère dont l'origine est confondue avec son bord gauche (figure 30) est donc constituée d'un certain nombre  $N$  de cibles élémentaires positionnées en  $X_i, i \in [1, N]$ , chacune ayant une amplitude aléatoire  $a_i$  et une phase propre aléatoire  $\varphi_i$ . A la différence du cas précédemment traité (paragraphe 3.2.2), la position  $X_i$  des cibles est elle même aléatoire.

La sommation spécifique au chatoiement permet d'écrire la valeur du pixel observé selon un angle d'incidence  $\theta$  :

$$A(\theta) = \sum_{i=1}^N a_i e^{j\varphi_i} e^{2j\pi \frac{X_i \sin \theta}{\lambda}} = a_\theta e^{j\varphi_\theta} \quad (34)$$

expression dans laquelle le dernier terme prend en compte un terme de phase géométrique liée à la différence de trajets existants entre chaque diffuseur et l'antenne de réception (on ne prend pas en

compte dans cette expression le terme propre au trajet entre le bord-origine de l'antenne-sol et l'antenne de réception).

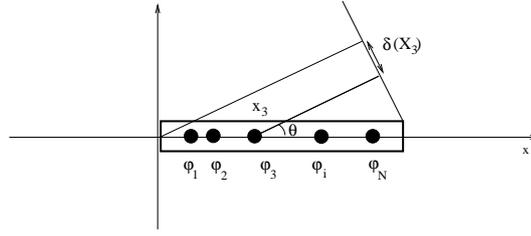


FIG. 30 – Antenne-sol.

Pour un autre angle d'incidence  $\theta'$ , on trouve de même :

$$A(\theta') = \sum_{i=1}^N a_i e^{j\varphi_i} e^{2j\pi \frac{x_i \sin \theta'}{\lambda}} = a_{\theta'} e^{j\varphi_{\theta'}} \quad (35)$$

A priori, le chatoiement ainsi obtenu diffère de celui obtenu avec l'angle d'incidence  $\theta$ , comme nous avons pu le voir précédemment.

Or, si l'on pouvait modifier la valeur de la longueur d'onde, il serait possible d'obtenir le même résultat de chatoiement (amplitude et phase) à condition d'utiliser une longueur d'onde  $\lambda'$  telle que :

$$\frac{\sin \theta'}{\lambda'} = \frac{\sin \theta}{\lambda} \quad (36)$$

Dans ce cas, les sommations cohérentes seraient identiques car le terme de phase géométrique liée à la position de chaque diffuseur au sein de la cellule de résolution serait le même.

En posant  $\lambda' = \lambda + \delta\lambda$  et  $\theta' = \theta + \delta\theta$ , on obtient :

$$\frac{\sin \theta'}{\lambda'} = \frac{\sin(\theta + \delta\theta)}{\lambda + \delta\lambda} \simeq \frac{\sin \theta + \delta\theta \cos \theta}{\lambda + \delta\lambda} = \frac{\sin \theta}{\lambda} \frac{1 + \frac{\delta\theta \cos \theta}{\sin \theta}}{1 + \frac{\delta\lambda}{\lambda}}$$

ce qui permet de trouver la relation entre l'écart angulaire (lié à la base)  $\delta\theta$  et la variation de longueur d'onde  $\delta\lambda$  :

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\delta\theta \cos \theta}{\sin \theta}$$

Dans ces conditions, le chatoiement obtenu serait identique.

Or, le signal radar est de type bande étroite, centrée en  $f_0$ , et possède une certaine bande passante  $W$ . Dans le cas où le signal émis est un *chirp*, c'est cette même bande qui définit la "case temporelle", c'est à dire la cellule de résolution selon l'axe des temps :

$$\delta t = \frac{1}{W}$$

ce qui permet d'en déduire la dimension de la cellule sol par projection selon l'axe Ox :

$$\delta x = \frac{c}{2W \sin \theta} \quad (37)$$

Si l'on considère une variation de longueur d'onde  $\delta\lambda$  au sein de la bande passante  $W$ , elle peut être compensée par un écart angulaire  $\delta\theta$  donné par la relation :

$$\delta\theta = \frac{\delta\lambda \sin \theta}{\lambda \cos \theta} \quad (38)$$

Considérons le cas où la variation de longueur d'onde correspond à une excursion maximale de la fréquence :

$$\frac{\delta\lambda_W}{\lambda} = \frac{W}{f_0} \Leftrightarrow \delta\lambda_W = \frac{W \lambda}{f_0}$$

La relation 37 permet d'écrire :

$$W = \frac{c}{2\delta x \sin \theta}$$

d'où

$$\delta\lambda_W = \frac{\lambda^2}{2\delta x \sin \theta}$$

A l'aide de la relation 38 on en déduit l'expression de l'écart angulaire correspondant :

$$\delta\theta_W = \frac{\lambda}{2\delta x \cos \theta}$$

C'est très exactement l'expression 33 obtenue lors du calcul de la base critique.

