



Une école de l'IMT

Les lois de l'imagerie cohérente : l'apport des statistiques de Mellin et des fonctions de Meijer

Jean-Marie Nicolas

A large, solid gray square that serves as a background for the text "2019D004".

2019D004

avril 2019

Département Image, Données, Signal
Groupe IMAGES : *Image, Modélisation,
Analyse, GEométrie, Synthèse*

Les lois de l'imagerie cohérente : l'apport des statistiques de Mellin et des fonctions de Meijer

Un grand merci aux "Mellinistes" :

Riadh Abdelfattah
Stian Normann Anfinson
Abdourrahmane Atto
Roland Badeau
Lionel Bombrun
Florentin Bujor
Frédéric Galland
Carlos López Martinez
Alain Maruani
Hélène Oriot
Béatrice Puysségur
Guillaume Quin
Philippe Réfrégier
Hélène Sportouche
Cédric Thuillier
Céline Tison
Emmanuel Trouvé
Florence Tupin
Flora Weissgerber
Josiane Zerubia

et surtout à Hjalmar Mellin
dont les travaux uniques lui ont permis
*...de mériter une immortalité chimérique où presque tous les Hommes aspirent*¹

1. François Couperin (1668-1733), Préface du quatrième livre de pièces de clavecin, Boivin et Le Clerc, 1730, dans son orthographe d'origine

Table des matières

I	Le chatoiemment et ses modèles	11
1	Le chatoiemment et sa modélisation	13
1.1	Principes et propriétés de l'imagerie cohérente	13
1.1.1	Les systèmes d'imagerie cohérente	13
1.1.2	Le chatoiemment	15
1.2	Le chatoiemment pleinement développé et sa modélisation	16
1.2.1	Le concept de "phaseur" (Goodman)	16
1.2.2	Phaseurs et loi normale	18
1.2.3	Phaseurs et loi de Rayleigh (pixels en amplitude)	18
1.2.4	Phaseurs et loi exponentielle décroissante (pixels en intensité)	20
1.2.5	Simulation de chatoiemment pleinement développé	21
1.3	Chatoiemment et texture	25
1.3.1	Le <i>Compound Speckle</i>	25
1.3.2	Exemple de zones texturées	26
1.3.3	Cible ponctuelle et phaseurs : la loi de Rice	26
2	La transformée de Mellin et les log-statistiques	29
2.1	Rappels sur la transformée de Mellin et ses propriétés	29
2.1.1	Définition	29
2.1.2	Propriétés	30
2.1.3	Convolution de Mellin	30
2.1.4	La transformée de Mellin : comparaisons avec la transformée de Laplace et la transformée de Fourier	32
2.2	Quelques rappels sur le rôle de la transformée de Fourier en statistiques traditionnelles	34
2.2.1	Définition des fonctions caractéristiques	34
2.2.2	Moments	35
2.2.3	Cumulants	36
2.2.4	Somme de variables aléatoires	36
2.2.5	Données discrètes	37
2.2.6	L'héritage des statistiques traditionnelles	38
2.3	Application de la transformée de Mellin aux lois de probabilités définies sur \mathbb{R}^+	38
2.3.1	Définition des log-statistiques pour des densités de probabilités définies sur \mathbb{R}^+	38
2.3.2	Liens entre première fonction caractéristique de deuxième espèce et moments	40
2.3.3	Définition des log-moments et des log-cumulants	40
2.3.4	Propriétés des log-moments	40
2.3.5	Propriétés des log-cumulants	41
2.3.6	Données discrètes	42
2.4	Propriétés des Log-statistiques	42
2.4.1	Moments traditionnels et première fonction caractéristique	42
2.4.2	Produit de variables aléatoires	42
2.4.3	Lois directes et lois inverses	43
2.4.4	Similitude, facteur d'échelle et loi homothétique	44
2.4.5	Lois généralisées	45

2.4.6	Changements d'échelle : passage en échelle logarithmique	46
2.4.7	Moments et modèles mixtes	47
2.5	Bilan : le nouvel héritage des log-statistiques	48
3	Exemples d'application des log-statistiques	51
3.1	La loi Gamma et la loi Gamma Inverse	51
3.1.1	Analyse par les statistiques traditionnelles	52
3.1.2	Analyse par les log-statistiques	53
3.1.3	Loi Gamma et loi Gamma Inverse	54
3.1.4	La loi Gamma Généralisée	54
3.1.5	Passage en amplitude : la loi de Nakagami	55
3.1.6	Loi Gamma et loi Gamma Inverse dans le diagramme $\beta_1 - \beta_2$	55
3.1.7	Loi Gamma et loi Gamma Inverse dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$	56
3.1.8	Estimation des paramètres de la loi Gamma	57
3.1.9	Loi Gamma et convolution de Mellin	58
3.1.10	La loi Gamma et sa propriété d'additivité	61
3.2	La loi Beta	62
3.2.1	Définition et propriétés	62
3.2.2	La loi Beta Inverse	64
3.2.3	Loi Beta et loi Beta Inverse dans le diagramme $\beta_1 - \beta_2$	64
3.2.4	Loi Beta et loi Beta Inverse dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$	65
3.2.5	Estimation des paramètres de la loi Beta	65
3.2.6	Loi Beta, loi Beta Inverse et convolution de Mellin	67
3.3	Passage en échelle logarithmique	69
3.3.1	Loi Gamma et loi de Fisher-Tipett	69
3.3.2	Loi Gamma Inverse et loi de Fisher-Tipett Opposée	70
3.3.3	Loi de Fisher et loi Z de Fisher	71
3.3.4	Loi log-normale et loi normale	72
3.4	Les lois de probabilités et leurs expressions sous forme de fonction de Meijer	73
3.4.1	Lois Gamma, Gamma Inverse, Beta et Beta Inverse sous forme de fonction de Meijer	73
3.4.2	Propriétés	75
3.4.3	Les lois de Meijer	77
II	Les lois utiles en imagerie cohérente	83
4	Les lois usuelles définies sur \mathbb{R}^+	87
4.1	Lois à un paramètre	88
4.1.1	Loi Homothétique	88
4.1.2	Loi uniforme sur $[0, \mu]$	90
4.1.3	Loi Exponentielle Décroissante	92
4.1.4	Loi Exponentielle Décroissante Inverse	94
4.2	Lois à deux paramètres	96
4.2.1	Loi Gamma	96
4.2.2	Loi Gamma Inverse	98
4.2.3	Loi Log-normale	100
4.3	Lois à trois paramètres	102
4.3.1	Loi \mathcal{K}	102
4.3.2	Loi K inverse	104
4.3.3	Lois de Fisher	106
4.3.4	Loi Beta	108
4.3.5	Loi Beta Inverse	110
4.3.6	Loi de Halphen (loi Inverse Gaussienne Généralisée) [37]	112
4.4	Lois à 4 paramètres	114
4.4.1	Loi "super K"	114

4.4.2	Loi “super K” Inverse	116
4.4.3	Loi U	118
4.4.4	Loi U Inverse	120
4.4.5	Loi W	122
4.4.6	Loi W Inverse	124
4.4.7	Loi Y	126
4.4.8	Loi Y Inverse	128
5	Les lois généralisées usuelles définies sur \mathbb{R}^+	131
5.1	Lois à deux paramètres	132
5.1.1	Loi de Weibull $\mathcal{W}[\mu, \eta]$	132
5.1.2	Loi Gaussienne Généralisée $\mathcal{NG}^+[\sigma, \eta]$	134
5.2	Lois à trois paramètres	136
5.2.1	Loi Gamma Généralisée $\mathcal{GG}[\mu, L, \eta]$	136
5.3	Lois à quatre paramètres	138
5.3.1	Loi \mathcal{K} généralisée $\mathcal{KG}[\mu, L, M, \eta]$	138
5.3.2	Loi de Fisher Généralisée $\mathcal{FG}[\mu, L, M, \eta]$	140
5.3.3	Loi Beta Généralisée $\mathcal{BG}[\mu, L, M, \eta]$	142
6	Les lois usuelles en imagerie cohérente (lois en amplitude)	145
6.1	Lois en amplitude à un paramètre	146
6.1.1	Loi de Rayleigh $\mathcal{R}[\mu]$	146
6.1.2	Loi de Rayleigh Inverse $\mathcal{RI}[\mu]$	148
6.2	Lois en amplitude à deux paramètres	150
6.2.1	Loi de Rayleigh-Nakagami $\mathcal{RN}[\mu, L]$	150
6.2.2	Loi de Rayleigh-Nakagami Inverse $\mathcal{RNI}[\mu, M]$	152
6.2.3	Loi de Rice $\mathcal{RC}[\mu, \mu_C]$	154
6.2.4	Loi de Rice $\mathcal{RC}_2[\mu, \lambda]$	156
6.3	Lois en amplitude à trois paramètres	158
6.3.1	Loi \mathcal{K} en amplitude	158
6.3.2	Loi \mathcal{K} en amplitude Inverse	160
6.3.3	Loi de Fisher en amplitude	162
6.3.4	Loi Beta en amplitude	164
6.3.5	Loi Beta en amplitude Inverse $\mathcal{BAI}[\mu, L, M]$	166
6.3.6	Loi de Halphen modifiée en amplitude	168
6.4	Lois en amplitude à quatre paramètres	170
6.4.1	Loi “super K” en amplitude	170
6.4.2	Loi “super K” en amplitude inverse	172
6.4.3	Loi U en amplitude	174
6.4.4	Loi U en amplitude inverse	176
6.4.5	Loi W en amplitude	178
6.4.6	Loi W en amplitude inverse	180
6.4.7	Loi Y en amplitude	182
6.4.8	Loi Y en amplitude inverse	184
6.4.9	Compound Halphen en amplitude	186

III Estimation des lois 187

7	Estimateurs et Variances d’estimateurs	191
7.1	Matrice d’information de Fisher et Maximum de Vraisemblance	191
7.1.1	Matrice d’information de Fisher	191
7.1.2	Maximum de Vraisemblance et Entropie	192
7.1.3	Estimateur au sens du maximum de vraisemblance et Bornes de Cramèr-Rao	192
7.2	Moments et log-moments empiriques	192

7.2.1	Moments et moments centrés	193
7.2.2	Log-moments et log-cumulants	193
7.3	Diverses méthodes d'estimation des paramètres d'une loi	194
7.3.1	La Méthode des Moments (MM)	194
7.3.2	La Méthode des Log-Cumulants (MLC)	194
7.3.3	La Méthode du Maximum de Vraisemblance (MMV)	195
7.3.4	Méthode du coefficient de Variation (MCV)	195
7.4	Variance d'un estimateur : la méthode de Kendall et Stuart	195
7.4.1	Calcul de la variance d'un estimateur par la méthode de Kendall et Stuart	195
7.4.2	Une adaptation de la Méthode de Kendall et Stuart pour les statistiques de deuxième espèce	196
7.5	Variance des grandeurs statistiques usuelles	196
7.5.1	Méthode des moments : variance des Moments et Moments centrés	196
7.5.2	Méthode des moments : variance du coefficient de variation	197
7.5.3	Méthode des moments : variance des coefficients β_1 et β_2	197
7.5.4	Méthode des log-cumulants : variance des log-cumulants	198
7.6	Paramètre d'échelle et méthode du maximum de vraisemblance	198
7.6.1	Facteur d'échelle et paramétrisation des lois	198
7.6.2	L'exemple de la loi Gamma	199
7.6.3	Une propriété essentielle	200
7.6.4	Application à la méthode du maximum de vraisemblance	200
7.7	Le cas des "Lois de Meijer Normalisées"	201
7.7.1	Choix du formalisme	201
7.7.2	Maximum de vraisemblance	202
7.7.3	Cas des lois de Meijer Normalisées Généralisées	202
8	Estimation des paramètres des lois sur \mathbb{R}^+	205
8.1	Quelques rappels et remarques sur les estimateurs	205
8.1.1	Variance des estimateurs des moments centrés et des log-cumulants	205
8.1.2	Autres propriétés des lois définies sur \mathbb{R}^+	206
8.2	Estimation des paramètres : Lois usuelles à un paramètre	206
8.2.1	Loi Homothétique	206
8.2.2	Loi uniforme sur $[0, \mu]$	206
8.2.3	Loi Exponentielle Décroissante	207
8.2.4	Loi Exponentielle Décroissante Inverse	207
8.3	Estimation des paramètres : Lois usuelles deux paramètres	207
8.3.1	Loi Gamma	207
8.3.2	Loi Gamma Inverse	209
8.3.3	Loi Log-normale	210
8.4	Estimation des paramètres : Lois usuelles à trois paramètres	211
8.4.1	Loi \mathcal{K}	211
8.4.2	Loi \mathcal{K} Inverse	214
8.4.3	Loi de Fisher	215
8.4.4	Loi Beta	218
8.4.5	Loi Beta Inverse	220
8.5	Estimation des paramètres : Lois généralisées	221
8.5.1	Loi de Weibull $\mathcal{W}[\mu, \eta]$	221
8.5.2	Loi Gaussienne Généralisée $\mathcal{NG}^+[\sigma, \eta]$	223
8.5.3	Loi Gamma Généralisée	224
8.5.4	Loi \mathcal{K} généralisée $\mathcal{KG}[\mu, L, M, \eta]$	225
8.5.5	Loi de Fisher Généralisée $\mathcal{FG}[\mu, L, M, \eta]$	226
8.5.6	Loi Beta Généralisée $\mathcal{BG}[\mu, L, M, \eta]$	227
8.6	Estimation des paramètres : Lois en amplitude	228
8.6.1	Loi de Rayleigh $\mathcal{R}[\mu]$	228

8.6.2	Loi de Rayleigh Inverse $\mathcal{RI}[\mu]$	228
8.6.3	Loi de Rayleigh-Nakagami $\mathcal{RN}[\mu, L]$	229
8.6.4	Loi de Rayleigh-Nakagami Inverse $\mathcal{RN}\mathcal{I}[\mu, M]$	231
8.6.5	Loi de Rice : formalisme traditionnel	232
8.6.6	Loi de Rice : nouveau formalisme [38]	233
8.6.7	Loi \mathcal{K} en amplitude	234
8.6.8	Loi \mathcal{K} en amplitude Inverse	235
8.6.9	Loi de Fisher en amplitude	236
8.6.10	Loi Beta en amplitude	237
8.6.11	Loi Beta en amplitude Inverse	238
9	Les diagrammes $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$	239
9.1	Les limites du diagramme $\beta_1 - \beta_2$	239
9.2	Diagrammes de synthèse	240
9.2.1	Lois “en intensité”	240
9.2.2	Lois “en amplitude”	242
9.3	Exemples de lois en amplitude	242
9.3.1	La loi de Fisher en amplitude	243
9.3.2	La loi Beta en amplitude et la loi Beta en amplitude Inverse	244
9.3.3	La loi Gamma Généralisée	244
9.3.4	La loi de Halphen modifiée en amplitude	246
9.4	Cas de mélanges additifs de lois	251
9.4.1	Mélanges de lois Gamma	251
9.4.2	Mélange additif de lois de Rayleigh-Nakagami	251
9.4.3	Mélange additif de lois de Rayleigh-Nakagami et Rayleigh-Nakagami Inverse	252
9.5	Conclusion	253
10	Distances entre lois	255
10.1	Distance de Kullback-Leibler (DKL)	255
10.1.1	Définition et calculs préliminaires	255
10.1.2	Calculs intermédiaires pour la famille exponentielle	256
10.1.3	Calculs intermédiaires pour la loi de Fisher	256
10.1.4	Résultats : Distance de Kullback-Leibler entre deux lois Gamma	257
10.1.5	Résultats : Distance de Kullback-Leibler entre une loi de Fisher et une loi Gamma	258
10.2	La distance de Kolmogorov-Smirnov	258
10.2.1	Définition	258
10.2.2	Une propriété intégrale des fonctions de Meijer	258
10.2.3	Distance de Kolmogorov-Smirnov entre deux lois Gamma	259
10.2.4	Distance de Kolmogorov-Smirnov entre une loi Gamma et une loi de Fisher	260
10.2.5	Distance de Kolmogorov-Smirnov entre deux lois de Fisher	261
10.2.6	Les problèmes de la Distance de Kolmogorov-Smirnov	262
10.3	Les “lois mimes” ou “Mimick”	262
10.3.1	La loi de Fisher et la loi Gamma Généralisée comme Mimick : cadre général	262
10.3.2	La loi de Fisher en amplitude et la loi Gamma Généralisée comme Mimick : cadre général	264
10.3.3	Mimes sur cas réels	264
10.3.4	Mime parfait : cas d’égalité stricte entre lois	265
IV	Annexes	269
A	Fonctions spéciales	271
A.1	La fonction Gamma et ses dérivées	271
A.1.1	Définition	271
A.1.2	Quelques propriétés (formules d’Euler et de Legendre)	271

A.1.3	Comportement asymptotique en $z = 0^+$	273
A.1.4	La fonction Digamma	273
A.1.5	Définitions des fonctions Polygamma	273
A.1.6	Fonction de Pochhammer	274
A.1.7	La fonction Zeta	274
A.2	Les fonctions de Bessel	275
A.2.1	Fonctions de Bessel, de Neumann et de Hankel	275
A.2.2	Spécificités de la fonction de Bessel modifiée de troisième espèce (seconde fonction de Bessel)	275
A.2.3	Spécificités de la fonction de Bessel modifiée de première espèce	276
A.3	Les fonctions hypergéométriques	276
A.3.1	Les fonctions ${}_2F_1$ (hypergéométrique), ${}_1F_1$ (hypergéométrique confluyente), ${}_2F_0$ (Tricom) et ${}_0F_1$	277
A.3.2	Généralisation : les fonctions ${}_pF_q$	278
A.3.3	Fonctions associées : les fonctions de Whittaker	279
A.3.4	Fonctions hypergéométriques et fonctions de Bessel	279
B	Les fonctions de Meijer	281
B.1	Historique et notations	281
B.1.1	Définition des fonctions de Meijer	281
B.1.2	Transformée de Mellin des fonctions de Meijer	282
B.1.3	Comportement asymptotique des fonctions de Meijer (cas général)	283
B.1.4	Comportement asymptotique des fonctions de Meijer \bar{G}	283
B.1.5	Fonction inverse d'une fonction de Meijer donnée	284
B.2	Propriétés des fonctions de Meijer $\bar{G}_{p,q}^{m,n}$	284
B.2.1	Propriété de notation	284
B.2.2	Multiplication par la variable x	285
B.2.3	Convolution de Mellin	285
B.2.4	Dirac-Mellin	286
B.2.5	Dérivation d'une fonction de Meijer	287
B.2.6	Primitive d'une fonction de Meijer	287
B.2.7	Développement en série	288
B.2.8	Le groupe commutatif $\mathcal{GM}(\bar{G}_{q,p}^{n,m}, \hat{\star})$	289
B.2.9	Changement de notation : $x \rightarrow x^2$	289
B.3	Quelques fonctions usuelles sous forme de fonction de Meijer	290
B.3.1	Fonctions courantes	290
B.3.2	Fonctions Hypergéométriques	291
B.3.3	Fonctions de Bessel	293
B.4	Les fonctions de Meijer dans les logiciels actuels	294
C	Densité de probabilité et fonctions de Meijer	297
C.1	Densités de probabilité et formalisme "à la Meijer"	297
C.1.1	Loi de probabilité s'exprimant comme une fonction de Meijer	297
C.1.2	Propriétés fondamentales	298
C.1.3	Fonction de répartition	298
C.1.4	Conditions d'existence	298
C.2	Changement de variable : loi inverse et loi généralisée	300
C.2.1	Loi inverse	300
C.2.2	Lois généralisées	301
C.2.3	Lois en amplitude	301
C.3	Passage d'une expression selon x à une expression selon x^2	301
C.4	Deux propriétés importantes des lois de Meijer	302
C.4.1	Lois de Meijer et convolution de Mellin	302
C.4.2	Moyenne géométrique d'une loi de Meijer	302

D	Modèles RPM : applications aux lois de l'imagerie cohérente	307
D.1	Approximation et inversion des fonctions Polygamma	307
D.1.1	Approximation des fonctions Polygamma	307
D.1.2	Inversion des fonctions Polygamma	307
D.2	Quelques relations utiles pour l'imagerie cohérente : lois en intensité	308
D.2.1	Utilitaire de la loi Gamma : expression de $\tilde{\kappa}_3$ en fonction de $\tilde{\kappa}_2$	308
D.2.2	Utilitaire des caustiques de la loi K : expression de $\tilde{\kappa}_3$ en fonction de $\tilde{\kappa}_2$	308
D.3	Quelques relations utiles pour l'imagerie cohérente : lois généralisées	309
D.3.1	Loi de Weibull : inversion du coefficient de variation	309
D.3.2	Gamma Généralisée : inversion de la fonction $\frac{\Psi(2,L)}{\Psi(1,L)^{1.5}}$	309
D.4	Quelques relations utiles pour l'imagerie cohérente : lois en amplitude	310
D.4.1	Inversion du coefficient de variation de la loi de Rayleigh Nakagami	310
D.4.2	Inversion du coefficient de variation de la loi de Rayleigh Nakagami Inverse	310
D.4.3	Utilitaire de la loi de Rayleigh-Nakagami : expression de $\tilde{\kappa}_3$ en fonction de $\tilde{\kappa}_2$	310
D.4.4	Utilitaire de la caustique des lois K en amplitude : expression de $\tilde{\kappa}_3$ en fonction de $\tilde{\kappa}_2$	311
D.4.5	De la loi de Nakagami à la loi Gamma	311
D.4.6	De la loi Gamma à la loi de Nakagami	311
D.4.7	Loi de Rice (type 2) : inversion du coefficient de variation	312
D.5	Lois à 3 variables	312
D.5.1	Loi de Fisher	312
D.5.2	Loi Beta	312
E	Applications à l'interférométrie	313

Prélude

En 1981, travaillant sur la propagation des ultrasons en milieu hétérogène dans le cadre de ma thèse réalisée chez Philips, je rencontrais une équation intégrale un peu curieuse liant la solution de l'équation de propagation en milieu atténué Ψ_A avec la solution de la même équation dans un milieu sans atténuation Ψ_{NA} grâce à une fonction h ne dépendant que de l'atténuation [2] :

$$\Psi_A(t) = \int_0^\infty \Psi_{NA} h\left(\frac{t}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta}$$

Mon oncle, Michel Auphan, chercheur chez Philips et féru de fonctions spéciales², y a reconnu une convolution de Mellin³, et je ne pouvais savoir que ce mathématicien finnois aurait un rôle aussi tenace dans mon existence. En arrivant quatorze années plus tard à Télécom ParisTech dans l'univers de l'imagerie radar, l'histoire s'est répétée lorsque Florence Tupin, alors doctorante au département IMA et actuellement professeur à Télécom ParisTech, m'a montré une expression analytique un peu curieuse (voir [47] page 24) qui concernait la loi K (que Goodman a défini plus tard comme du "Compound Speckle") :

$$f_{RS}(I = RS) = \int f_R(R) f_S\left(\frac{I}{R}\right) \frac{1}{R} dR$$

j'y ai bien évidemment reconnu une convolution de Mellin⁴. Ce fut le point de départ d'une nouvelle aventure pour les travaux de ce mathématicien finnois méconnu : celle du monde des probabilités et des statistiques, effleuré par un pionnier nommé Benjamin Epstein⁵ en 1948, qui fut l'un des rares utilisateurs des travaux de Mellin à cette époque, et probablement le seul dans le domaine des probabilités. A ce sujet, on ne peut réellement que déplorer la méconnaissance de la transformée de Mellin dont témoigne Paul Levy dans ses travaux sur les lois multiplicatives [27] à la fin des années 50 : il aurait à coup sûr développé une théorie solide sur ce sujet qui aurait été alors universalement adoptée.

Les travaux de Delignon [13] sur d'autres types de "Compound Speckle" analysés comme solution du système de Pearson ont ensuite été un templin naturel pour cette transformée, celle-ci jouant alors un rôle d'outil permettant de grandes simplifications pour les démonstrations de grande technicité menées par Delignon. Il fallut –conours de circonstances– que j'accueille comme stagiaire Roland Badeau (actuellement professeur à Télécom ParisTech) pour que la théorie des "statistiques de deuxième espèce" prenne vie : celles ci pouvant aussi être nommées "statistiques de Mellin" ou "log-statistiques". Ce fut un travail de clone, la transformée de Mellin jouant le rôle de la transformée de Fourier dans la définition des fonctions caractéristiques : l'histoire a montré que ce résultat a largement dépassé cette tentative de simple reformulation et a débouché sur un cadre théorique tout à fait adapté aux lois de probabilité définies sur \mathbb{R}^+ , c'est à dire les lois de l'imagerie cohérente.

En point d'orgue, une meilleure lecture des célèbres Bateman, en particulier le volume II des ouvrages dédiés aux fonctions transcendentes [9], a débouché sur l'utilisation systématique en statistiques de Mellin des fonctions de Meijer dont il faut bien reconnaître que le formalisme initial est hautement déroutant. Heureusement que les logiciels utilisant ces fonctions (Python et Maple) ont des procédures assez intuitives montrant qu'au final il y a tout simplement dans la paramétrisation de ces fonctions quatre jeux de paramètres, chacun jouant un rôle différent dans la forme des fonctions. Et l'aventure s'achève presque 40 ans plus tard sur une relation dédiée à la méthode du maximum de vraisemblance (relation 7.21, page 202), spécifique aux lois exprimées sous forme de fonction de Meijer et dont la simplicité est étonnante.

Meijer et Mellin : deux mathématiciens dont les travaux débouchent sur une meilleure compréhension du bruit multiplicatif et sur une modélisation simple et facile à utiliser dont l'élégance laisse parfois rêveur⁶. A ce titre on ne peut que citer le mathématicien Hardy, expliquant au début du XX^{ème} siècle :

*Les motifs du mathématicien comme ceux du peintre ou du poète, doivent être beaux.
La beauté est la première mise à l'épreuve ;
il n'y a pas de place durable en ce monde pour des mathématiques qui seraient laides.*

2. il m'a légué les cinq volumes du Bateman

3. Hjalmar Mellin, 1854-1933

4. travaux publiés au GRETSI 1997[33], postérieurement – à quelques jours près– à la thèse de Florence Tupin.

5. il n'existe aucun lien entre Benjamin Epstein et le spécialiste des probabilités, Edward Epstein.

6. comme celle des fonctions de répartition dès lors que la loi de probabilité s'exprime comme une fonction de Meijer.

Mode d'emploi

Ce document est un recueil de tout⁷ ce qui peut sembler important à connaître pour traiter les images de l'imagerie cohérente. C'est en pratique une compilation de multiples documents, plus ou moins connus, plus ou moins accessibles, et d'origine variées (depuis les ouvrages du physicien Goodman en finissant par ceux du mathématicien Godement tout en passant par les incontournables ouvrages du "Bateman Manuscript project"), pimentée de quelques formules nouvelles ou approches originales : vu comme document de travail, l'exercice de style est déjà redoutable tant les notations varient et les approches sont complémentaires.

Les lois sont finalement données comme un catalogue (un *Handbook*) : il n'y a rien d'intéressant à refaire certaines démonstrations qui ne sont en fait que des résultats accessibles par tout logiciel de calcul formel. Seules la loi Gamma et la loi Beta (dont les propriétés mériteraient que l'on y passe un peu plus de temps) ont droit à un régime d'exception : ces deux cas permettent de bien planter le décor entre les statistiques traditionnelles et les log-statistiques.

Le formalisme des fonctions de Meijer est tout aussi fastidieux. Mais la question est qu'il n'y a quasiment pas d'ouvrage de référence complet sur ces fonctions. Jusqu'à présent, leur utilisation était crispante tant la notation est à la limite frappée d'une forme d'autisme. Mais l'apparition de ces fonctions dans les logiciels comme Maple, Mathematica ou Python ouvre des portes à des notations de meilleur aloi, et donc à une utilisation plus accessible.

Sur ces fonctions de Meijer, je n'ai pu franchir le pas d'une simplification d'écriture inspirée de leurs utilisations dans les logiciels actuels, c'est à dire passer de :

$$G_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{array} \right. \right)$$

à

$$\bar{G} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; & a'_1, \dots, a'_{n'} \\ b_1, \dots, b_m & ; & b'_1, \dots, b'_{m'} \end{array} \right. \right)$$

sans une espèce d'étape intermédiaire qui est celle du présent document :

$$\bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; & a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; & b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right)$$

Il faudrait oser, mais il faudrait aussi garder quelque part la trace de la version actuelle de ce document comme étape initiatique vers la connaissance de l'univers de Meijer.

L'annexe dédiée aux fonctions spéciales est une occasion de se promener dans le labyrinthe des fonctions hypergéométriques : pas de doute, au début du XX^{ème} siècle, tout mathématicien voulait laisser son nom à la postérité par le nom d'une fonction. Ceci requiert aussi une lettre pour désigner cette fonction, et là l'alphabet affiche ses limites : attention par exemple à la signification des lettres *F* et *M*. Aussi passer d'un formalisme à un autre ne requiert finalement que de la patience et de la rigueur : cela n'en demeure pas moins fastidieux et il peut être intéressant d'en apercevoir le cheminement dans un document de référence. N'en demeure que selon les sources utilisés par les radaristes, le labyrinthe s'est transmis sans mode d'emploi : c'est d'autant plus difficile à gérer que ces lois se rencontrent assez souvent en imagerie radar (en particulier pour les lois dites KUBW, et plus encore en interférométrie).

Tout ce qui est mis dans ce document me semble utile pour pouvoir débattre de la multitude de notations existantes en traitement statistique des images radar. Mais tout ne l'est finalement pas si on se restreint aux ouvrages les plus connus. Et des compléments sont même à prévoir car l'exhaustivité semble à l'heure actuelle impossible. A ce régime là, ce document est un vrai chantier, et il n'a pas d'introduction stricto sensu tant que sa voilure ne sera pas clairement figée.

Enfin j'ai choisi de commettre le crime lèse-Bourbaki de répéter certaines formules déjà écrites auparavant : au lecteur de faire une lecture attentive et de corriger certaines erreurs inévitables que génèrent de manière tout aussi inattendue que surprenante les opérations de type "couper-coller".

7. ou presque tout

Cela ne nous apprendrait pas grand'chose si nous n'avions aucune donnée sur ϕ et ψ ⁸. On a donc fait une hypothèse sur ϕ , et cette hypothèse a été appelée loi des erreurs. Elle ne s'obtient pas par des déductions rigoureuses ; plus d'une démonstration qu'on a voulu en donner est grossière, entre autres celle qui s'appuie sur l'affirmation que la probabilité des écarts est proportionnelle aux écarts. Tout le monde y croit cependant, me disait un jour M. Lippmann, car les expérimentateurs s'imaginent que c'est un théorème de mathématiques, et les mathématiciens que c'est un fait expérimental. (Poincaré, [42])

8. c'est à dire la fonction décrivant une loi de probabilité a priori, et la fonction décrivant l'erreur à partir des observations

Première partie

Le chatoisement et ses modèles

Chapitre 1

Le chatoiement et sa modélisation

1.1 Principes et propriétés de l'imagerie cohérente

1.1.1 Les systèmes d'imagerie cohérente

Radar à Synthèse d'Ouverture, appareils échographiques et sonar possèdent en commun une caractéristique essentielle : celle d'être des systèmes dits d'imagerie cohérente. Fondés sur le principe d'écholocalisation (la mesure du temps aller-retour d'un écho donne la distance de l'objet par rapport à la source), ils permettent la construction d'images interprétables par un spécialiste grâce à une parfaite connaissance des instants d'émission de la source ainsi que des instants de réception des signaux rétrodiffusés. Cette maîtrise du temps est essentielle pour toute combinaison de signaux reçus : elle permet des opérations de formation de voies (*beamforming*) améliorant notablement la résolution. Dans le cas du Radar à Synthèse d'Ouverture, pour les radars embarqués sur les satellites actuels, on peut ainsi, à partir d'un certain nombre de signaux reçus le long de la trajectoire du satellite (qui donne la direction dite azimutale), construire par "synthèse radar" une image de résolution comparable aux systèmes optiques satellitaires.

La synthèse radar est amplement décrite dans la littérature (voir par exemple [29]) et permet, à partir d'une antenne de dimension L , dont la résolution azimutale est kilométrique, d'avoir une image de résolution azimutale δy donné par la relation :

$$\delta y = \frac{L}{2} \quad (1.1)$$

Une image étant une réalisation à deux dimensions, l'autre dimension de l'image, dite radiale, correspond au phénomène d'écholocalisation. Elle est associée à la distance entre source et cible, et sa résolution δr est donnée par la bande passante BW du signal émis :

$$\delta r = \frac{c}{2BW} \quad (1.2)$$

Dans le cas d'antennes rectangulaires, on montre au final que la PSF (*Point Spread Function*) $U(r, y)$ a une enveloppe modélisable par un produit de sinus cardinaux¹ :

$$U(r, y) \sim \text{Sinc}\left(\frac{r}{\delta r}\right) \text{Sinc}\left(\frac{y}{\delta y}\right) \quad (1.3)$$

et il est d'usage de ne considérer que les lobes principaux de ces deux sinus cardinaux (ce qui est tout à fait justifié dans la plupart des cas rencontrés en imagerie radar).

Résolutions axiale et radiale donnent les bornes maximales des dimensions du pixel, le critère de Nyquist demandant un léger suréchantillonnage pour éviter toute apparition de phénomène de repliement (*aliasing*). Remarquons que la PSF n'a a priori rien d'isotrope : aussi les images RSO obtenues en sortie de

1. Dans ce document, le sinus cardinal est défini par la relation $\text{Sinc}(x) = \sin(\pi x)/\pi x$.

synthèse radar (appelée souvent image de niveau L1, ou SLC –*Single Look Complex*) ont le plus souvent des pixels rectangulaires.

Dans le cas de l'imagerie radar, outre son antenne, le système est défini par sa fréquence centrale f , associée à une longueur d'onde λ . Cette porteuse est essentielle en imagerie satellitaire car elle doit vérifier d'une part certaines contraintes physiques (comme l'absorption possible par l'atmosphère dans certaines gammes de fréquence) et d'autre part des exigences de réglementation internationale (affectation de bandes de fréquence par l'Union internationale des télécommunications –*International Telecommunication Union*–). Les systèmes actuels opèrent en bande L (autour de 1 GHz), en bande C (autour de 5 GHz) et en bande X (autour de 9 GHz). Etant données les bandes passantes utilisées, on a $BW \ll f$ et on peut considérer que les signaux émis sont à bande étroite. Ceci permet d'écrire $\lambda \ll \delta r$.

On peut maintenant aborder la vraie expression de la PSF d'un système radar :

$$PSF(r, y) \propto \cos\left(2\pi\frac{2r}{\lambda_0}\right) \text{Sinc}\left(BW\frac{2r}{c}\right) \text{Sinc}\left(\frac{2y}{L}\right) \quad (1.4)$$

On note qu'elle vérifie en amplitude la relation 1.3. Les effets de la porteuse se traduisent par une modulation au sein de la réponse : on note un certain nombre d'oscillations de la porteuse, donnée par la relation :

$$N_{\text{osc}} = \frac{\delta r}{\lambda} = \frac{f}{BW} \quad (1.5)$$

ce nombre variant entre la trentaine (cas de Terrasar-X et CSK) et plusieurs centaines (cas d'ERS).

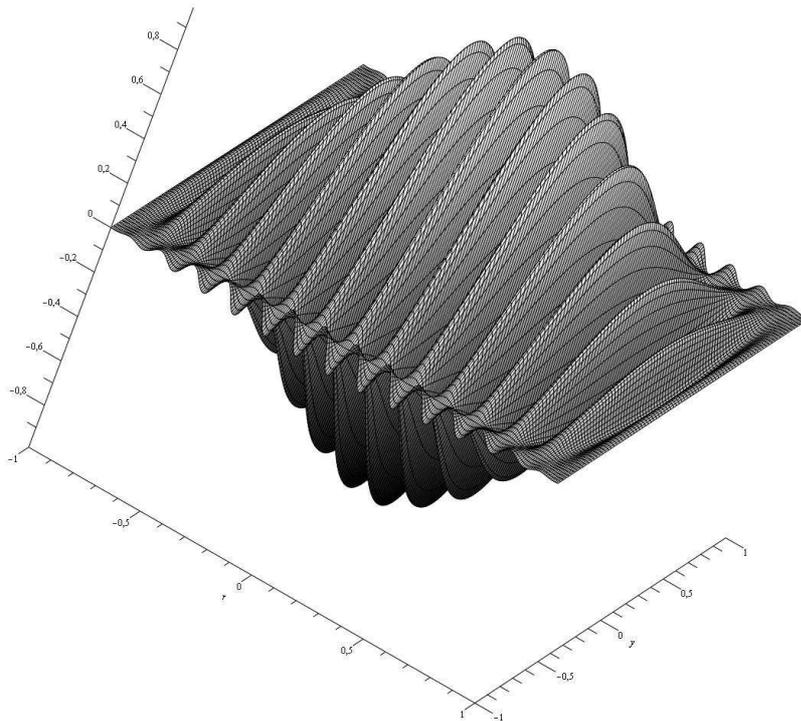


FIGURE 1.1 – PSF 2-D d'un capteur RSO (référentiel antenne : plan Ory , l'axe Or étant l'axe radial) : seule la cellule de résolution est représentée. Sur cette illustration, il y a environ une douzaine d'oscillations dans la Cellule de Résolution (la cellule de résolution est donc de l'ordre de la douzaine de longueur d'onde).

1.1.2 Le chatoitement

Le phénomène de chatoitement (*speckle* dans le monde anglo-saxon) est un phénomène omniprésent sur les données acquises par un système d'imagerie cohérente qui se traduit comme une sorte de bruit multiplicatif sur ce type d'images. Dans l'exemple des systèmes RSO, vu que la longueur d'onde est petite vis à vis de la cellule de résolution (ce que traduit le paramètre N_{osc} , relation 1.5, qui est de l'ordre de la dizaine, voire de la centaine), chaque réflecteur présent dans cette cellule va rétrodiffuser l'onde incidente avec une phase liée au diffuseur (phase "propre") et modifiée par sa position dans la cellule de résolution. A la différence de l'imagerie incohérente (que l'on peut voir comme une sommation des énergies), l'onde rétrodiffusée est construite par sommation cohérente des contributions de tous ces diffuseurs élémentaires : l'amplitude et la phase jouent un rôle dans la construction de cette onde diffusée. Cette sommation cohérente a des conséquences importantes : en effet, les phases de ces diffuseurs élémentaires peuvent se combiner de manière constructive ou destructive et l'onde diffusée peut avoir une amplitude tout aussi bien forte que faible. La conséquence majeure est qu'une zone a priori homogène sera perçue comme une zone fortement perturbée par du bruit. C'est ce phénomène que l'on appelle chatoitement. Une modélisation du chatoitement, celle de Goodman, sera abordée au paragraphe 1.2

Sur la figure 1.2, on a à gauche une image telle qu'elle est acquise par un système RSO et on observe que la lisibilité est effectivement fortement perturbée par le chatoitement. Sur la même figure (à droite), une image traitée par moyennage multitemporel peut s'interpréter comme une image RSO sans chatoitement : on mesure ainsi mieux les effets perturbateurs du chatoitement que l'on observe sur la figure de gauche.