Cette analyse est le fondement de la notion de "fréquence sol" parfois utilisée qui analyse le phénomène en projetant simplement la fréquence de l'onde sur le sol. Si l'on fait varier l'angle d'incidence, on observe alors un décalage de cette fréquence sol (qui n'a rien de physique et qui n'est qu'une projection géométrique). Le "spectre sol" ainsi obtenu est alors comparé selon les valeurs d'angle d'incidence : lorsque l'écart d'angle conduit à une intersection nulle entre ces "spectres-sol", l'interférométrie n'est alors plus possible.

### 3.4 Effets de la base sur la cohérence

On voit ainsi que l'existence de la base se traduit par un décalage de la "fréquence sol" : c'est un raisonnement couramment admis dans la communauté des radaristes qui permet de conclure rapidement sur le fait qu'il existe une bande utile, intersection des parties communes des deux spectres obtenus par le capteur  $C$  et par le capteur  $C'$ . Cette intersection est d'autant plus petite que l'on se rapproche de la base critique. Pour calculer un "bon" interférogramme, il faut alors filtrer les deux images initiales pour enlever dans leurs spectres respectifs les parties non communes. On gagne alors en qualité (rapport signal à bruit) ce que l'on perd en résolution en distance.

Le problème existentiel est que cette fréquence n'a pas de réalité physique et n'est qu'une projection géométrique, ce qui peut poser des problèmes d'interprétation. Une autre analyse est cependant possible : pour cela reprenons la relation 38

$$\delta\theta = \frac{\delta\lambda \sin \theta}{\lambda \cos \theta}$$

On peut en déduire une relation donnant l'écart de longueur d'onde en fonction de l'écart angulaire :

$$\delta\lambda = \frac{\lambda \delta\theta \cos \theta}{\sin \theta}$$

ce qui donne en passant aux fréquences

$$\delta f = f \frac{\delta\theta \cos \theta}{\sin \theta}$$

La figure 31 illustre ce décalage de fréquence pour une fréquence donnée  $f$  dans la bande utile.

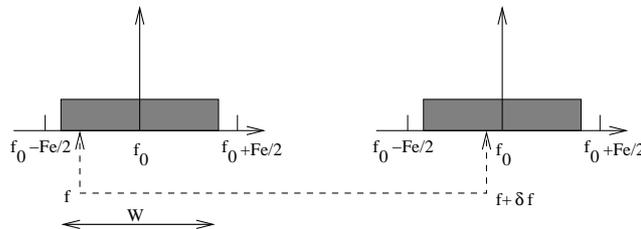


FIG. 31 – Dans le spectre utile (que l'on suppose centré autour de  $f_0$  donc entre les fréquences  $f_0 - W/2$  et  $f_0 + W/2$ ,  $Fe$  étant la fréquence d'échantillonnage,  $W$  étant la bande utile), le speckle est identique pour les deux capteurs si l'on choisit la fréquence  $f$  pour le capteur  $C$  et la fréquence  $f + \delta f$  pour le capteur  $C'$ .

Soit  $W$  la bande du signal radar. Pour une fréquence  $f$  donné (correspondant à l'image acquise par le capteur  $C$ ), si la fréquence  $f + \delta f$  appartient à la bande utile  $W$ , alors la valeur du spectre de l'image  $C$  pour la fréquence  $f$  est identique à la valeur du spectre de l'image  $C'$  à la fréquence  $f + \delta f$ . Tout se passe comme si le spectre était décalé : comme ce spectre est borné, un décalage va donc réduire la partie utile dans laquelle on peut trouver des fréquences communes.