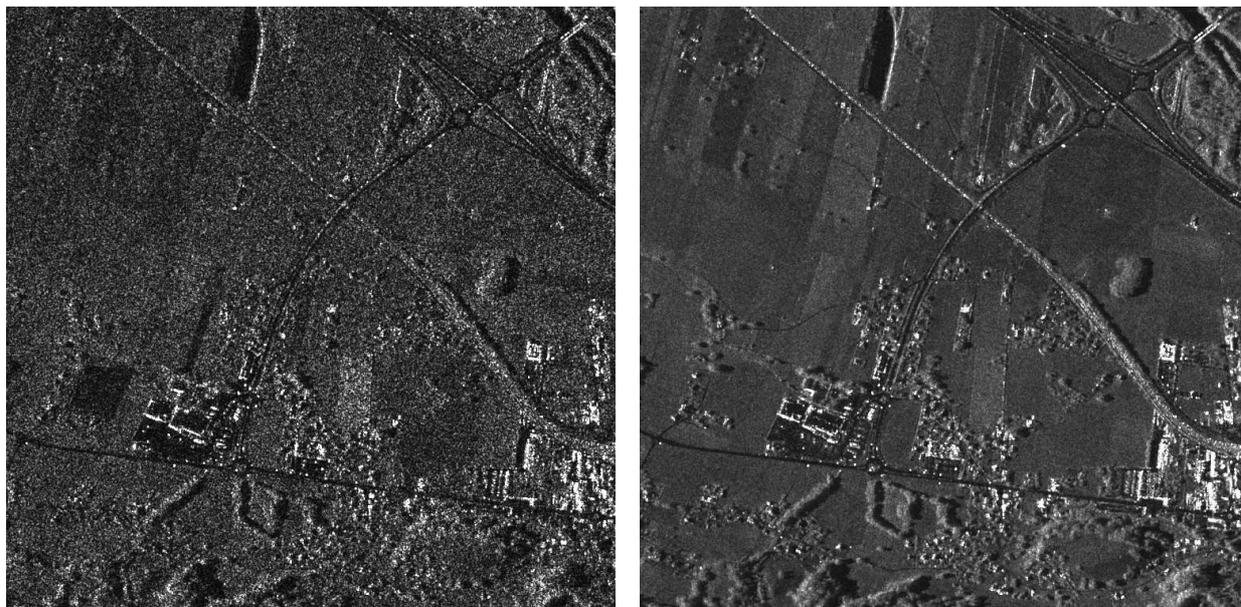


FIGURE 1.2 – Image RSO initiale (à gauche) fortement bruitée par le phénomène de chatoitement. A droite, la même zone sans chatoitement. Cette image, qui peut se concevoir comme une image RSO acquise sans chatoitement, a été obtenue par une moyenne temporelle sur 26 images fortement bruitées par le phénomène de chatoitement (l'image de gauche est l'une d'elles). Données Terrasar-X (© DLR).

Sur des zones parfaitement homogènes, nous verrons que l'analyse du chatoitement le fait apparaître comme un bruit multiplicatif suivant une loi de Rayleigh.

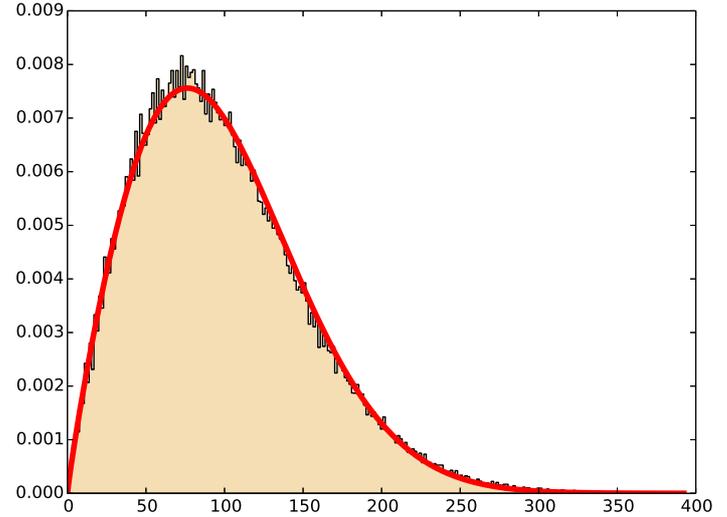
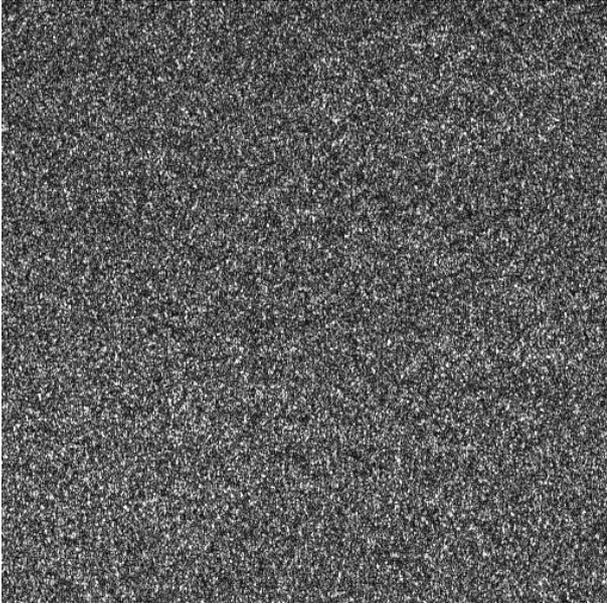


FIGURE 1.3 – Image RSO (à gauche) acquise sur une zone homogène (la mer) fortement bruitée par le phénomène de chatoiement. A droite, histogramme des valeurs des pixels : la loi de Rayleigh estimée par une méthode paramétrique (méthode des log-cumulants) est superposée en pointillée, ce qui montre la bonne adéquation du modèle de Goodman sur cette zone géographique. Données Sentinel-1 (© ESA).

1.2 Le chatoiement pleinement développé et sa modélisation

1.2.1 Le concept de “phaseur” (Goodman)

Goodman [22] a été le premier à proposer un modèle du chatoiement reflétant ces caractéristiques spécifiques : ce modèle est celui du **chatoiement pleinement développé** (*fully developed speckle*). Pour cela il introduit la notion de phaseur (*phasor*²), décrit par une amplitude a (terme réel) et une phase θ :

$$a e^{i\theta}$$

Ce phaseur peut se voir comme l’onde rétrodiffusée par une cible ponctuelle, cette onde arrivant sur l’antenne de réception avec une amplitude a et une phase θ .

Goodman introduit ensuite le concept de “somme de N phaseurs aléatoires”, chacun défini par une amplitude a_n et une phase θ_n , notée P et donnée par la relation :

$$P = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n e^{i\theta_n} = A e^{i\theta} \quad (1.6)$$

le choix de mettre en facteur le terme en $1/\sqrt{N}$ permettant d’avoir des seconds moments finis même quand N tend vers l’infini. Il pose deux hypothèses sur ces phaseurs aléatoires :

- les amplitudes a_n et les phases θ_n sont statistiquement indépendants,
- la phase est équidistribuée sur $[0, 2\pi[$

Le complexe P peut se décomposer en partie réelle A_R et partie imaginaire A_I , ce qui donne³ :

$$P = A_R + i A_I$$

2. pour *phase vector*

3. Une autre notation très usitée dans le monde du radar est de désigner la partie réelle par A_I $-I$ comme *In phase* et la partie imaginaire par A_Q $-Q$ comme *Quadrature*.

$$\text{avec } \begin{cases} A_R &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \cos \theta_n \\ A_I &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \sin \theta_n \end{cases} \quad (1.7)$$

Connaissant A_R et A_I , l'amplitude A et la phase θ du complexe P s'écrivent :

$$A = \sqrt{A_R^2 + A_I^2} \quad (1.8)$$

$$\theta = \text{Atan} \left(\frac{A_I}{A_R} \right) \quad (1.9)$$

Puisque amplitudes a_n et phases θ_n sont statistiquement indépendantes, l'espérance de la partie réelle A_R (c'est à dire son premier moment) se déduit du calcul suivant :

$$\begin{aligned} E[A_R] &= E \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \cos \theta_n \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N E[a_n \cos \theta_n] \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N E[a_n] E[\cos \theta_n] \end{aligned}$$

Puisque la phase est équidistribuée sur $[0, 2\pi[$, on a

$$E[\cos \theta_n] = E[\sin \theta_n] = 0$$

d'où l'espérance de la partie réelle A_R :

$$E[A_R] = 0$$

Un calcul similaire permet d'écrire pour l'espérance de la partie imaginaire A_I :

$$E[A_I] = 0$$

On peut calculer les seconds moments de la partie réelle :

$$\begin{aligned} E[A_R^2] &= E \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a_n a_m \cos \theta_n \cos \theta_m \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N E[a_n a_m \cos \theta_n \cos \theta_m] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N E[a_n a_m] E[\cos \theta_n \cos \theta_m] \end{aligned}$$

ce qui donne

– pour $m \neq n$:

$$\begin{aligned} E[\cos \theta_n \cos \theta_m] &= E[\cos \theta_n] E[\cos \theta_m] \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où :

$$E[a_n a_m] E[\cos \theta_n \cos \theta_m] = 0$$

– pour $m = n$:

$$\begin{aligned} E[a_n a_m] E[\cos \theta_n \cos \theta_m] &= E[a_n^2] E[\cos^2 \theta_n] \\ &= E[a_n^2] E\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta_n\right] \\ &= \frac{E[a_n^2]}{2} \end{aligned}$$

On a au final :

$$\begin{aligned} E[A_R^2] &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{E[a_n^2]}{2} = \frac{E[a_n^2]}{2} \\ E[A_I^2] &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{E[a_n^2]}{2} = \frac{E[a_n^2]}{2} \end{aligned}$$

ces deux seconds moments étant égaux.

Puisque l'on a :

$$E[A_R] = E[A_I] = 0$$

en notant $\tilde{\sigma}_R$ la variance de la partie réelle et $\tilde{\sigma}_I$ la variance de la partie imaginaire, et en posant $\tilde{\sigma} = \sigma_R = \sigma_I$, on peut écrire :

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{E[a_n^2]}{2}} \quad (1.10)$$

La variance des parties réelles et des parties imaginaires est simplement liée au second moment de la loi de l'amplitude des phaseurs.

Enfin, en considérant les corrélations entre parties réelle et imaginaire, on obtient :

$$\begin{aligned} E[A_R A_I] &= E\left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a_n a_m \cos \theta_n \sin \theta_m\right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N E[a_n a_m] E[\cos \theta_n \sin \theta_m] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N E[a_n^2] E[\cos \theta_n \sin \theta_n] \\ &= 0 \end{aligned}$$

1.2.2 Phaseurs et loi normale

Si l'on considère un nombre N de phaseurs aléatoires, et si l'on fait tendre N vers l'infini, on peut considérer que les conditions d'applications du théorème central limite sont vérifiées. La probabilité jointe des parties réelle A_R et imaginaire A_I peut alors s'écrire sous la forme :

$$P_{A_R, A_I}(A_R, A_I) = \frac{1}{2\pi\tilde{\sigma}^2} e^{-\frac{A_R^2 + A_I^2}{2\tilde{\sigma}^2}} \quad (1.11)$$

expression qui est séparable, ce qui montre que parties réelle et imaginaire de la somme de N phaseurs sont asymptotiquement indépendantes. On reconnaît un processus gaussien circulaire complexe, paramétré par la grandeur $\tilde{\sigma}$ liée aux phaseurs.

1.2.3 Phaseurs et loi de Rayleigh (pixels en amplitude)

Amplitude et phase sont reliées aux parties réelle et imaginaire par les relations 1.8 et 1.9, ce qui peut s'écrire :

$$\begin{aligned} A_R &= A \cos \theta \\ A_I &= A \sin \theta \end{aligned}$$

Pour trouver la probabilité jointe de l'amplitude A et de la phase θ , on s'appuie sur la relation :

$$P_{A,\theta}(A, \theta) = \|J\| P_{A_R, A_I}(A \cos \theta, A \sin \theta)$$

le jacobien J s'écrivant :

$$\|J\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial A_R}{\partial A} & \frac{\partial A_R}{\partial \theta} \\ \frac{\partial A_I}{\partial A} & \frac{\partial A_I}{\partial \theta} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} \cos \theta & -A \sin \theta \\ \sin \theta & A \cos \theta \end{array} \right\| = A$$

d'où la relation pour la probabilité jointe de l'amplitude A et de la phase θ :

$$P_{A,\theta}(A, \theta) = \frac{A}{2\pi \tilde{\sigma}^2} e^{-\frac{A^2}{2\tilde{\sigma}^2}} \quad (1.12)$$

On peut alors déduire les probabilités des statistiques marginales de A et de θ .

– Pour la loi de l'amplitude, on intègre la probabilité jointe sur la phase θ :

$$\begin{aligned} p_A(A) &= \int_{-\pi}^{\pi} P_{A,\theta} d\theta \\ &= \frac{A}{2\pi \tilde{\sigma}^2} e^{-\frac{A^2}{2\tilde{\sigma}^2}} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \end{aligned}$$

d'où

$$p_A(A) = \frac{A}{\tilde{\sigma}^2} e^{-\frac{A^2}{2\tilde{\sigma}^2}} \quad (1.13)$$

ce qui montre que l'amplitude vérifie une loi bien connue : la loi de Rayleigh, dont un exemple en est donné sur la figure 1.4.

– Pour la loi de la phase, on intègre la probabilité jointe sur l'amplitude :

$$p_\theta(A) = \int_0^\infty P_{A,\theta} dA$$

d'où

$$p_\theta(A) = \frac{1}{2\pi} \quad (1.14)$$

et on retrouve l'hypothèse de phase uniforme sur $[0, 2\pi[$ faite par Goodman.

Il faut bien noter une certaine ambiguïté dans les notations : ici $\tilde{\sigma}$ est liée à la variance du processus gaussien circulaire complexe lié aux phaseurs et est donnée par la relation 1.10 :

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{E[a_n^2]}{2}}$$

Or la loi du speckle en amplitude exprimée par la relation 1.13 :

– est une loi de Rayleigh dont l'expression, qui sera analysée au paragraphe 6.1.1, est donnée par :

$$\mathcal{R}[\mu_A](x) = \frac{2}{\mu_A} \left(\frac{x}{\mu_A} \right) e^{-\left(\frac{x}{\mu_A}\right)^2}$$

ce qui revient à prendre $\tilde{\sigma} = \mu_A/\sqrt{2}$ dans l'expression 1.13.

– est paramétrée par la grandeur μ_A vérifiant :

$$\mu_A = \sqrt{2}\tilde{\sigma} = \sqrt{E[a_n^2]}$$

– a pour moment d'ordre r ($r > -2$) la valeur :

$$\mu_A^r \Gamma\left(1 + \frac{r}{2}\right) \quad (1.15)$$

– a pour variance la valeur (voir la formule A.7) :

$$\sigma_A = \mu_A \sqrt{\Gamma(2) - \left(\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2} = \mu_A \frac{\sqrt{4 - \pi}}{2} = \tilde{\sigma} \sqrt{1 - \frac{\pi}{4}}$$

– a pour mode la valeur :

$$x_{\text{mode}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mu_A = \tilde{\sigma} \quad (1.16)$$

Attention : il ne faut donc pas confondre dans ces expressions la variance σ d'une image suivant une loi de Rayleigh de paramètre μ_A et la variance $\tilde{\sigma}$ liée à la loi suivie par les phaseurs.

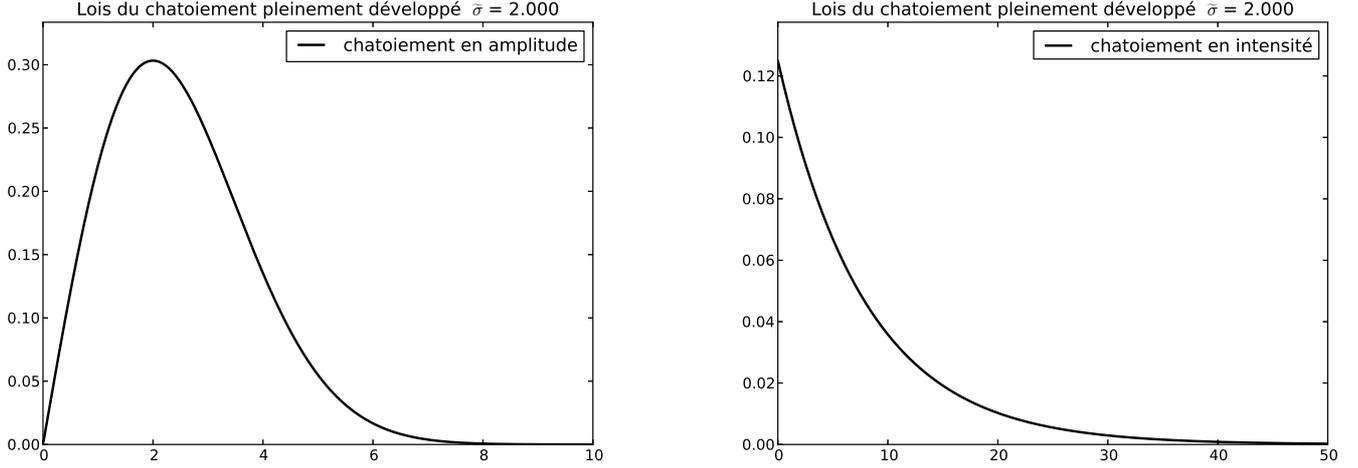


FIGURE 1.4 – Lois du chatoiement pleinement développé pour l'amplitude à gauche, expression 1.13 (loi de Rayleigh) et pour l'intensité à droite, expression 1.17 (loi exponentielle décroissante). Cas $\tilde{\sigma} = 2$. Le paramètre $\tilde{\sigma}$ représente la variance du processus gaussien circulaire complexe des phaseurs. Le mode de la loi en amplitude est en $A = \tilde{\sigma} = 2$.

1.2.4 Phaseurs et loi exponentielle décroissante (pixels en intensité)

Nous verrons que l'intensité, définie par

$$I = A_R^2 + A_I^2$$

joue historiquement un grand rôle en imagerie cohérente. En posant

$$I = A^2 \Leftrightarrow dI = 2A dA$$

et en réécrivant la relation 1.13, on obtient la loi de l'intensité :

$$p_I(I) = \frac{1}{2\tilde{\sigma}^2} e^{-\frac{I}{2\tilde{\sigma}^2}} \quad (1.17)$$

dont l'expression est celle d'une loi bien connue : la loi exponentielle décroissante (qui est un cas particulier de la loi Gamma), dont un exemple en est donné sur la figure 1.4.

Il faut bien noter une certaine ambiguïté dans les notations : ici $\tilde{\sigma}$ est liée à la variance du processus gaussien circulaire complexe lié aux phaseurs. Or la loi du speckle en intensité décrite par la relation 1.17 :

- est la loi “exponentielle décroissante” dont l’expression, qui sera analysée au paragraphe 4.1.3, est donnée par :

$$\mathcal{ED}[\mu_I](x) = \frac{1}{\mu_I} e^{-\frac{x}{\mu_I}} \quad (1.18)$$

- est paramétrée par la grandeur μ_I vérifiant :

$$\mu_I = 2\tilde{\sigma}^2$$

- a pour variance la valeur :

$$\sigma_I = \mu_I = 2\tilde{\sigma}^2$$

Il ne faut donc pas confondre la variance σ d’une image suivant une loi exponentielle décroissante, et la variance $\tilde{\sigma}$ liée à la loi suivie par les phaseurs.

1.2.5 Simulation de chatoiement pleinement développé

Les hypothèses essentielles de la construction d’une image en imagerie cohérente s’appuient sur la présence d’un très grand nombre de cibles ponctuelles indépendantes dans la cellule de résolution – chaque cible élémentaire ayant son propre coefficient de rétrodiffusion a_n et sa propre phase θ_n , et sur le fait que l’onde rétrodiffusée par toutes ces cibles est la somme cohérente d’ondes élémentaires (c’est à dire la sommation de grandeurs complexes : à la fois la partie réelle et la partie imaginaire sont à sommer). Ces hypothèses sont exactement celles du phaseur de Goodman.

Nous avons vu précédemment que la sommation cohérente de N phaseurs pour N très grand conduit donc au chatoiement pleinement développé de Goodman qui se manifeste par deux caractéristiques essentielles :

- la phase est le résultat d’un tirage d’une variable aléatoire uniforme sur le segment $[0; 2\pi[$.
- connaissant la variance de l’amplitude des phaseurs :

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{E[a_n^2]}{2}}$$

amplitude et intensité ont des densités de probabilité parfaitement définies :

- l’amplitude suit une loi de Rayleigh telle que :

$$p_A(A) = \frac{2A}{\mu_A^2} e^{-\frac{A^2}{\mu_A^2}}$$

avec $\mu_A = \sqrt{2}\tilde{\sigma}$

- l’intensité suit une loi exponentielle décroissante telle que

$$p_I(I) = \frac{1}{\mu_I} e^{-\frac{I}{\mu_I}}$$

avec $\mu_I = 2\tilde{\sigma}^2$.

Il est important de souligner que loi de Rayleigh et loi exponentielle décroissante ne dépendent que d’un seul paramètre lié au tirage des échantillons : la variance de l’amplitude des phaseurs.

Simulation : cas d’une amplitude constante

Une première méthode pour simuler du chatoiement pleinement développé consiste à considérer N phaseurs d’amplitudes identiques $b_n = b/\sqrt{N}$ et de phases θ_n équidistribuées sur $[0, 2\pi[$. Pour une loi constante on a :

$$E[b^r] = b^r \quad \forall r \in \mathbb{N}$$

et en particulier :

$$E[b^2] = b^2$$

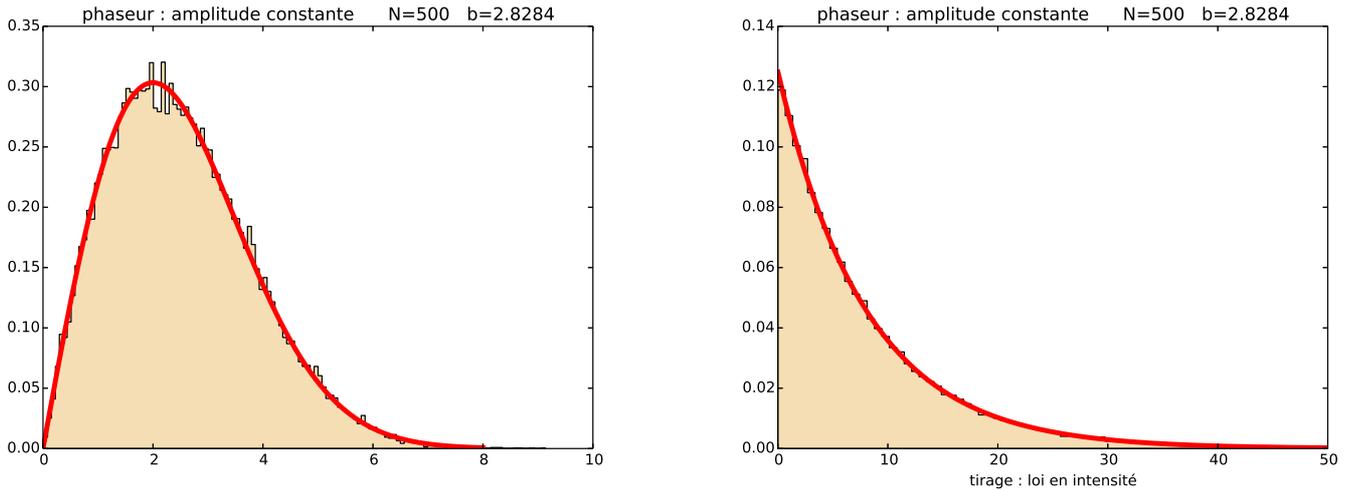


FIGURE 1.5 – Simulation de chatoiement par sommation d’un très grand nombre de phaseurs ($N = 500$) : à gauche, résultat en amplitude, à droite, résultat en intensité. Les phaseurs ont une amplitude constante ($b = 2\sqrt{2}$). Le processus gaussien complexe lié aux phaseurs est décrit par $\tilde{\sigma} = 2$. La loi en amplitude sous jacente est alors définie par $\mu_A = \sqrt{2}\tilde{\sigma} = 2\sqrt{2} \sim 2.8284$ et a son mode en $x_{\text{mode}} = \tilde{\sigma} = 2$ (relation 1.19). Les résultats peuvent être comparés aux cas théoriques de la figure 1.4 et qui sont tracés en gras sur les histogrammes.

La simulation du chatoiement consiste à effectuer la somme cohérente de ces N tirages :

$$B = \sum_{n=1}^N b_n e^{j\theta_n}$$

On retrouve la relation 1.6. On en déduit que la loi de l’amplitude pour le cas asymptotique $N \rightarrow \infty$ s’écrit sous la forme d’une loi de Rayleigh (relation 1.13) :

$$p_A(A) = \frac{A}{\tilde{\sigma}^2} e^{-\frac{A^2}{2\tilde{\sigma}^2}}$$

avec

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{E[b^2]}{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}} \quad (1.19)$$

Pour une valeur b fixée, le mode de cette loi de Rayleigh est alors égal à (relation 1.16) :

$$m_{\text{mode}} = \tilde{\sigma} = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

La figure 1.5 (à gauche) trace l’histogramme des tirages (en amplitude) dans un cas où N est suffisamment grand ($N = 500$) de sorte que le résultat est très proche de la loi de Rayleigh théorique. La même figure (à droite) donne l’histogramme des mêmes tirages en intensité : le résultat est alors très proche de la loi exponentielle décroissante théorique.

En simulation d’images cohérentes, les méthodes fondées sur le tirage de phaseurs sont les plus usitées et les plus simples à mettre en œuvre. Si l’on se place dans l’hypothèse où l’amplitude des phaseurs est constante, la valeur de N joue un rôle clé. La figure 1.6 montre les histogrammes des résultats pour N variant entre 2 et 7 (le cas $N = 1$ donne la même valeur d’amplitude pour tous les tirages et n’est donc pas présenté sur la figure). Deux constatations ont leur importance en simulation :

- un critère classiquement utilisé en imagerie pour savoir si une zone est potentiellement du chatoiement “à la Goodman” est le coefficient de variation (relation 2.19 du chapitre 2), qui lie le moment

centré d'ordre 2 et le moment d'ordre 1 :

$$\gamma = \sqrt{\frac{M_2}{m_1^2}}$$

Pour une loi de Rayleigh, ce coefficient ne dépend pas de μ et est donc constant : sa valeur théorique est $\gamma = 0.523$. Or, dès la valeur $N = 2$, on note la valeur $\gamma = 0.4833$, assez proche de la valeur théorique d'une loi de Rayleigh : cependant l'allure visuelle de l'histogramme montre bien que le résultat n'a que très peu de ressemblance avec une loi de Rayleigh. Ceci montre que la valeur des deux premiers moments n'est pas un critère fiable pour caractériser une simulation.

- Visuellement, l'histogramme des simulations présente une bonne ressemblance avec une loi de Rayleigh à partir de la valeur $N = 6$. Si dans ce cas la valeur du coefficient de variation, 0.4953, semble légèrement trop faible, cet écart vient du fait que la valeur maximale de la simulation, donnée par $v_{\max} = N b$, est dans ce cas égale à $6 b$. Cette borne à droite pour l'histogramme se traduit donc par une valeur du coefficient de variation un peu trop faible.

En résumé, il est possible de simuler du chatoiement pleinement développé avec des tirages de phaseurs d'amplitude constante à condition que $N \geq 6$. Le point essentiel sous jacent est la loi de la phase, qui doit être uniforme sur $[0, 2\pi[$.

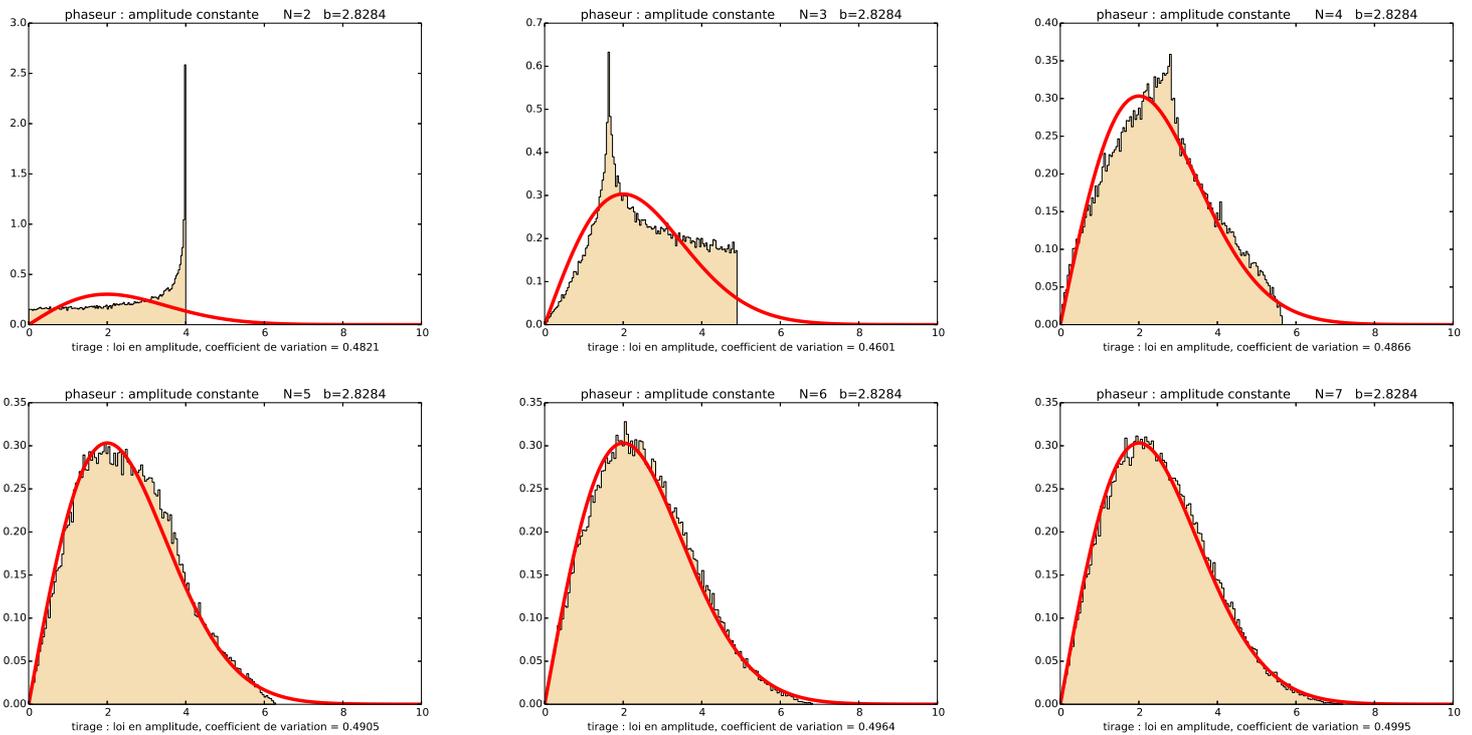


FIGURE 1.6 – Simulation de chatoiement par sommation de phaseurs d'amplitude constante, avec $b = 2\sqrt{2}$, c'est à dire $\tilde{\sigma} = 2$ (la loi en amplitude sous jacente a alors un mode $m_{mode} = 2$). On rappelle que la valeur théorique du coefficient de variation pour une loi de Rayleigh est $\gamma = 0.523$.

Simulation : cas d'une amplitude équadistribuée

Si l'on choisit des phaseurs dont l'amplitude c est équadistribuée sur un intervalle donné $[0, c_{max}]$, on sait que⁴ :

$$E [c^2] = \frac{c_{max}^2}{3}$$

4. voir par exemple page 90

Pour simuler une image ayant un b donné, c doit vérifier :

$$E[c^2] = E[b^2] = 2\tilde{\sigma}^2$$

ce qui impose la valeur de c_{max} :

$$c_{max} = \sqrt{6}\tilde{\sigma}$$

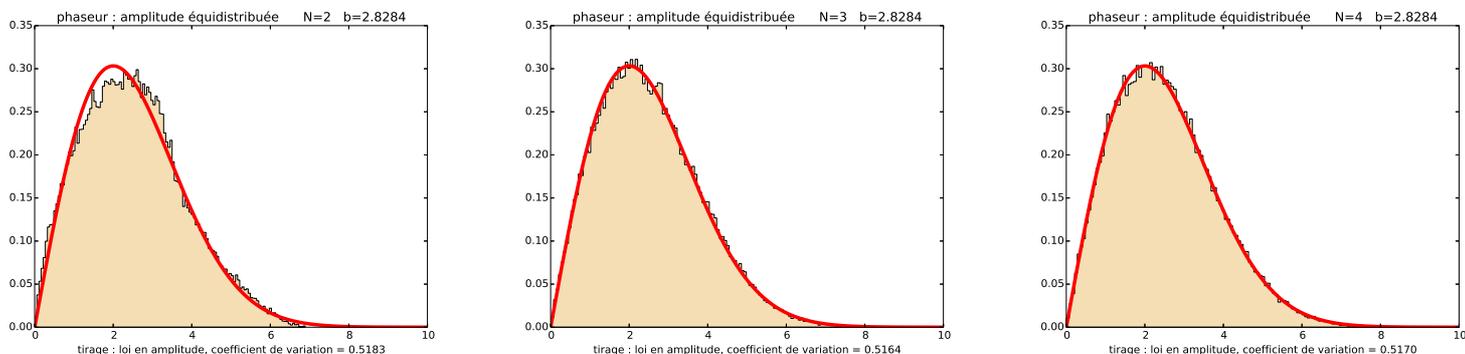


FIGURE 1.7 – Simulation de chatoiement par sommation de phaseurs dont l’amplitude suit une loi équirépartie sur $[0, c_{max}]$, avec $c_{max} = 2\sqrt{6}$, ce qui donne $b = 2\sqrt{2}$, c’est à dire $\tilde{\sigma} = 2$ (la loi en amplitude sous jacente a alors un mode $m_{mode} = 2$). On rappelle que la valeur théorique du coefficient de variation pour une loi de Rayleigh est $\gamma = 0.523$.

Le résultat est représenté figure 1.7 et montre que dès que l’on a seulement 2 phaseurs, on obtient un résultat qui présente de fortes ressemblances avec une loi de Nakagami : le coefficient de variation est alors égal à 0.5194, très proche de la valeur théorique (0.523) et l’allure est relativement proche d’une loi de Rayleigh. Pour $N = 3$, le résultat peut être considéré comme satisfaisant. Notons que dans ce dernier cas, la valeur maximale possible est $3c_{max} = 3\sqrt{6}\tilde{\sigma} \sim 9.800$.

Simulation : cas d’une amplitude gaussienne

Pour une loi gaussienne $\mathcal{N}[\mu, \sigma]$, on sait que le moment d’ordre 2 s’écrit :

$$m_2 = \sigma^2 + \mu^2$$

et dans le cas particulier d’une loi gaussienne centrée à l’origine ($\mu = 0$) :

$$m'_2 = \sigma^2$$

Pour simuler du chatoiement pleinement développé caractérisé par $\tilde{\sigma}$ on peut envisager deux cas :

- une loi gaussienne centrée à l’origine et telle que :

$$\sigma_G = \tilde{\sigma}$$

- une loi gaussienne centrée en d_0 et telle que

$$\sigma_{GC} = \sqrt{\tilde{\sigma}^2 - d_0^2} \quad \text{avec } d_0 < \tilde{\sigma}$$

La figure 1.8 montre bien qu’au final la loi du tirage importe peu et que le résultat ne dépend que du choix de la valeur $\tilde{\sigma}$, c’est à dire la variance des phaseurs.

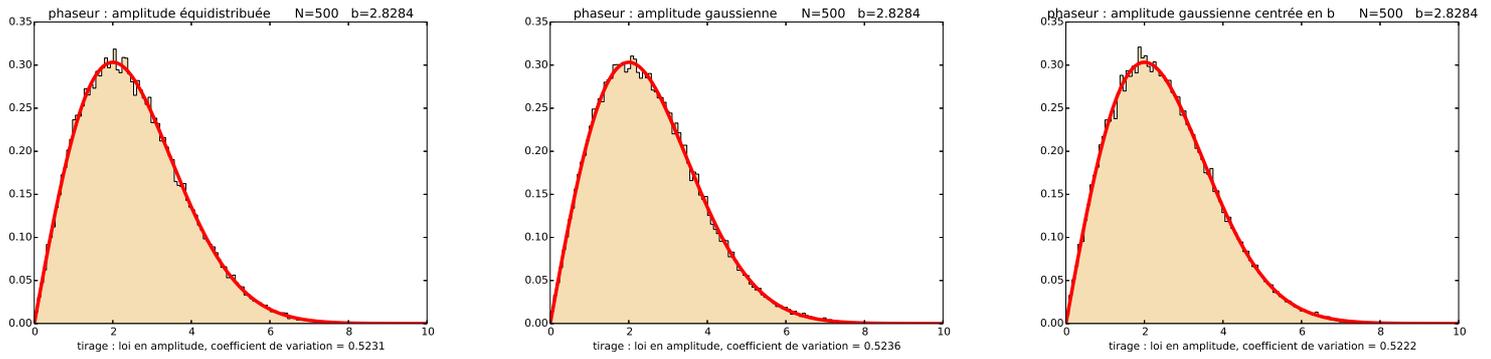


FIGURE 1.8 – Simulation de chatoiement par sommation de phaseurs dont les amplitudes suivent différentes lois (à gauche : loi équirépartie, au milieu : loi normale centrée en zéro, à droite : loi normale non centrée), avec la même valeur $\sigma = 2$ (la loi en amplitude sous jacente a alors un mode $m_{mode} = 2$). Pour N suffisamment grand (ici $N = 500$ peut être considéré comme suffisamment grand), le comportement asymptotique vers une loi de Rayleigh est indépendante de la loi de tirage des amplitudes : le seul paramètre caractérisant au final la loi de Rayleigh est la variance du tirage $E[b_n^2] = \sigma$.

1.3 Chatoiement et texture

1.3.1 Le *Compound Speckle*

Dans son ouvrage [22], Goodman pose le problème d'un chatoiement paramétré par une grandeur qui est elle-même le résultat d'un processus aléatoire : il appelle alors le phénomène *Compound Speckle*. En se plaçant dans le cas des données en intensité, le chatoiement, qui ne dépend que du paramètre μ , s'écrit (relation 1.17) :

$$p_I[\mu](I) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{I}{\mu}}$$

et il faut alors prendre en compte le fait que le paramètre μ est lui-même le résultat d'un tirage d'une variable aléatoire suivant une loi donnée $p_\mu(\mu)$. La probabilité de tirer une valeur x va alors s'écrire sous une forme dans laquelle on prend toutes les valeurs possibles de μ : la loi p_I étant alors vue comme une fonction du paramètre μ . On a alors :

$$\begin{aligned} p(x) &= \int_{\mu=0}^{\infty} p_\mu(\mu) p_I[\mu](x) d\mu \\ &= \int_{\mu=0}^{\infty} p_\mu(\mu) \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} d\mu \end{aligned} \quad (1.20)$$

Or cette expression est celle d'une opération mathématique méconnue : la convolution de Mellin, qui sera détaillée ultérieurement dans cet ouvrage (chapitre 2, paragraphe 2.1.3). Nous verrons que cette formulation originale permet de généraliser cette approche (modification selon une loi donnée du paramètre d'une loi de probabilité dans un cadre multiplicatif) et simplifiera d'autant les calculs. Dans le cas du *Compound Speckle*, Goodman mène les calculs analytiques indépendamment de cette approche. En supposant que $p_\mu(\mu)$ est aussi une loi exponentielle décroissante :

$$p_\mu(\mu) = e^{-\mu}$$

il en déduit :

$$p(x) = \frac{2}{\mu} K_0 \left[2\sqrt{\frac{x}{\mu}} \right] \quad (1.21)$$

avec K_0 la fonction de Bessel modifiée de troisième espèce⁵ d'indice 0.

5. Dans l'annexe A, paragraphe A.2, d'autres appellations de cette fonction, plus ou moins discutables, seront détaillées.