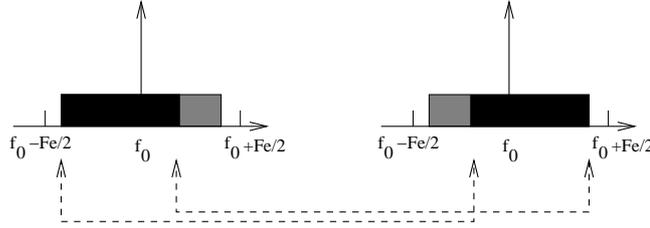


FIG. 32 – Dans le spectre utile (que l'on suppose centré autour de  $f_0$  donc entre les fréquences  $f_0 - W/2$  et  $f_0 + W/2$ ,  $Fe$  étant la fréquence d'échantillonnage,  $W$  étant la bande utile), on peut définir une plage fréquentielle pour les signaux des deux capteurs de sorte que le speckle soit identique dans la plage de fréquence ainsi définie.

On en déduit donc la cohérence  $D$  :

$$D = \frac{f}{W} \frac{\delta\theta \cos\theta}{\sin\theta}$$

Pour réduire le bruit, il peut être judicieux de filtrer le spectre et de n'en conserver, pour les deux capteurs, que les parties ayant des contributions identiques pour le speckle (figure 33).

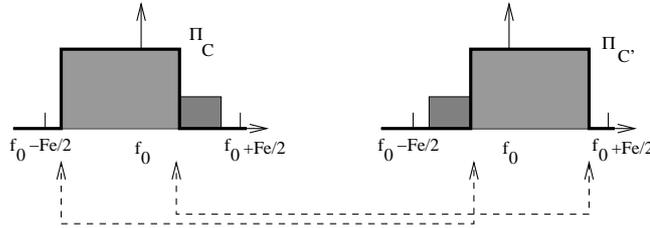


FIG. 33 – Fenêtres spectrales  $\Pi_C$  (pour le capteur  $C$ ) et  $\Pi_{C'}$  (pour le capteur  $C'$ ). Elles sont identiques, mais décalées de  $\delta f$ , ce qui se traduira par une multiplication par un signal monochromatique –donc une rampe de phase– dans le plan temporel.

Il est intéressant de bien comprendre que les spectres sont donc décalés :

$$\text{TF}_C(f) = \text{TF}_{C'}(f) \star \delta(f - \delta f) = \text{TF}_{C'}(f) \star \delta\left(f - \frac{f\delta\theta \cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

Donc, par construction, ce décalage en fréquence du spectre va générer une multiplication par une exponentielle complexe dans le domaine signal :

$$S(x, y) = S'(x, y) e^{2j\pi \frac{\delta r \delta\theta \cos\theta}{\sin\theta}}$$

En réécrivant cette expression en fonction de la base orthogonale, on obtient :

$$S(x, y) = S'(x, y) e^{2j\pi \frac{\delta r B \cos\theta}{R \sin\theta}}$$

et on retrouve tout simplement les franges orbitales liées à la notion même de baseline.