1.3.2 Exemple de zones texturées

Sur une zone non homogène telle que la texture puisse être modélisée par une loi de Rayleigh (ou plus généralement par une loi de Nakagami), le chatoisement opère donc comme un bruit multiplicatif suivant une loi de Rayleigh, ce qui au final donne une loi K. La figure 1.9 montre la bonne adéquation de ce modèle sur la mer.

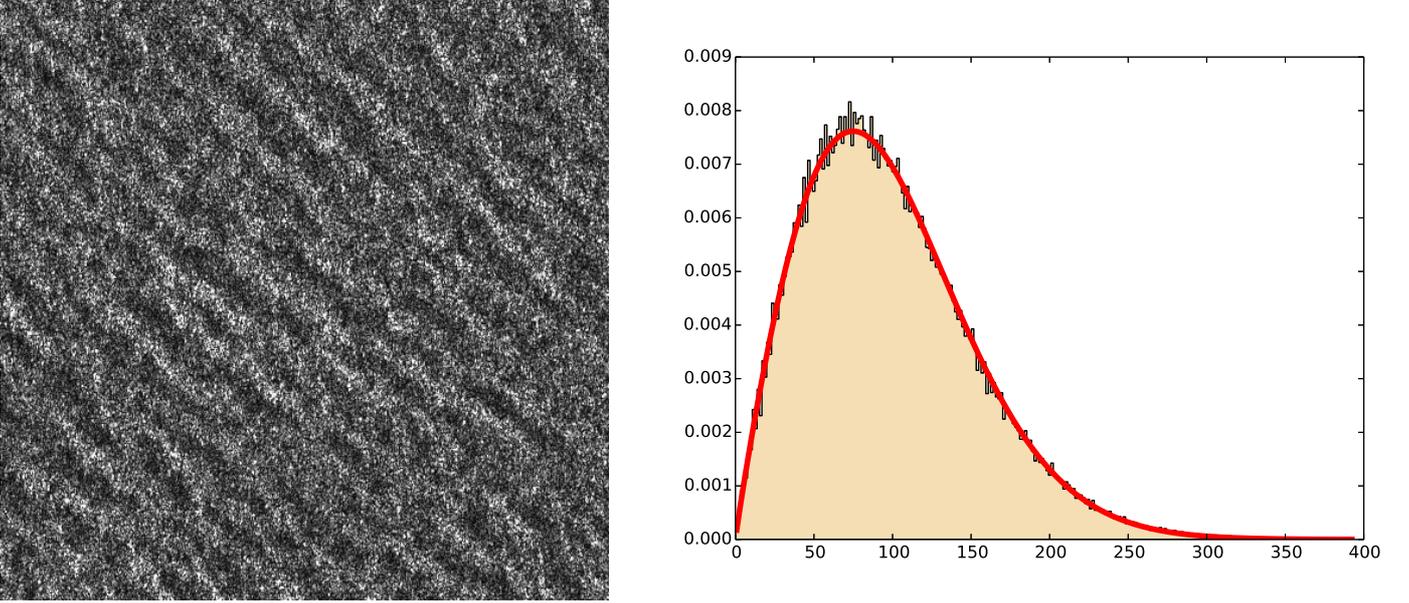


FIGURE 1.9 – Image RSO (à gauche) acquise sur une zone non homogène (la mer, marquée par une forte houle) fortement bruitée par le phénomène de chatoisement. À droite, histogramme des valeurs des pixels : la loi K (en amplitude) estimée par une méthode paramétrique (méthode des log-cumulants) est superposée en pointillée, ce qui montre la bonne adéquation du modèle du “*Compound Speckle*” proposé par Goodman sur cette zone géographique. Données Sentinel-1 (© ESA).

1.3.3 Cible ponctuelle et phaseurs : la loi de Rice

Un cas particulier de cette approche par phaseurs est celui où il existe une cible déterministe unique (amplitude A_0 , phase que l’on peut choisir nulle sans perdre la généralité du problème) en présence de N phaseurs définis par $\tilde{\sigma}$. La relation 1.7 devient :

$$\begin{cases} A_R &= A_0 + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \cos \theta_n \\ A_I &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \sin \theta_n \end{cases} \quad (1.22)$$

Goodman montre que la loi suivie par l’amplitude A est alors une loi de Rice qui s’écrit ([22], relation 2-25) :

$$p_R(A) = \frac{A}{\tilde{\sigma}^2} e^{-\frac{A^2 + A_0^2}{2\tilde{\sigma}^2}} I_0\left(\frac{A A_0}{\tilde{\sigma}^2}\right) \quad (1.23)$$

avec I_0 la fonction de Bessel modifiée de première espèce d’indice 0 (voir annexe A.2.3).

En posant $\mu^2 = 2\tilde{\sigma}^2$ et $\mu_C = A_0$, on peut réécrire cette expression sous la forme :

$$\mathcal{RC}[\mu, \mu_C](x) = \frac{2x}{\mu^2} e^{-\frac{x^2 + \mu_C^2}{\mu^2}} I_0\left(\frac{2\mu_C x}{\mu^2}\right) \quad (1.24)$$

Les moments de la loi de Rice $\mathcal{RC}[\mu, \mu_C]$ s'expriment sous la forme ([22]) :

$$m_r = \mu^r e^{-\frac{\mu_C^2}{\mu^2}} \Gamma\left(1 + \frac{r}{2}\right) {}_1F_1\left(1 + \frac{r}{2}; 1; \frac{\mu_C^2}{\mu^2}\right) \quad \forall r \geq -2 \quad (1.25)$$

où ${}_1F_1$ est la fonction hypergéométrique confluyente⁶.

Son coefficient de variation γ est donné par la relation :

$$\gamma = \sqrt{\frac{4 e^{\frac{\mu_C^2}{\mu^2}} \left(1 + \frac{\mu_C^2}{\mu^2}\right)}{\pi \left(\left(1 + \frac{\mu_C^2}{\mu^2}\right) I_0\left(\frac{\mu_C^2}{2\mu^2}\right) + \frac{\mu_C^2}{\mu^2} I_1\left(\frac{\mu_C^2}{2\mu^2}\right)\right)^2} - 1}$$

et on peut noter qu'il dépend des deux paramètres de la loi.

Il est intéressant de regarder les deux cas limites $\mu_C \rightarrow 0$ et $\mu \rightarrow 0$ de la loi de Rice $\mathcal{RC}[\mu, \mu_C]$.

– Comme $I_0(x)|_{x=0} = 1$, on a :

$$\lim_{\mu_C=0} \mathcal{RC}[\mu, \mu_C](x) = \mathcal{R}[\mu](x) \quad (1.26)$$

c'est à dire la loi de Rayleigh caractérisant le chatolement. On peut aussi déduire cette propriété de l'expression des moments sachant :

$$\lim_{x=0} {}_1F_1(a; b; x) = 1$$

On retrouve ainsi l'expression des moments de la loi de Rayleigh puisque la relation 1.25 devient :

$$m_r = \mu^r \Gamma\left(1 + \frac{r}{2}\right)$$

c'est à dire l'expression des moments de la loi de Rayleigh (relation 1.15).

– Le comportement asymptotique des fonctions hypergéométriques confluentes à l'infini ([8]) permet d'écrire :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} {}_1F_1(a; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^x x^{a-c} [1 + O(x^{-1})] \quad (1.27)$$

En reportant cette propriété dans la relation 1.25 et en posant $a = 1 + \frac{r}{2}$ et $c = 1$ (ce qui donne $a - c = \frac{r}{2}$), on en déduit :

$$\lim_{\mu_C \rightarrow 0} m_r = \mu^r \quad (1.28)$$

et on reconnaît alors les moments d'une loi constante de paramètre μ (c'est à dire la loi homothétique $\mathcal{H}[\mu]$ qui sera présentée au paragraphe 4.1.1). Ceci revient à dire qu'en l'absence de chatolement, une cible est bien décrite par une loi homothétique.

Notons qu'il existe une autre paramétrisation de la loi de Rice qui sera analysée au paragraphe 6.2.4 et qui a comme caractéristique d'avoir son coefficient de variation qui ne dépend que d'un seul paramètre.

6. appelée aussi fonction de Kummer. D'autres appellations existent et sont détaillées dans l'annexe A.3.

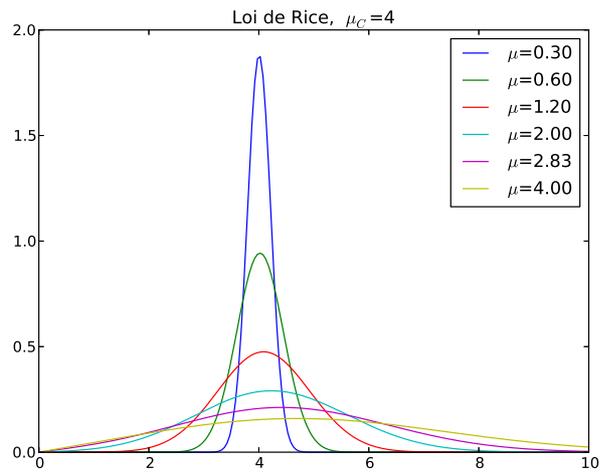
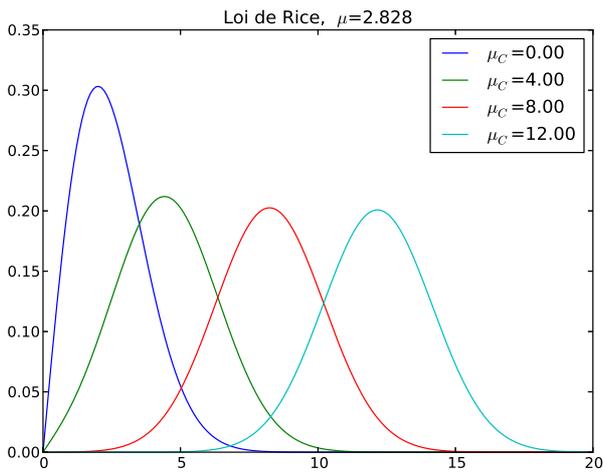


FIGURE 1.10 – Loi de Rice. A gauche, les caractéristiques du chatoisement sont identiques (avec $\mu = 2\sqrt{2}$) : la valeur de l’amplitude de la cible varie entre 0 (chatoisement pleinement développé) et 12. A droite, la valeur de l’amplitude de la cible est constante ($\mu_C = 4$) et le chatoisement varie. Le cas théorique $\mu = 0$ donne la loi homothétique, nulle partout excepté en $x = \mu_C$.

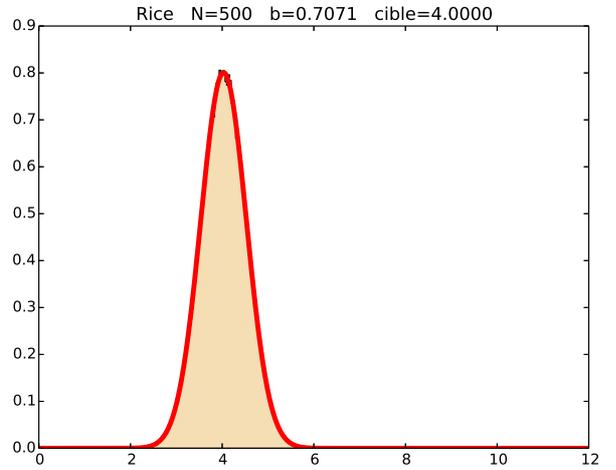
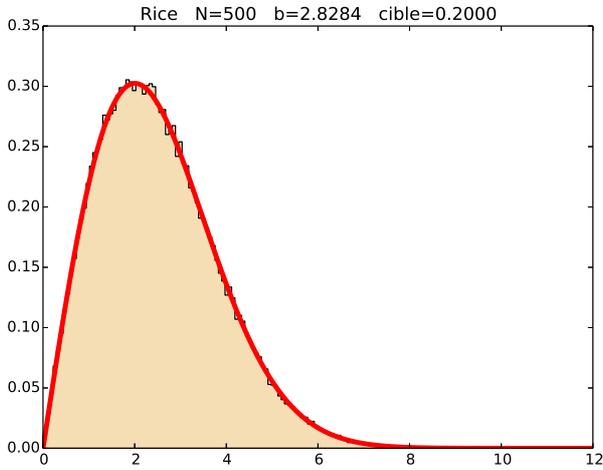


FIGURE 1.11 – Simulation d’une loi de Rice par sommation d’un très grand nombre de phaseurs ($N = 500$) d’amplitude constante b et d’une cible unique déterministe de phase nulle et d’amplitude donnée μ_C . A gauche : $\mu_C = 0.2$ et $b = 2\sqrt{2}$). La cible est noyée dans le bruit de chatoisement et la loi de Rice est très proche d’une loi de Rayleigh de mode $m_{mode} = b/\sqrt{2} = 2$. A droite : $\mu_C = 4$ et $b = \sqrt{2}/2$. L’histogramme est positionné sur le mode qui est très proche de la valeur $\mu_C = 4$.

Chapitre 2

La transformée de Mellin et les log-statistiques

2.1 Rappels sur la transformée de Mellin et ses propriétés

2.1.1 Définition

La transformée de Mellin \mathcal{M} fait correspondre à la fonction $f(x)$, définie pour $x \in \mathbb{R}^+$, la fonction analytique $\phi(s)$, avec $s \in \mathbb{C}$, selon la relation [11] :

$$\phi(s) = \mathcal{M}[f(x)](s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx \quad (2.1)$$

Dans cette expression, s est un complexe, que l'on pourra aussi noter :

$$s = c + i\omega$$

Généralement, pour $s \in \mathbb{R}$, cette intégrale (2.1) ne converge que pour des valeurs de c situées dans un intervalle donné¹ $]c_1, c_2[$. Une propriété importante de la transformée de Mellin est que si l'intégrale 2.1 converge pour $s = c \in]c_1, c_2[$ (c est alors un réel), elle converge pour tout s s'écrivant $s = c + i\omega \forall \omega \in \mathbb{R}$ [21]. On montre alors que $\phi(s)$ est holomorphe à l'intérieur de cette bande qui porte souvent le nom de bande de définition.

La transformée inverse est définie par la relation suivante :

$$h(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \phi(s) ds \quad (2.2)$$

Dans la mesure où $\phi(s)$ est la transformée de Mellin de la fonction $f(x)$ et que la valeur de c appartient à l'intervalle $]c_1, c_2[$ caractérisant la bande de définition de la transformée de Mellin de la fonction $f(x)$, on a alors la relation :

$$h(x) = f(x)$$

La condition d'appartenance de c à l'intervalle $]c_1, c_2[$ caractéristique de la bande de définition de la transformée de Mellin de la fonction $f(x)$ est une des difficultés de la transformation de Mellin. En effet, deux fonctions différentes peuvent avoir la même forme analytique de transformée de Mellin : seules diffèrent les bandes de définition des transformées qui ont bien évidemment une intersection nulle. Dans la mesure où toute précision est donnée sur la bande de définition, connaître une fonction ou connaître sa transformée de Mellin sont équivalents.

1. Pour alléger les notations et fluidifier la lecture, l'intervalle choisi dans ce document est un ouvert, les valeurs de c_1 et de c_2 pouvant être infinies.

$\mathcal{M}[f(ax)](s)$	$= a^{-s}\phi(s)$	TM 1
$\mathcal{M}[x^a f(x)](s)$	$= \phi(s+a)$	TM 2
$\mathcal{M}[f(x^a)](s)$	$= \frac{1}{a}\phi\left(\frac{s}{a}\right)$	TM 3
$\mathcal{M}\left[\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)\right](s)$	$= \phi(1-s)$	TM 4
$\mathcal{M}[f'(x)](s)$	$= (-1)(s-1)\phi(s-1)$	TM 5
$\mathcal{M}[f(x)(\log x)^n](s)$	$= \phi^{(n)}(s)$	TM 6

TABLE 2.1 – Propriétés fondamentales de la transformée de Mellin.

Notons enfin le rôle essentiel joué par la valeur $s = 1$. En effet, dans la mesure où l'intégrale existe, on a par définition :

$$\phi(s)|_{s=1} = \mathcal{M}[f(x)](s)|_{s=1} = \int_0^\infty f(x)dx.$$

En particulier, si $f(x)$ est une densité de probabilité, et si $\phi(s)$ est sa transformée de Mellin, on a :

$$\phi(s)|_{s=1} = 1.$$

2.1.2 Propriétés

Les principales propriétés de la transformée de Mellin sont reprises dans le tableau 2.1. Dans ce tableau, la notation $\phi^{(n)}(s)$ représente la dérivée d'ordre n de $\phi(s)$.

Une intéressante propriété [11] concerne la transformée de Mellin du produit de deux fonctions (possédant elles mêmes une transformée de Mellin dans une bande commune de définition) : si $\phi(s)$ est la transformée de Mellin de la fonction $f(x)$, et $\psi(s)$ est la transformée de Mellin de la fonction $g(x)$, alors la transformée de Mellin de la fonction $h(x) = f(x)g(x)$ s'écrit :

$$\mathcal{M}[h(x)](s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \phi(s-w)\psi(w)dw \quad (2.3)$$

Le lecteur reconnaîtra l'aspect d'une convolution, avec la particularité d'avoir un calcul à mener dans le plan complexe.

2.1.3 Convolution de Mellin

Définition

La convolution de Mellin $\hat{\star}$ peut se définir à partir de la relation fondamentale suivante :

$$h = f \hat{\star} g \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}[h](s) = \mathcal{M}[f](s) \mathcal{M}[g](s). \quad (2.4)$$

Cette relation est équivalente à la définition suivante :

$$(f \hat{\star} g)(u) = \int_0^\infty f(y)g\left(\frac{u}{y}\right)\frac{dy}{y} = \int_0^\infty f\left(\frac{u}{y}\right)g(y)\frac{dy}{y} \quad (2.5)$$

La condition pour définir la convolution de Mellin entre deux fonctions est d'avoir une intersection non vide des domaines de définition de la transformée de Mellin : la variable de Mellin doit alors appartenir à cette intersection.

Propriétés

– Commutativité et associativité

La définition 2.5 permet de déduire aisément les propriétés de commutativité et associativité de la convolution de Mellin :

$$\begin{aligned} f \hat{\star} g &= g \hat{\star} f \\ f \hat{\star} (g \hat{\star} h) &= (f \hat{\star} g) \hat{\star} h \end{aligned}$$

– **Élément neutre de $\hat{\star}$: le “Dirac-Mellin”**

La convolution de Mellin possède un élément neutre. Pour déterminer cet élément neutre, soit la distribution de Dirac $\delta(x)$ et considérons la distribution $\delta_\lambda^{\mathcal{M}}$:

$$\delta_\lambda^{\mathcal{M}}(x) = \delta(x\lambda - 1)$$

Calculons sa transformée de Mellin.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[\delta_\lambda^{\mathcal{M}}(x)] &= \int_0^\infty x^{s-1} \delta(x\lambda - 1) dx \\ &= \frac{1}{\lambda^s} \int_0^\infty y^{s-1} \delta(y - 1) dy \\ &= \frac{1}{\lambda^s} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$(f \hat{\star} \delta_\lambda^{\mathcal{M}})(x) = f(\lambda x). \quad (2.6)$$

D’où l’élément neutre recherché pour la convolution de Mellin : $\delta_{\lambda=1}^{\mathcal{M}}$, que nous appellerons par la suite “Dirac Mellin”.