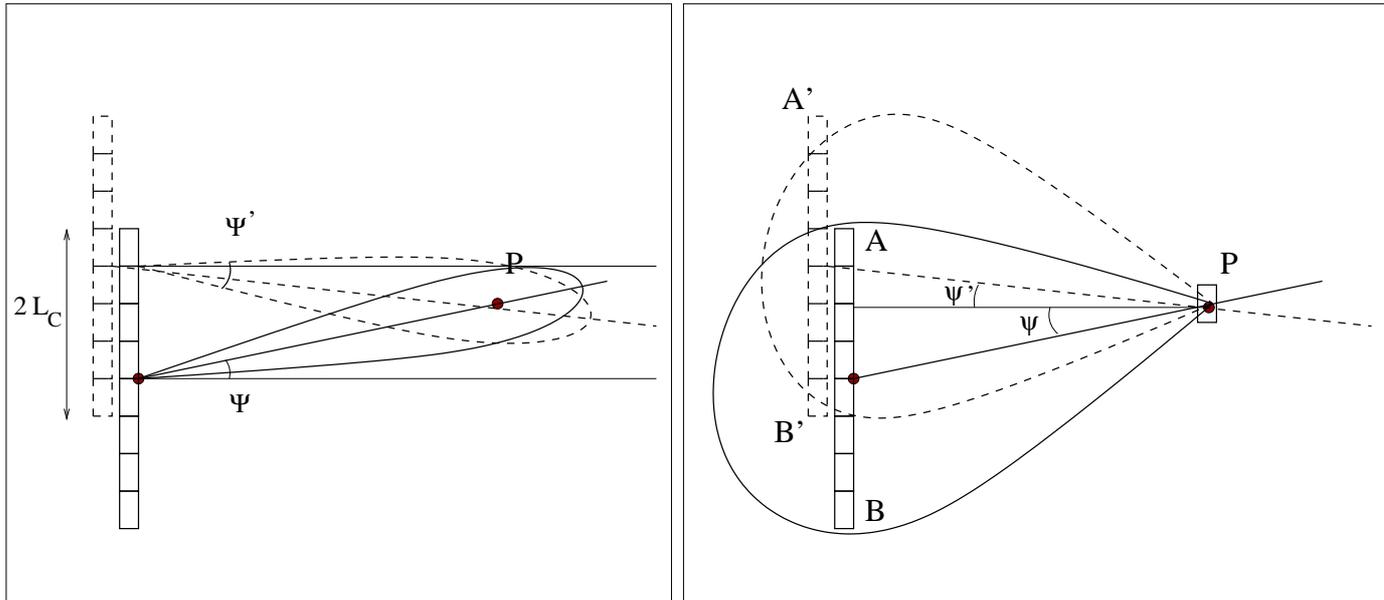


FIG. 34 – Acquisition par deux capteurs d’angles de squint différents ( $\Psi_A$  et  $\Psi_B$ ). Les deux antennes synthétiques correspondantes ont une partie commune, de dimension  $2L_C$ . A droite, la cellule sol réémet en direction de l’antenne  $AB$  (dépointage  $\Psi$ ) et en direction de l’antenne  $A'B'$  (dépointage  $\Psi'$ )

### 3.5 Effets du dépointage sur la cohérence

En configuration interférométrique, les acquisitions devraient être effectuées de manière identique. En pratique, il n’est pas possible de garantir un pointage identique des antennes synthétiques (de dimension  $2L_S$ ) : il faut alors considérer que les angles de squint sont différents pour les deux acquisitions (figure 34).

Deux raisonnements simples peuvent alors être proposés :

- En chaque point du sol où on effectue la synthèse, l’information à prendre en compte doit être identique pour les deux acquisitions. En particulier, les cibles doivent être imagées sous le même angle : l’antenne synthétique doit donc être identique. Pour cela, seule la partie commune aux antennes synthétiques doivent être prises en compte : lors de la synthèse, il faut considérer des valeurs spécifiques de débatement angulaire autour des valeurs de squint. Pour les deux images, l’antenne synthétique est alors plus petite (de dimension  $2L_C$  sur la figure 34). La résolution est dégradée, mais la cohérence observée ne dépend que des caractéristiques des cibles.
- Si l’on considère l’antenne-sol (dans le sens azimutal), il est nécessaire de lui rajouter une rampe de phase, différente selon que l’on souhaite qu’elle pointe vers l’antenne  $AB$  ou vers l’antenne  $A'B'$ . Le même raisonnement que celui proposé pour la définition de la base critique peut alors être adopté. Si ce dépointage se traduit par une différence de  $\lambda$  entre les différences  $d(PB) - D(PA)$  et  $d(PB') - d(PA')$ , alors aucune cohérence ne peut être obtenue. Or, par définition de la résolution de l’antenne synthétique, cette différence est atteinte dès lors que les deux antennes synthétiques sont décalées d’une valeur égale à la résolution de la cellule sol. En prenant en compte le trajet aller-retour, il vient le même résultat : il n’y a plus de cohérence si les deux antennes synthétiques sont décalées de plus de  $2L_S$ , c’est à dire n’ont aucune partie en commun.

## 4 Conclusion

Le but de ce rapport était d’analyser la richesse des approches temporelles en imagerie cohérente. Si la modélisation analytique n’est finalement réalisable que dans un cas particulier : le balle plan, la simplicité de l’analyse qualitative que permet une telle approche donne néanmoins des résultats convaincants. Par

exemple, dans le cas de l'antenne rectangulaire, les positions des zéros et des secondaires sont correctement trouvées, même si l'amplitude des secondaires n'est qu'approchée.

L'approche temporelle propose aussi un éclairage nouveau sur les principes de l'interférométrie : la notion de base critique et la prise en compte du squint.

Reste encore à élargir le concept. En effet, l'interprétation de l'approche temporelle est aisée dans le cadre des signaux "bande étroite". Des travaux restent à faire pour traiter les signaux large bande, même s'il est intéressant de noter qu'en échographie médicale (utilisant des signaux très large bande) les principaux raisonnements s'effectuent sur la fréquence centrale et semblent suffire pour l'analyse des directivités.