– **Distributivité**

Le produit par une puissance b de la variable x possède une propriété spécifique de distributivité qui se déduit directement de la définition de la convolution de Mellin :

$$x^b (f \hat{\star} g) = (x^b f) \hat{\star} (x^b g).$$

Exemple : la construction de la loi \mathcal{K}

Nous avons déjà rencontré la convolution de Mellin dans l’expression du *compound speckle* de Goodman (expression 1.20) qui associe à une texture définie par la loi $p_\mu(\mu)$ un bruit multiplicatif de chatoisement (loi exponentielle décroissante) :

$$p(x) = \int_{\mu=0}^\infty p_\mu(\mu) \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} d\mu$$

$p_\mu(x)$ étant la loi du paramètre μ , que l’on peut maintenant réécrire sous la forme :

$$p(x) = p_\mu(x) \hat{\star} p_I(x)$$

avec $p_I(x)$ la loi du chatoisement. On en déduit :

$$\mathcal{M}[p](s) = \mathcal{M}[p_\mu](s) \mathcal{M}[p_I](s)$$

La transformée de Mellin d’une exponentielle décroissante s’écrit (par exemple [6]) :

$$\mathcal{M}[e^{-ax}](s) = a^{-s} \Gamma(s)$$

d’où :

$$\mathcal{M}[p](s) = \mu^{-s} (\Gamma(s))^2$$

Grâce aux tables de transformées de Mellin inverse (par exemple [6]), on a

$$\mathcal{M}^{-1}[(\Gamma(s))^2](s) = 2K_0(2\sqrt{x})$$

avec K_0 fonction de Bessel modifiée de troisième espèce. En prenant en compte la propriété **TM 1** de la transformée de Mellin (voir le tableau 2.1), on retrouve l’expression 1.21 de $p(x)$:

$$p(x) = \frac{2}{\mu} K_0 \left[2\sqrt{\frac{x}{\mu}} \right]$$

C’est cette démarche par convolution de Mellin qu’Epstein [17] a, le premier, utilisée en 1948 pour construire cette loi \mathcal{K} et qui sera formellement explicitée au paragraphe 2.4.2.

2.1.4 La transformée de Mellin : comparaisons avec la transformée de Laplace et la transformée de Fourier

Transformée de Laplace et transformée de Mellin

Parmi les transformations définies sur \mathbb{R}^+ , la très célèbre transformée de Laplace joue un grand rôle et, si elle existe, se définit comme :

$$\mathcal{TL}[f](p) = \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx \quad p \in \mathbb{C}$$

la variable complexe p devant appartenir à un domaine spécifique de \mathbb{C} .

Il y a en apparence une grande parenté entre la transformée de Laplace et celle de Mellin, puisque, en posant $p = \log(s - 1)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{TL}[f](p) &= \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\log(s-1)x} f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx \\ &= \mathcal{M}[f](s)|_{s=1+e^p} \end{aligned}$$

Cependant une différence essentielle repose sur la mesure utilisée, ce qui conduit aux relations suivantes :

- si on a une fonction $r(x)$ telle que $r(x) = f(x - a)$ si $x > a$ et $r(x) = 0, x \in [0, a]$ (opération de translation de valeur a), alors on a une forme d'invariance de la transformée de Laplace (appelé parfois théorème du retard) :

$$\begin{aligned} \mathcal{TL}[r](p) &= \int_0^{\infty} e^{-px} r(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-px} f(x - a) dx \\ &= e^{-pa} \int_0^{\infty} e^{-p(x-a)} f(x - a) dx \\ &= e^{-pa} \int_0^{\infty} e^{-px} g(x) dx \\ &= e^{-pa} \mathcal{TL}[f](p) \end{aligned}$$

ce qui montre que la transformée de Laplace d'une fonction retardée s'exprime assez simplement à partir de la transformée de Laplace de la fonction initiale.

Remarquons que l'on ne trouve pas de relation aussi simple dans ce cas pour la transformée de Mellin.

- si on a une fonction $h(x)$ telle que $h(x) = f(\lambda x)$ (opération de dilatation de facteur λ), alors on a une forme d'invariance de la transformée de Mellin (propriété **TM 1** du tableau 2.1) :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[h(x)](s) &= \int_0^{\infty} x^{s-1} h(x) dx \\ &= \lambda^{-s} \mathcal{M}[f(x)](s) \end{aligned}$$

ce qui montre que la transformée de Mellin d'une fonction dilatée s'exprime assez simplement à partir de la transformée de Mellin de la fonction initiale.

Remarquons que l'on ne trouve pas de relation aussi simple dans ce cas pour la transformée de Laplace.

Cette différence de propriété liée à la mesure s'observe aussi sur les deux opérateurs suivants, la convolution classique, notée \star , et la convolution de Mellin, notée $\hat{\star}$. En effet on a les deux relations fondamentales² :

$$\begin{aligned} h &= f \hat{\star} g \Leftrightarrow \mathcal{M}[h](s) = \mathcal{M}[f](s) \mathcal{M}[g](s) \\ h &= f \star g \Leftrightarrow \mathcal{TL}[h](p) = \mathcal{TL}[f](p) \mathcal{TL}[g](p) \end{aligned}$$

Chaque opérateur (retard ou dilatation) est donc associé à une transformée spécifique (Laplace ou Mellin).

Transformée de Fourier et transformée de Mellin

Une autre transformée joue un rôle essentiel en sciences : c'est la transformée de Fourier. Pour une fonction $f(x)$, définie sur \mathbb{R} , elle s'écrit généralement sous la forme :

$$\mathcal{F}[f](\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\nu x} f(x) dx \quad (2.7)$$

avec $\nu \in \mathbb{R}$.

Soit une fonction $f(x)$, définie sur \mathbb{R}^+ et possédant sa transformée de Mellin $\phi(s)$. Effectuons un passage en échelle logarithmique : on définit une variable y telle que $y = \log x$, $y \in \mathbb{R}$, et à la fonction $f(x)$ correspond une nouvelle fonction $g(y)$ définie sur \mathbb{R} , telle que :

$$g(y) = g(\log x) = f(x)$$

On a les relations :

$$y = \log x \Rightarrow dy = \frac{1}{x} dx$$

et

$$x = e^y \Rightarrow dx = x dy$$

La transformée de Fourier $\mathcal{F}[g](\nu)$ de la fonction $g(y)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[g](\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\nu y} g(y) dy \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-i\nu \log(x)} g(\log(x)) \frac{1}{x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^{-i\nu-1} f(x) dx \\ &= \mathcal{M}[f(x)](s)|_{s=-i\nu} \\ &= \mathcal{M}[f](s)|_{s=-i\nu} \end{aligned} \quad (2.8)$$

De même, connaissant une fonction $g(y)$ et sa transformée de Fourier $\mathcal{F}[g](\nu)$, on en déduit la transformée de Mellin de la fonction $f(x)$ (avec $x = e^y$, $x \in \mathbb{R}^+$) :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[f](s) &= \int_0^{+\infty} x^{s-1} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (e^y)^{s-1} g(y) e^y dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sy} g(y) dy \\ &= \mathcal{F}[g](\nu)|_{\nu=is} \end{aligned} \quad (2.9)$$

2. en prenant les précautions d'usage : les transformées de Mellin des fonctions f et g existent, et les domaines d'existence des deux transformées se recouvrent.

Vis à vis de la transformée de Fourier, la convolution joue un rôle identique à celui qu'elle joue vis à vis de la transformée de Laplace. On a donc³ :

$$\begin{aligned} h &= f \hat{\star} g \Leftrightarrow \mathcal{M}[h](s) = \mathcal{M}[f](s) \mathcal{M}[g](s) \\ h &= f \star g \Leftrightarrow \mathcal{F}[h](p) = \mathcal{F}[f](p) \mathcal{F}[g](p) \end{aligned}$$

et, comme précédemment, retard ou dilatation sont associés à une transformée spécifique (Fourier ou Mellin).

Le domaine d'application de la transformée de Mellin

Au vu de ces diverses comparaisons, on pourrait penser que la transformée de Mellin n'a qu'un rôle accessoire puisqu'elle s'exprime comme une transformée de Fourier, voire comme une transformée de Laplace. C'est oublier plusieurs points essentiels :

- Il existe des tables de transformées de Mellin très complètes (comme celle d'Oberhettinger [41]) et qui offrent un très grand nombre de transformées de Mellin de fonctions délicates à gérer dans le monde de Fourier.
- Il existe des fonctions qui sont définies comme des transformées de Mellin Inverse : ce sont les fonctions de Meijer, et nous verrons qu'elles jouent un rôle clé en imagerie radar (voir annexe B).
- Vis à vis de la transformée de Fourier, notons que la variable de Mellin, s , est une valeur complexe alors que la variable de Fourier, ν , est définie sur \mathbb{R} . On passe donc dans l'univers des fonctions holomorphes, plus délicates à analyser et à manipuler, mais aussi dotées de propriétés beaucoup plus puissantes.

En pratique, le point probablement le plus essentiel repose sur les opérations de convolution :

- La convolution traditionnelle est l'apanage des transformées de Fourier et de Laplace. Elle se fonde sur l'opération de translation : $x \rightarrow x - a$.
- la convolution de Mellin est l'opérateur spécifique de la transformée de Mellin. Elle se fonde sur l'opérateur de dilatation : $x \rightarrow \lambda x$.

Or nous avons déjà rencontré cette convolution de Mellin dans l'approche du *compound speckle* de Goodman (paragraphe 1.3.1) et nous allons voir le rôle clé que joue cet opérateur pour l'étude des lois de probabilités adaptées au bruit multiplicatif.

2.2 Quelques rappels sur le rôle de la transformée de Fourier en statistiques traditionnelles

2.2.1 Définition des fonctions caractéristiques

Soit une variable aléatoire X à valeurs réelles. On définit sa fonction de répartition, notée $F_X(u)$: c'est la probabilité d'apparition de la variable aléatoire dans le segment $]-\infty, u]$.

Lorsque X admet une densité de probabilité $p_X(x)$, celle-ci vérifie la relation :

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^u p_X(x) dx$$

et possède les propriétés fondamentales suivantes :

$$\begin{cases} p_X(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = 1 \end{cases} \quad (2.10)$$

La première fonction caractéristique de p_X , $\Phi_X(\nu)$, est, par définition, et si celle-ci existe, l'espérance de $e^{i\nu x}$:

$$\Phi_X(\nu) = E[e^{i\nu x}] \quad (2.11)$$

³. toujours avec les précautions d'usage

Au signe de l'argument de l'exponentielle près, on reconnaît le noyau de la transformée de Fourier (relation 2.7), ce qui permet d'écrire⁴ :

$$\boxed{\Phi_X(\nu) = \mathcal{F}^+[p_X](\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu x} p_X(x) dx,} \quad (2.12)$$

La seconde fonction caractéristique de p_X , $\Psi_X(\nu)$, est alors définie par la relation (si elle existe) :

$$\Psi_X(\nu) = \log(\Phi_X(\nu)) \quad (2.13)$$

Notons que la relation 2.10 impose :

$$\Phi_X(\nu)|_{\nu=0} = 1 \quad (2.14)$$

Autrement dit, la valeur de la transformée de Fourier d'une fonction pour la fréquence nulle est tout simplement la valeur moyenne de la fonction.

2.2.2 Moments

La première fonction caractéristique permet de donner une première définition du moment d'ordre r (s'il existe) sous la forme :

$$m_r = (-i)^r \left. \frac{d^r \Phi_X(\nu)}{d\nu^r} \right|_{\nu=0} \quad (2.15)$$

Dans la mesure où la densité de probabilité admet une transformée de Fourier dérivable selon la variable de Fourier ν , cette expression permet d'avoir une forme analytique des moments.

En utilisant alors une propriété de la transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}[x^r p(x)](\nu) = (-i)^r \frac{d^r \mathcal{F}[p(x)](\nu)}{d\nu^r}$$

on en déduit une forme plus connue pour l'expression du moment d'ordre r :

$$m_r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r p_X(x) dx. \quad (2.16)$$

cette dernière expression permettant d'introduire les moments centrés d'ordre r , M_r , qui s'expriment par la relation :

$$M_r = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{m})^r p_X(x) dx.$$

Plus précisément, on en déduit les très classiques relations exprimant les moments centrés en fonction des moments [12] :

$$\begin{aligned} M_1 &= m_1 \\ M_2 &= m_2 - m_1^2 \\ M_3 &= m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3 \\ M_4 &= m_4 - 4m_3 m_1 + 6m_2 m_1^2 - 3m_1^4 \\ M_5 &= m_5 - 5m_4 m_1 + 10m_3 m_1^2 - 10m_2 m_1^3 + 4m_1^5 \\ M_6 &= m_6 - 6m_5 m_1 + 15m_4 m_1^2 - 20m_3 m_1^3 + 15m_2 m_1^4 - 5m_1^6 \end{aligned} \quad (2.17)$$

qui ont aussi leurs formes duales suivantes (moments en fonction des moments centrés) [12] :

$$\begin{aligned} m_1 &= M_1 \\ m_2 &= M_2 + M_1^2 \\ m_3 &= M_3 + 3M_2 M_1 + M_1^3 \\ m_4 &= M_4 + 4M_3 M_1 + 6M_2 M_1^2 + M_1^4 \\ m_5 &= M_5 + 5M_4 M_1 + 10M_3 M_1^2 + 10M_2 M_1^3 + M_1^5 \\ m_6 &= M_6 + 6M_5 M_1 + 15M_4 M_1^2 + 20M_3 M_1^3 + 15M_2 M_1^4 + M_1^6 \end{aligned} \quad (2.18)$$

4. Ce signe rattaché à l'exponentielle complexe est caractéristique de l'univers des statistiques (aussi bien autrefois [42] que maintenant [26]) : ceci explique la notation \mathcal{F}^+ choisie dans ce document.

Le moment d'ordre 1 porte le nom de **moyenne** et s'écrit :

$$\bar{m} = m_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx.$$

Le moment centré d'ordre 2 est associé à la variance, notée σ^2 :

$$\sigma^2 = M_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{m})^2 p_X(x) dx.$$

σ étant l'écart type (*standard deviation*).

En traitement d'images cohérentes où les données sont positives ou nulles, il est fait souvent usage du coefficient de variation, noté γ et défini par :

$$\gamma = \sqrt{\frac{M_2}{m_1^2}} = \frac{\sigma}{m_1} \quad (2.19)$$

On peut remarquer que son inverse, μ/σ n'est rien d'autre que le rapport signal à bruit utilisé en traitement du signal.

D'autres coefficients sont parfois utiles pour décrire l'allure d'une densité de probabilité. Par exemple, Kendall [46] introduit les coefficients β_1 , liés à l'asymétrie (*skewness*), et β_2 , lié à l'aplatissement (*kurtosis*) :

$$\beta_1 = \frac{M_3^2}{M_2^3} \quad (2.20)$$

$$\beta_2 = \frac{M_4}{M_2^2}. \quad (2.21)$$

Ces deux grandeurs, qui ne dépendent que des paramètres de forme des lois, permettent de décrire des familles de loi dans un diagramme connu sous le nom de diagramme de Pearson (que nous détaillerons dans le cas des lois Gamma et Gamma Inverse au paragraphe 3.1.6). Les lois normales y occupent une position de référence : elles sont toutes localisées au point $(\beta_1 = 0, \beta_2 = 3)$. Un exemple du diagramme de Pearson sera donné pour les lois Gamma et Gamma Inverse au chapitre 3, paragraphe 3.1.6.

2.2.3 Cumulants

La seconde fonction caractéristique de p_X , $\Psi_X(\nu)$ (relation 2.13), permet de donner une première définition du cumulants d'ordre r (s'il existe) sous la forme :

$$\kappa_r = (-i)^r \left. \frac{d^r \Psi_X(\nu)}{d\nu^r} \right|_{\nu=0}. \quad (2.22)$$

Après quelques calculs, on trouve alors les relations exprimant les cumulants en fonction des moments centrés (et donc des moments) [12] :

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= m_1 \\ \kappa_2 &= M_2 \\ \kappa_3 &= M_3 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Les cumulants ont un rôle clé dans la modélisation de somme de variables aléatoires.

2.2.4 Somme de variables aléatoires

Le formalisme des fonctions caractéristiques, fondé sur la transformée de Fourier et la convolution, est parfaitement adapté au cas de la somme de deux variables aléatoires. En effet, soient deux variables

aléatoires, X et Y , décrites par leurs lois probabilités $p_X(x)$ et $p_Y(y)$ ainsi que par leurs fonctions caractéristiques $\Phi_X(\nu)$ et $\Phi_Y(\nu)$. Considérons la nouvelle variable aléatoire Z telle que :

$$Z = X + Y$$

et notons $p_Z(z)$ sa densité de probabilité.

Pour que la variable aléatoire Z ait une réalisation de valeur z , il faut que, pour une réalisation de Y de valeur y , corresponde une réalisation de X de valeur $x = z - y$. Dans ce cas, la réalisation du processus somme a bien la valeur z . Or, pour un y donné, on connaît la loi suivie par la variable aléatoire $X' = X - y$: c'est tout simplement $p_{X'}(x) = p_X(x - y)$. En considérant toutes les réalisations y de Y possibles menant à la valeur z , on peut écrire :

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(z - y)p_Y(y)dy \quad (2.24)$$

On reconnaît la forme d'une convolution. Connaissant les propriétés de la transformée de Fourier vis à vis de la convolution, on obtient la fonction caractéristique $\Phi_Z(\nu)$ de la variable aléatoire Z sous la forme d'un simple produit :

$$\Phi_Z(\nu) = \Phi_X(\nu) \Phi_Y(\nu) \quad (2.25)$$

Dans la mesure où cette expression se retrouve dans une table de transformée de Fourier inverse, on a une méthode très aisée à mettre en œuvre pour établir la forme analytique de la densité de probabilité d'une somme de variables aléatoires.

De l'expression 2.25 et de la relation donnant les cumulants à partir de la fonction caractéristique (relation 2.22), on tire une propriété essentielle résultant de la somme de deux variables aléatoires : le cumulants d'ordre r de la variable aléatoire Z (somme de la variable aléatoire X et de la variable aléatoire Y) s'obtient en effectuant la somme du cumulants d'ordre r de la variable aléatoire X avec le cumulants d'ordre r de la variable aléatoire Y .

$$\kappa_{Z,r} = \kappa_{X,r} + \kappa_{Y,r} \quad (2.26)$$

En particulier, le cas $r = 1$ permet d'écrire une relation bien connue pour la moyenne de la somme de deux variables aléatoires :

$$m_{X+Y,1} = m_{X,1} + m_{Y,1}$$

2.2.5 Données discrètes

Il est rare d'avoir un phénomène physique pour lequel on connaît la forme théorique de la densité de probabilité : le chatouement pleinement développé en est un exemple. En revanche, dès que l'on étudie un phénomène discrétisé, on peut disposer d'un jeu de N échantillons ($x_n, n \in [1, N]$) sur lequel on peut opérer des calculs élémentaires.

L'expression des moments (relation 2.16) sous forme intégrale permet leurs estimations à partir de ces N échantillons. On définit alors les moments empiriques d'ordre r , \hat{m}_r , par une approximation de l'intégrale sous forme discrète, ce qui donne

$$\hat{m}_r = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n^r \quad (2.27)$$

Il est important de noter que ces estimés sont toujours calculables dans la mesure où les données (généralement issues d'un convertisseur analogique/numérique) sont bornées.

De manière triviale, les moments centrés empiriques d'ordre r s'écrivent :

$$\hat{M}_r = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n - \hat{m}_1)^r$$

ce qui permet une estimation des cumulants.

2.2.6 L'héritage des statistiques traditionnelles

En résumé, le cadre des statistiques traditionnelles fait jouer un rôle essentiel à la transformée de Fourier, sous le nom de fonction caractéristique, pour caractériser les lois de probabilité définies sur \mathbb{R} . On a donc par définition (relation 2.12) :

$$\Phi_X(\nu) = \mathcal{F}^+[p_X](\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu x} p_X(x) dx$$

Pour un traicteur de données, les propriétés majeures de cette fonction caractéristique peuvent se résumer en deux points :

- la notion de moment d'ordre r s'obtient soit sous une forme permettant des calculs analytiques (relation 2.15) :

$$m_r = (-i)^r \left. \frac{d^r \Phi_X(\nu)}{d\nu^r} \right|_{\nu=0}$$

soit sous une forme intégrale :

$$m_r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r p_X(x) dx$$

utilisable pour des données discrètes et qui permet d'estimer ce moment (relation 2.16) :

$$\hat{m}_r = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n^r$$

- une combinaison additive des variables aléatoires X et Y , dont les densités de probabilités sont $p_X(u)$ et $p_Y(u)$, se modélise comme un produit de fonctions caractéristiques (relation 2.25), et donc une convolution des densités de probabilités :

$$\boxed{Z = X + Y \Leftrightarrow \Phi_Z(\nu) = \Phi_X(\nu) \Phi_Y(\nu) \Leftrightarrow p_Z(u) = p_X(u) \star p_Y(u)} \quad (2.28)$$

ce qui rend accessible la forme analytique de la densité de probabilité de la variable aléatoire Z par le biais de tables de transformées de Fourier directes et inverses. Cette propriété permet d'écrire une loi additive pour les cumulants (relation 2.26) :

$$\kappa_{Z,r} = \kappa_{X,r} + \kappa_{Y,r}$$

2.3 Application de la transformée de Mellin aux lois de probabilités définies sur \mathbb{R}^+

2.3.1 Définition des log-statistiques pour des densités de probabilités définies sur \mathbb{R}^+

Soit une variable aléatoire X définie sur \mathbb{R}^+ et de densité de probabilité $p_X(x)$ avec $x \in \mathbb{R}^+$. Dans l'expression de sa fonction caractéristique $\Phi_X(\nu)$, on note que l'intégrale de Fourier n'opère en pratique que sur le demi espace réel \mathbb{R}^+ puisque dans le cas de cette fonction $p(x)$, sa fonction caractéristique $\Phi_X(\nu)$ s'écrit :

$$\Phi_X(\nu) = \mathcal{F}^+[p_X](\nu) = \int_0^{+\infty} e^{i\nu x} p_X(x) dx$$

la transformée de Fourier dans ce cas ne se calcule que dans un demi espace (\mathbb{R}^+) et n'opère pas optimalement.

Cette observation très simple peut mener à deux démarches :

- une démarche heuristique, qui consiste à chercher et tester des transformations intégrales dont le domaine de définition se restreint au demi espace \mathbb{R}^+ . Cette démarche conduit à choisir la transformée de Mellin qui, par définition, ne met en œuvre que des valeurs de x dans le demi espace \mathbb{R}^+ .

- une démarche s'appuyant sur les liens entre transformée de Mellin et transformée de Fourier que nous avons vus au paragraphe 2.1.4 et qui, dans le cas d'une fonction f définie sur \mathbb{R}^+ , permet d'établir des passerelles entre la transformée de Mellin $\mathcal{M}[f](s)$ et la transformée de Fourier $\mathcal{F}[g](\nu)$ de la fonction $g(y) = f(e^y)$ par le biais d'un changement de variable $y = \log x \Leftrightarrow x = e^y$, ce qui permet d'écrire (relations 2.8 et 2.9) :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g](\nu) &= \mathcal{M}[f](s)|_{s=-i\nu} \\ \mathcal{M}[f](s) &= \mathcal{F}[g](\nu)|_{\nu=is}\end{aligned}$$

la première de ces relations montrant que, dans le cas de ce changement de variable (passage en échelle logarithmique), la forme de la transformée de Fourier s'obtient très aisément si on connaît la transformée de Mellin de la densité de probabilité.

Ces deux observations mènent à définir la notion de **log-statistiques**, que l'on peut aussi appeler **statistiques de Mellin** pour lesquelles l'élément fédérateur est la transformée de Mellin en lieu et place de la transformée de Fourier. S'en déduisent les définitions de la **première fonction caractéristique de deuxième espèce** $\phi_X(s)$ et de la **seconde fonction caractéristique de deuxième espèce** $\psi_X(s)$ par un simple mimétisme des relations 2.12 (première fonction caractéristique) et 2.13 (seconde fonction caractéristique), ce qui donne les relations⁵ :

$$\boxed{\phi_X(s) = \mathcal{M}[p_X](s) = \int_0^\infty x^{s-1} p_X(x) dx} \quad (2.29)$$

et

$$\boxed{\psi_X(s) = \log(\phi_X(s))} \quad (2.30)$$

la variable s étant un complexe dont il faut définir le domaine de définition.

Puisque $p_X(x)$ est une densité de probabilité, on a (relation 2.10) :

$$\int_0^\infty p_X(x) dx = 1$$

Aussi, toute fonction caractéristique de deuxième espèce est définie pour des valeurs de s telles que la valeur $s = 1$ appartienne à son domaine de définition (de même que les fonctions caractéristiques traditionnelles sont définies en $\nu = 0$ –voir la relation 2.14–). Ceci permet d'affirmer que le domaine de définition d'une fonction caractéristique de deuxième espèce correspond à la bande de définition de la transformée de Mellin (voir paragraphe 2.1.1). C'est un ouvert du plan complexe tel que la valeur $s = 1$ soit à l'intérieur de cet ouvert.

En appliquant la transformée de Mellin Inverse (relation 2.2) pour les points $1 + is$ (c'est à dire $c = 1$), on peut écrire :

$$p_X(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} x^{-s} \phi(s) ds$$

Ceci montre que la première fonction caractéristique de deuxième espèce d'une variable aléatoire X permet, à l'instar de la première fonction caractéristique, de retrouver la densité de probabilité de X . On peut noter que le choix $c = 1$ n'est pas unique : n'importe quelle valeur de c du domaine de définition des fonctions caractéristiques de deuxième espèce peut être utilisé pour effectuer la transformée de Mellin Inverse.

Bien que peu usitée, la transformée de Mellin est dotée de tables analytiques (transformées directe et inverse) qui peuvent s'avérer extrêmement performantes. Citons celle qui semble la plus ancienne (Bateman [6], 1954) et celle qui est la plus complète (Oberhettinger [41], 1974). Nous verrons qu'en pratique la quasi totalité des lois usitées en imagerie cohérente ont une transformée de Mellin dans l'une de ces tables.

5. Le choix typographique est d'attribuer des lettres grecques en majuscule pour les fonctions caractéristiques traditionnelles et les lettres grecques en minuscule pour les fonctions caractéristiques de deuxième espèce.

2.3.2 Liens entre première fonction caractéristique de deuxième espèce et moments

Une première application des statistiques de Mellin est le calcul des moments traditionnels. En effet, le moment traditionnel d'ordre r , m_r , s'écrit (s'il existe) :

$$m_r = \int_0^{\infty} x^r p_X(x) dx$$

A partir de la définition de la première fonction caractéristique de deuxième espèce (relation 2.29), on a directement :

$$m_r = \phi_X(s) \Big|_{s=r+1} \quad (2.31)$$

C'est une première retombée des statistiques de Mellin : dans la mesure où une loi de probabilité possède sa transformée de Mellin, on en déduit directement ses moments d'ordre r dès lors que la première fonction caractéristique de deuxième espèce est définie pour $s = r + 1$ et que la valeur $s = r + 1$ est dans un ouvert du domaine de définition de la première fonction caractéristique de deuxième espèce.

2.3.3 Définition des log-moments et des log-cumulants

En reprenant la démarche ayant conduit à définir les moments et les cumulants à partir des fonctions caractéristiques prises en $\nu = 0$, voyons ce qui se passe dans les statistiques de Mellin en faisant jouer un rôle clé à la valeur $s = 1$. On obtient ainsi :

- Le moment de deuxième espèce d'ordre r , noté $\tilde{m}_{X,r}$, et que l'on peut nommer log-moment, se définit par :

$$\tilde{m}_r = \left. \frac{d^r \phi_X(s)}{ds^r} \right|_{s=1} \quad (2.32)$$

- Le cumulants de deuxième espèce d'ordre r , noté $\tilde{\kappa}_{X,r}$, et que l'on peut nommer log-cumulants, se définit par :

$$\tilde{\kappa}_r = \left. \frac{d^r \psi_X(s)}{ds^r} \right|_{s=1} \quad (2.33)$$

2.3.4 Propriétés des log-moments

Soit le log-moment d'ordre r :

$$\tilde{m}_r = \left. \frac{d^r \phi_X(s)}{ds^r} \right|_{s=1}$$

En appliquant la propriété **TM 6** de la transformée de Mellin :

$$\mathcal{M}[f(x) (\log x)^n](s) = (\mathcal{M}[f(x)](s))^{(n)}$$

on en déduit les deux expressions équivalentes pour les moments de deuxième espèce :

$$\begin{aligned} \tilde{m}_r &= \left. \frac{d^r \phi_X(s)}{ds^r} \right|_{s=1} \\ &= \int_0^{+\infty} (\log x)^r p_X(x) dx \end{aligned} \quad (2.34)$$

Si l'on compare avec la définition de la moyenne (relation 2.16), on remarque le changement du noyau intégral qui initialement était x^r et qui devient $(\log x)^r$. Ceci justifie l'appellation de log-moments pour ces grandeurs.

Dans ce cadre, on peut définir la log-moyenne \tilde{m} par la relation suivante :

$$\log \tilde{m} = \tilde{m}_1 \Leftrightarrow \tilde{m} = e^{\tilde{m}_1} \quad (2.35)$$

ce qui conduit à définir les log-moments normalisés :

$$\tilde{M}_r = \int_0^{+\infty} \left(\log \left(\frac{x}{\tilde{m}} \right) \right)^r p_X(x) dx \quad (2.36)$$

Comme la construction des log-moments normalisés s'est faite par un calcul en tout point semblable à celui des moments centrés, il est facile de retranscrire les relations entre moment et moments centrés (relations 2.17 et 2.18) en des relations entre log-moments et log-moments centrés :

$$\begin{aligned} \tilde{M}_1 &= \tilde{m}_1 \\ \tilde{M}_2 &= \tilde{m}_2 - \tilde{m}_1^2 \\ \tilde{M}_3 &= \tilde{m}_3 - 3\tilde{m}_2\tilde{m}_1 + 2\tilde{m}_1^3 \\ \tilde{M}_4 &= \tilde{m}_4 - 4\tilde{m}_3\tilde{m}_1 + 6\tilde{m}_2\tilde{m}_1^2 - 3\tilde{m}_1^4 \\ \tilde{M}_5 &= \tilde{m}_5 - 5\tilde{m}_4\tilde{m}_1 + 10\tilde{m}_3\tilde{m}_1^2 - 10\tilde{m}_2\tilde{m}_1^3 + 4\tilde{m}_1^5 \\ \tilde{M}_6 &= \tilde{m}_6 - 6\tilde{m}_5\tilde{m}_1 + 15\tilde{m}_4\tilde{m}_1^2 - 20\tilde{m}_3\tilde{m}_1^3 + 15\tilde{m}_2\tilde{m}_1^4 - 5\tilde{m}_1^6 \end{aligned} \quad (2.37)$$

qui ont aussi leurs formes duales suivantes (log-moments en fonction des log-moments normalisés) :

$$\begin{aligned} \tilde{m}_1 &= \tilde{M}_1 \\ \tilde{m}_2 &= \tilde{M}_2 + \tilde{M}_1^2 \\ \tilde{m}_3 &= \tilde{M}_3 + 3\tilde{M}_2\tilde{M}_1 + \tilde{M}_1^3 \\ \tilde{m}_4 &= \tilde{M}_4 + 4\tilde{M}_1\tilde{M}_3 + 6\tilde{M}_2\tilde{M}_1^2 + \tilde{M}_1^4 \\ \tilde{m}_5 &= \tilde{M}_5 + 5\tilde{M}_4\tilde{M}_1 + 10\tilde{M}_3\tilde{M}_1^2 + 10\tilde{M}_2\tilde{M}_1^3 + \tilde{M}_1^5 \\ \tilde{m}_6 &= \tilde{M}_6 + 6\tilde{M}_5\tilde{M}_1 + 15\tilde{M}_4\tilde{M}_1^2 + 20\tilde{M}_3\tilde{M}_1^3 + 15\tilde{M}_2\tilde{M}_1^4 + \tilde{M}_1^6 \end{aligned} \quad (2.38)$$

2.3.5 Propriétés des log-cumulants

Nous avons vu que le log-cumulant d'ordre r est donné par la relation 2.33 :

$$\tilde{\kappa}_r = \left. \frac{d^r \psi_X(s)}{ds^r} \right|_{s=1}$$

Comme dans le cadre des statistiques traditionnelles, il existe des liens analytiques entre log-moments et log-cumulants.

– pour le premier log-cumulant, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_1 &= \left. \frac{d \log(\phi_x(s))}{ds} \right|_{s=1} \\ &= \left. \frac{\frac{d\phi_x(s)}{ds}}{\phi_x(s)} \right|_{s=1} \\ &= \tilde{m}_1 \end{aligned} \quad (2.39)$$

– De même pour l'expression de $\tilde{\kappa}_{x(2)}$, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_2 &= \left. \frac{d^2 \log(\phi_x(s))}{ds^2} \right|_{s=1} \\ &= \left. \frac{\frac{d^2 \phi_x(s)}{ds^2}}{\phi_x(s)} \right|_{s=1} - \left. \frac{\left(\frac{d\phi_x(s)}{ds} \right)^2}{\phi_x(s)^2} \right|_{s=1} \\ &= \tilde{m}_2 - \tilde{m}_1^2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

- Formellement, on retrouve le même schéma de relation entre log-moments et log-cumulants que celui qui existe entre moments et cumulants. En s'inspirant des relations 2.23, on déduit :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_1 &= \tilde{m}_1 \\ \tilde{\kappa}_2 &= \tilde{M}_2 = \tilde{m}_2 - \tilde{m}_1^2 \\ \tilde{\kappa}_3 &= \tilde{M}_3 = \tilde{m}_3 - 3\tilde{m}_2\tilde{m}_1 + 2\tilde{m}_1^3\end{aligned}\tag{2.41}$$

2.3.6 Données discrètes

Comme dans le cas des statistiques traditionnelles (paragraphe 2.2.5), un phénomène peut être étudié grâce à un jeu de N échantillons⁶ ($x_n, n \in [1, N], x_n \in \mathbb{R}^+$) sur lequel on peut opérer des calculs élémentaires.

L'expression des log-moments (relation 2.34) sous forme intégrale permet leurs estimations à partir de ces N échantillons. On définit alors les log-moments empiriques d'ordre r , \hat{m}_r , par une approximation de l'intégrale sous forme discrète, ce qui donne

$$\hat{m}_r = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\log(x_n))^r\tag{2.42}$$

Il est important de noter que ces estimées sont toujours calculables dans la mesure où les données (généralement issues d'un convertisseur analogique/numérique) sont bornées et strictement positives.

De manière triviale, les moments centrés empiriques d'ordre r s'écrivent :

$$\hat{M}_r = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\log \left(\frac{x_n}{\hat{m}_1} \right) \right)^r$$

ce qui permet une estimation des log-cumulants.

2.4 Propriétés des Log-statistiques

2.4.1 Moments traditionnels et première fonction caractéristique

Soit une variable aléatoire X décrite par sa densité de probabilité $p_X(u)$ et sa fonction caractéristique de deuxième espèce $\phi_X(s)$.

Par définition, la première fonction caractéristique est la transformée de Mellin d'une densité de probabilité. Etant donnée la définition de la transformée de Mellin et de la définition des moments traditionnels, on a directement (relation 2.31) :

$$m_r = \phi_X(s)|_{s=r+1}$$

dans la mesure où ce moment existe.

2.4.2 Produit de variables aléatoires

Le formalisme des fonctions caractéristiques de deuxième espèce, fondé sur la transformée de Mellin et la convolution de Mellin, est parfaitement adapté au cas du produit de deux variables aléatoires définies sur \mathbb{R}^+ . En effet, soient deux variables aléatoires, X et Y , décrites par leurs lois probabilités $p_X(x)$ et $p_Y(y)$ ainsi que par leurs fonctions caractéristiques de deuxième espèce $\phi_X(s)$ et $\phi_Y(s)$ (toutes deux définies dans une bande autour de la valeur $s = 1$). Considérons la nouvelle variable aléatoire Z telle que :

$$Z = XY$$

Elle est elle-même définie sur \mathbb{R}^+ . Notons $p_Z(z)$ sa densité de probabilité.

6. que l'on supposera strictement positifs pour éluder le cas pathologique $x = 0$ non géré par la fonction logarithme.

Pour que la variable aléatoire Z ait une réalisation de valeur z , il faut que, pour une réalisation de Y de valeur y , corresponde une réalisation de X de valeur $x = \frac{z}{y}$ (y étant supposé non nul). Dans ce cas, la réalisation du processus produit a bien la valeur z . Or, pour un y donné, on connaît la loi suivie par la variable aléatoire $X' = \frac{X}{y}$: elle s'écrit $p_{X'}(x) = \frac{1}{y} p_X\left(\frac{x}{y}\right)$. En considérant toutes les réalisations y de Y possibles menant à la valeur z , on peut écrire :

$$p_Z(z) = \int_0^\infty \frac{1}{y} p_X\left(\frac{z}{y}\right) p_Y(y) dy \quad (2.43)$$

On reconnaît la forme d'une convolution de Mellin (expression 2.5), ce qui permet d'obtenir la fonction caractéristique de deuxième espèce $\phi_Z(s)$ de la variable aléatoire Z par un simple produit des fonctions caractéristiques de deuxième espèce $\phi_X(s)$ et $\phi_Y(s)$:

$$\phi_Z(s) = \phi_X(s) \phi_Y(s) \quad (2.44)$$

Dans la mesure où cette expression se retrouve dans une table de transformée de Mellin inverse⁷, on a une méthode très aisée à mettre en œuvre pour établir la forme analytique de la densité de probabilité d'un produit de variables aléatoires.

De l'expression 2.44 et de la relation donnant les log-cumulants à partir de la fonction caractéristique de deuxième espèce (relation 2.33), on tire une propriété essentielle résultant du produit de deux variables aléatoires : le log-cumulant d'ordre r de la variable aléatoire Z (produit de la variable aléatoire X et de la variable aléatoire Y) s'obtient en effectuant la somme du log-cumulant d'ordre r de la variable aléatoire X avec le log-cumulant d'ordre r de la variable aléatoire Y .

$$\tilde{\kappa}_{Z,r} = \tilde{\kappa}_{X,r} + \tilde{\kappa}_{Y,r} \quad (2.45)$$

2.4.3 Lois directes et lois inverses

Si X est une variable aléatoire et $g_X(x)$ est sa densité de probabilité, alors la densité de probabilité de la variable aléatoire Y telle que :

$$Y = \frac{1}{X}$$

vérifie :

$$g_Y(y) = \frac{1}{y^2} g_X\left(\frac{1}{y}\right). \quad (2.46)$$

On peut noter à partir de cette expression que, puisque g_X est une densité de probabilité (vérifiant entre autres $g_X(x) \geq 0 \forall x$), cette expression vérifie bien une des conditions requises pour les densités de probabilité puisque l'on a $g_Y(y) \geq 0 \forall y$.

En partant de la définition de la transformée de Mellin et en utilisant simplement les propriétés **TM 2** et **TM 4** (voir tableau 2.1), on montre que la log-fonction caractéristique de la variable aléatoire Y , $\phi_Y(s)$, se déduit directement de la log-fonction caractéristique de la variable aléatoire X , $\phi_X(s)$ par la relation :

$$\phi_Y(s) = \phi_X(2-s) \quad (2.47)$$

On peut vérifier que la valeur de $\phi_Y(s)$ en $s = 1$ donne bien la valeur 1 : c'est donc bien une densité de probabilité.