Passer d'un signal monochromatique à un signal large bande rappelle le problème bien connu en optique de la diffraction en lumière blanche : une analyse du phénomène de diffraction fera apparaître des cannelures dans le spectre diffracté, et l'allure colorée des franges de diffraction fera place à un "blanc d'ordre supérieur" pour des angles importants. C'est dans cet esprit qu'il faudrait analyser l'extension de l'approche temporelle aux signaux larges bandes.

## Références

- [1] M. Arditi, F.S. Stuart, J.W. Hunt *Transient fields of concave annular arrays* Ultrasonic Imaging 3, 37-61, 1981
- [2] J.M. Nicolas *Propagation des ultrasons en milieu hétérogène* Thèse de troisième cycle de l'Université Paris XI, 1982
- [3] J.M. Nicolas, G. Vasile, M. Gay, F. Tupin, E. Trouvé *SAR processing in the temporal domain : application to direct interferogram generation and mountain glacier monitoring* Canadian Journal of Remote Sensing, Vol. 33, No. 1, pp. 52-59, 2007
- [4] M. Sigwalt and M. Fink *Diffraction impulse response of non planar transducers* Acoustical Imaging, Vol 14, pp 533-546, 1985
- [5] F. Oberhettinger *On transient solutions of the baffled piston problem* J.Res. Nat. Bur. Stand., 65B, pp 1-6, 1961
- [6] P.R. Stepanishen *The time-dependent force and radiation impedance on a piston in a rigid infinite planar baffle* J.Acoust.Soc.Am. 49 (3), pp. 841-849, 1971.
- [7] F. Vignon *Focalisation d'ultrasons par filtre inverse et retournement temporel, application à l'échographie transcrânienne* Thèse de doctorat de l'Université Paris 7, 2005
- [8] Vo-Khac Khoan *Distributions, analyse de Fourier, opérateurs aux dérivées partielles* tomes 1 et 2, Vuibert, 1972

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Méthodes temporelles et méthodes fréquentielles</b>	<b>1</b>
1.1	Introduction . . . . .	1
1.2	L'équation des ondes . . . . .	1
1.3	Le principe de Huyghens : application à la diffraction par un écran plat . . . . .	2
1.4	Réponse impulsionnelle du baffle plan . . . . .	4
1.4.1	Le baffle plan analysé selon Stepanishen . . . . .	4
1.4.2	Le baffle plan en champ lointain . . . . .	9
1.4.3	Premières conclusions . . . . .	9
1.5	Application : l'antenne rectangulaire . . . . .	10
1.5.1	Description du problème . . . . .	10
1.5.2	Calcul classique de la réponse de l'antenne . . . . .	11
1.5.3	Autre méthode : "Huyghens point à point" et découpage en deux sous antennes . . . . .	12
1.5.4	"Huyghens point à point" et découpage en $2p$ sous antennes : les positions des zéros . . . . .	14
1.5.5	"Huyghens point à point" et découpage en $2p + 1$ sous antennes : les positions des secondaires . . . . .	17
1.5.6	"Huyghens point à point" : synthèse . . . . .	17
1.6	Autres formes d'antenne : Antenne concave . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Applications de l'approche temporelle : le Radar à Synthèse d'Ouverture (RSO)</b>	<b>19</b>
2.1	Profondeur de champ d'une antenne . . . . .	19
2.2	Antenne synthétique . . . . .	20
2.2.1	Principes . . . . .	20
2.2.2	RSO satellitaire . . . . .	22
2.2.3	Dépointage et Doppler-centroïde . . . . .	23
2.3	MTI : Moving Target Imaging . . . . .	24
2.3.1	Mouvements parallèles . . . . .	24
2.3.2	Mouvements radiaux . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Application à l'interférométrie</b>	<b>28</b>
3.1	Le speckle en imagerie RSO : application à l'interférométrie . . . . .	29
3.2	Base critique . . . . .	30
3.2.1	Conjecture . . . . .	30
3.2.2	Simulations . . . . .	30
3.2.3	Calcul de la base critique . . . . .	32
3.2.4	Une ébauche de démonstration . . . . .	34
3.3	Autre approche de la cohérence . . . . .	37
3.4	Effets de la base sur la cohérence . . . . .	39
3.5	Effets du dépointage sur la cohérence . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>41</b>