La relation donnant les log-cumulants de la variable aléatoire Y connaissant ceux de la variable aléatoire X est alors très simple puisque :

$$\tilde{\kappa}_{Y,r} = (-1)^r \tilde{\kappa}_{X,r} \quad (2.48)$$

7. et l'expérience montre que c'est quasiment toujours le cas

2.4.4 Similitude, facteur d'échelle et loi homothétique

Soit une variable aléatoire X décrite par sa densité de probabilité $p_X(x)$ et sa fonction caractéristique de deuxième espèce $\phi_X(s)$. Considérons une variable aléatoire Y décrite par sa loi de probabilité $p_Y(x)$ et sa fonction caractéristique de deuxième espèce $\phi_Y(s)$, et telle que :

$$Y = \frac{X}{\mu} \quad \mu > 0$$

Grâce à la propriété **TM 1** de la transformée de Mellin (tableau 2.1), on obtient :

$$\mathcal{M}[p_Y](s) = \mu^s \phi_X(s) \quad (2.49)$$

ce qui permet d'écrire directement :

$$p_Y(x) = \frac{1}{\mu} p_X\left(\frac{x}{\mu}\right)$$

d'où la fonction caractéristique de deuxième espèce de $p_Y(x)$:

$$\phi_Y(s) = \mu^{s-1} \phi_X(s) \quad (2.50)$$

Le premier log-moment de la variable aléatoire Y s'obtenant par dérivation logarithmique de $\phi_Y(s)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_{Y,1} &= \left. \frac{d \log(\phi_Y(s))}{ds} \right|_{s=1} \\ &= \left. \frac{d \log(\mu^s)}{ds} \right|_{s=1} + \left. \frac{d \log(\phi_X(s))}{ds} \right|_{s=1} \\ &= \left. \frac{d(s \log(\mu))}{ds} \right|_{s=1} + \left. \frac{d \log(\phi_X(s))}{ds} \right|_{s=1} \\ &= \log(\mu) + \tilde{\kappa}_{X,1} \end{aligned}$$

et il est facile de montrer que :

$$\tilde{\kappa}_{Y,r} = \tilde{\kappa}_{X,r} \quad \forall r \geq 2 \quad (2.51)$$

Cette relation montre que les log-cumulants d'ordres supérieurs à 1 ne dépendent pas d'un facteur d'échelle μ telle que $X = \mu Y$. Elle permet aussi d'affirmer que si les log-cumulants d'ordres supérieurs à 1 dépendent de p paramètres a_1, \dots, a_p , ces paramètres ne dépendent que de la forme de la loi, et non d'une grandeur dépendant d'une valeur moyenne. Cette constatation permettra de définir un diagramme de représentation de lois de probabilité non pas fondé sur des coefficients liés aux moments comme le diagramme de Pearson (paramètres β_1 et β_2) mais fondé sur les log-cumulants $\tilde{\kappa}_2$ et $\tilde{\kappa} - 3$. L'origine de ce diagramme correspond à la loi homothétique : cette loi, qui correspond à un simple gain (changement du paramètre d'échelle), a tous ses log-moments d'ordre supérieur à 2 nuls. Ce nouveau diagramme sera introduit au chapitre 3, paragraphe 3.1.7.

Nous avons vu que la convolution de Mellin possède un élément neutre : le "Dirac-Mellin" (paragraphe 2.1.3). Ce "Dirac-Mellin" va jouer un rôle clé dans la définition de la loi homothétique $\mathcal{H}[\mu](x)$, dont la fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit :

$$\phi_{\mathcal{H}}(s) = \mu^{s-1}$$

L'expression analytique de la loi homothétique est alors :

$$\mathcal{H}[\mu](x) = \frac{1}{\mu} \delta_{\mu}^{\mathcal{M}}(x) \quad (2.52)$$

En analysant la relation 2.50, on remarque que cette expression est un produit de deux fonctions caractéristiques de deuxième espèce : celle du "Dirac-Mellin" et celle de la densité de probabilité $p_X(x)$. Ceci permet d'écrire :

$$p_Y(x) = p_X(x) \hat{\star} \delta_{\mu}^{\mathcal{M}}(x)$$

Ceci a pour conséquence que si une loi $p_Y(x)$ à $P+1$ paramètres dépend d'une variable x sous la forme $\frac{x}{\mu}$, μ étant un des paramètres, alors il existe une loi $p_X(x)$ à P paramètres (c'est à dire tous les paramètres de $p_Y(x)$ autres que μ) telle que :

$$p_X(x) = p_Y|_{\mu=1}(x)$$

et $p_Y(x)$ peut s'écrire :

$$p_Y(x) = p_X(x) \hat{\star} \delta_\mu^{\mathcal{M}}(x) \quad (2.53)$$

Remarquons alors que, puisque la fonction caractéristique de deuxième espèce de $p_Y(x)$ s'écrit :

$$\phi_Y(s) = \mu^{s-1} \phi_X(s)$$

et que $\phi_X(s)$ ne dépend pas de μ , le moment d'ordre r de la loi $p_Y(x)$, m_r , vérifie :

$$m_r \sim \mu^r \quad (2.54)$$

2.4.5 Lois généralisées

Lois généralisées : cas général

Soit une variable aléatoire X décrite par sa densité de probabilité $p_X(x)$ et sa log-fonction caractéristique $\phi_X(s)$. Soit une nouvelle variable aléatoire Y telle que $X = Y^\eta$ décrite par sa densité de probabilité $p_Y(y)$, que l'on notera $p_{X,\eta}(y)$ et sa log-fonction caractéristique $\phi_Y(s)$, que l'on notera $\phi_{X,\eta}(s)$

Puisque l'on a la relation :

$$x = y^\eta \Rightarrow dx = \eta y^{\eta-1} dy$$

Grâce à la propriété **TM 3** de la transformée de Mellin (tableau 2.1), on a alors les relations fondamentales :

$$p_{X,\eta}(y) = |\eta| y^{(\eta-1)} p_X(y^\eta) \quad (2.55)$$

$$\phi_{X,\eta}(s) = \phi_X\left(\frac{s+\eta-1}{\eta}\right) = \phi_X\left(1 + \frac{s-1}{\eta}\right) \quad (2.56)$$

La relation donnant les log-cumulants de la variable aléatoire Y connaissant ceux de la variable aléatoire X est alors très simple puisque :

$$\tilde{\kappa}_{Y,r} = \frac{1}{\eta^r} \tilde{\kappa}_{X,r} \quad (2.57)$$

C'est cette formulation qui semble la plus usitée en imagerie cohérente : la puissance η étant appliquée à la nouvelle variable y pour avoir au final $y^\eta = x$, c'est à dire $y = x^{\frac{1}{\eta}}$. C'est donc cette notation qui sera adoptée dans ce document et il est alors d'usage de parler de "lois généralisées" pour ces lois portant sur une puissance η d'une variable aléatoire.

Cas particulier : les lois "en amplitude"

En posant $\eta = 2$

$$p_A(y) = 2y p(y^2) \quad (2.58)$$

$$\phi_A(s) = \phi\left(1 + \frac{s-1}{2}\right) \quad (2.59)$$

Il est d'usage cependant d'utiliser un paramètre d'échelle (comme μ) adapté à la variable de sorte que l'on fasse apparaître la grandeur $\frac{x}{\mu}$ aussi bien pour la variable X que Y .

La relation donnant les log-cumulants (d'ordre $r \geq 2$) de la variable aléatoire Y connaissant ceux de la variable aléatoire X est alors très simple puisque :

$$\tilde{\kappa}_{Y,r} = \frac{1}{2^r} \tilde{\kappa}_{X,r} \quad (2.60)$$

Cas particulier : les lois “en amplitude” Inverse

En posant $\eta = -2$ dans la relation 2.55 ainsi que dans la relation 2.56, on obtient directement les relations concernant les lois en amplitude inverse :

$$p_{AI}(y) = 2 \frac{1}{y^3} p\left(\frac{1}{y^2}\right) \quad (2.61)$$

$$\phi_{AI}(s) = \phi\left(1 + \frac{1-s}{2}\right) \quad (2.62)$$

On remarque que la loi en amplitude de la loi inverse est la loi inverse de la loi en amplitude puisque l'on a de manière équivalente les deux mécanismes de passage possibles :

$$\begin{aligned} \phi_X(s) \rightarrow \phi_I(s) = \phi_X(2-s) &\rightarrow \phi_{IA}(s) = \phi_I\left(1 + \frac{s-1}{2}\right) = \phi_X\left(2 - \left(1 + \frac{s-1}{2}\right)\right) = \phi_X\left(1 + \frac{1-s}{2}\right) \\ \phi_X(s) \rightarrow \phi_A(s) = \phi_X\left(1 + \frac{s-1}{2}\right) &\rightarrow \phi_{AI}(s) = \phi_A(2-s) = \phi_X\left(2 - \left(1 + \frac{s-1}{2}\right)\right) = \phi_X\left(1 + \frac{1-s}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.63)$$

2.4.6 Changements d'échelle : passage en échelle logarithmique

Lorsque l'on dispose d'une loi définie sur \mathbb{R}^+ , une démarche traditionnelle est de passer en échelle logarithmique, ce qui permet d'avoir alors une loi définie sur \mathbb{R} et de pouvoir éventuellement retrouver des résultats connus.

Considérons donc une variable aléatoire X à densité de probabilité et à valeurs réelles positives. Soit $f_X(v)$ sa ddp, définie pour $v \in \mathbb{R}^+$. Sa fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit :

$$\phi_X(s) = \int_0^{+\infty} v^{s-1} f_X(v) dv.$$

Effectuons un passage en échelle logarithmique. La nouvelle variable aléatoire x est alors décrite par sa ddp $p_x(u)$ définie pour $u \in \mathbb{R}$ avec $u = \log v$. Cette ddp se déduit de f_X par la relation :

$$p_x(u) = e^u f_X(e^u). \quad (2.64)$$

Calculons maintenant la fonction caractéristique de la variable aléatoire x :

$$\begin{aligned} \Phi_x(r) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iru} p_x(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iru} e^u f_X(e^u) du \\ &= \int_0^{+\infty} e^{ir \log v} f_X(v) dv \quad \text{avec } v = e^u \\ &= \int_0^{+\infty} v^{ir} f_X(v) dv \end{aligned}$$

On reconnaît alors dans cette dernière relation la fonction caractéristique de deuxième espèce de $f_X(v)$ en $s = 1 + ir$. D'où la relation :

$$\Phi_x(r) = \phi_X(s)|_{s=1+ir} \quad (2.65)$$

On a ainsi montré qu'il y a un lien direct entre la log-fonction caractéristique d'une densité de probabilité (ddp) définie sur \mathbb{R}^+ et la fonction caractéristique de la ddp définie sur \mathbb{R} et correspondant à un simple changement de variable (passage en échelle logarithmique).

L'expression 2.65 permet d'avoir une relation entre le rôle d'une convolution et celui d'une convolution de Mellin. En effet, si l'on a deux variables aléatoires définies sur \mathbb{R}^+ : X , de ddp f_X , et Y , de ddp f_Y , et

que l'on considère Z , comme le produit de ces deux variables aléatoires, on a les deux relations suivantes permettant de déduire la ddp f_Z de la variable aléatoire Z ainsi que sa log-fonction caractéristique :

$$\begin{aligned} f_Z(v) &= f_X(v) \star f_Y(v) \\ \phi_Z(s) &= \phi_X(s) \phi_Y(s) \end{aligned}$$

Par passage en échelle logarithmique, on en déduit l'expression de la fonction caractéristique de la ddp de la variable z :

$$\phi_z(r) = \phi_x(r) \phi_y(s)$$

ce qui permet de retrouver la relation :

$$f_z(u) = p_x(u) \star p_y(u)$$

c'est à dire que, comme on pouvait s'y attendre, la variable aléatoire z est la somme des deux variables aléatoires x et y .

Connaissant la relation 2.64, on en déduit aisément :

$$[p_x \star p_y](u) = e^u [f_X \hat{\star} f_Y](e^u). \quad (2.66)$$

2.4.7 Moments et modèles mixtes

Dans le cadre de l'estimation des paramètres de la loi \mathcal{K} , Blacknell [10] propose une méthode originale s'appuyant sur l'espérance de la variable $x \log x$. C'est un problème "mixte"⁸, puisque l'espérance de la variable x est le premier moment et que l'espérance de la variable $\log x$ est le premier log-moment.

Le formalisme des log-statistiques permet aisément de calculer cette espérance. En effet, soit une ddp $p(x)$ dont on connaît la fonction caractéristique de deuxième espèce $\phi(s)$. Les propriétés de la transformée de Mellin permettent d'en déduire :

- la transformée de Mellin $\phi_X(s)$ de la fonction⁹ $x p(x)$ qui s'exprime à l'aide de la propriété **TM 2** :

$$\phi_X(s) = \phi(s+1) \quad (2.67)$$

- la transformée de Mellin $\phi_L(s)$ de la fonction $\log x p(x)$ qui s'exprime à l'aide de la propriété **TM 6** :

$$\phi_L(s) = \frac{d\phi(s)}{ds} \quad (2.68)$$

Pour calculer $E(x \log x)$, deux techniques sont alors possibles :

- considérer que c'est le log-moment d'ordre 1 de la fonction $x p(x)$. Puisque ϕ_X est une transformée de Mellin, la propriété **TM 6** permet d'écrire :

$$E(x \log x) = \left. \frac{d\phi_X}{ds} \right|_{s=1} \quad (2.69)$$

- considérer que c'est le moment d'ordre 1 de la fonction $\log(x) p(x)$. Puisque ϕ_L est une transformée de Mellin, on a :

$$E(x \log x) = \phi_L(s)|_{s=2} \quad (2.70)$$

Bien entendu, il est possible de démontrer que, dans la mesure où ces expressions sont définies sur des voisinages adéquats (*i.e.* dans la majorité des cas rencontrés en analyse d'images RSO), les deux expressions sont en fait identiques. Cependant, il est intéressant de voir que dans un cas on estime un moment, et que dans l'autre on estime un log-moment.

En généralisant cette démarche, connaissant $\phi(s)$, on peut ainsi définir :

8. En anglais *mixed model* : comme en théorie des jeux, traduire ce terme par "modèle mixte" relève d'une trop grande hâte à rechercher une traduction exacte et plaisante. Ce serait plutôt "modèle mélangé" qui serait adéquat. En théorie des jeux, le terme "stratégies mélangées" n'est jamais passée dans les habitudes et c'est "stratégies mixtes" qui est la traduction finalement adoptée de *mixed strategies*

9. Il faut parler de fonction car la condition $\int x p(x) dx = 1$ n'est pas nécessairement vérifiée ici.

– les moments mixtes, notés w_n tels que

$$w_n = E(x^n \log x) = \phi_L(s)|_{s=n} \quad \text{avec} \quad \phi_L(s) = \frac{d\phi(s)}{ds} \quad (2.71)$$

– les log-moments mixtes, notés \tilde{w}_n , tels que

$$\tilde{w}_n = E(x(\log x)^n) = \left. \frac{d^n \phi_X}{ds^n} \right|_{s=1} \quad \text{avec} \quad \phi_X(s) = \phi(s+1) \quad (2.72)$$

Remarquons que, par définition, on a :

$$\tilde{w}_1 = w_1.$$

2.5 Bilan : le nouvel héritage des log-statistiques

Le formalisme des log-statistiques s'appuie donc sur la transformée de Mellin, qui, appliquée à $p_X(x)$, densité de probabilité d'une variable définie sur \mathbb{R}^+ , donne par définition la fonction caractéristique de deuxième espèce :

$$\phi_X(s) = \mathcal{M}[p_X](s) = \int_0^\infty x^{s-1} p_X(x) dx$$

Pour un traicteur de données, les propriétés majeures de cette fonction caractéristique de deuxième espèce peuvent se résumer dans les points suivants :

– $p_X(x)$ étant une densité de probabilité, elle vérifie $\int_0^\infty p_X(x) dx = 1$, d'où :

$$\boxed{\phi_X(s)|_{s=1} = 1} \quad (2.73)$$

– L'expression de la fonction caractéristique de deuxième espèce, associée aux tables de transformée de Mellin, permet de déduire les moments d'ordre r : m_r , en posant $s = r + 1$ (ce qui permet de définir les moments non entiers, voire les moments négatifs) :

$$\boxed{m_r = \phi_X(s)|_{s=r+1}} \quad (2.74)$$

– la notion de log-moment d'ordre r s'obtient soit sous une forme permettant des calculs analytiques (relation 2.34), soit sous forme intégrale :

$$\boxed{\tilde{m}_r = \left. \frac{d^r \phi_X(s)}{ds^r} \right|_{s=1} = \int_0^{+\infty} (\log x)^r p_X(x) dx} \quad (2.75)$$

La forme intégrale est transposable aux données discrètes et permet d'estimer ce log-moment (relation 2.42) :

$$\hat{\tilde{m}}_r = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\log(x_n))^r$$

– une combinaison multiplicative des variables aléatoires X et Y , dont les densités de probabilités sont $p_X(u)$ et $p_Y(u)$, se modélise comme un produit de fonctions caractéristiques de deuxième espèce (relation 2.44), et donc une convolution de Mellin des densités de probabilités. On a alors l'équivalent dans le monde multiplicatif de la relation 2.28 :

$$\boxed{Z = X Y \Leftrightarrow \phi_Z(s) = \phi_X(s) \phi_Y(s) \Leftrightarrow p_Z(u) = p_X(u) \hat{\star} p_Y(u)} \quad (2.76)$$

ce qui rend accessible la forme analytique de la densité de probabilité de la variable aléatoire Z par le biais de tables de transformées de Mellin directes et inverses. Cette propriété permet d'écrire une loi additive pour les log-cumulants (relation 2.26) :

$$\boxed{Z = X Y \Leftrightarrow \kappa_{Z,r} = \kappa_{X,r} + \kappa_{Y,r}} \quad (2.77)$$

ainsi qu'une loi multiplicative pour ses moments traditionnels :

$$\boxed{Z = X Y \Leftrightarrow \mu_{Z,r} = m_{X,r} \mu_{Y,r}} \quad (2.78)$$

- un changement de variable par passage à la puissance η (avec $\eta \in \mathbb{R}$) de la variable $y : x \rightarrow y^\eta$ est un cas pour lequel les log-satistiques apportent un éclairage simple. En effet, on a :

$$\boxed{X = Y^\eta \Leftrightarrow \begin{cases} \phi_Y(s) &= \phi_X\left(1 + \frac{s-1}{\eta}\right) \\ \tilde{\kappa}_{Y,r} &= \frac{1}{\eta^r} \tilde{\kappa}_{X,r} \end{cases}} \quad (2.79)$$

- Cette dernière relation permet d'aborder les lois inverses, c'est à dire le changement de variable $x \rightarrow \frac{1}{y}$

$$\boxed{X = \frac{1}{Y} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi_Y(s) &= \phi_X(1 + (1-s)) \\ \tilde{\kappa}_{Y,r} &= (-1)^r \tilde{\kappa}_{X,r} \end{cases}} \quad (2.80)$$

Chapitre 3

Exemples d'application des log-statistiques

Nous allons voir que la quasi totalité des lois de l'imagerie cohérente se déduisent de deux lois fondamentales : la loi Gamma et la loi Beta, que nous allons analyser plus en détail. Les lois qui en découlent par convolution de Mellin ne seront pas étudiées en détails¹, mais feront l'objet de fiches synthétiques au chapitre 4. Pour ces mêmes lois, leurs formes généralisées feront l'objet de fiches au chapitre 5, et leurs formes en amplitude feront l'objet de fiches au chapitre 6.

Grâce aux lois Gamma, Gamma Inverse, Beta et Beta Inverse, nous allons voir qu'en les combinant à l'aide de la convolution de Mellin, il est possible de générer un très grand nombre de lois de probabilités définies sur \mathbb{R}^+ , certaines connues, d'autres inusitées (et donc sans nom actuellement). Cette convolution de Mellin (qui est à la base du *Compound Speckle* de Goodman) est d'autant plus facile à utiliser que ces quatre lois peuvent s'exprimer à l'aide d'une classe de fonctions peu usitées à l'heure actuelle : les fonctions de Meijer (voir [36]) auxquelles les annexes B et C du présent document sont dédiées. Or une de leurs propriétés essentielles est que la convolution de deux fonctions de Meijer s'exprime comme une unique fonction de Meijer : ceci permet une grande rationalisation dans l'univers des densités de probabilité définies sur \mathbb{R}^+ , d'autant plus appréciable que les fonctions de Meijer commencent à être proposées dans un certain nombre de logiciels actuels (en particulier en Python).

C'est pourquoi ce chapitre s'achèvera sur l'utilisation des fonctions de Meijer dans l'univers des lois définies sur \mathbb{R}^+ et l'unification de notation qu'elle apportent : nous verrons enfin que l'on peut définir la notion de "lois de Meijer" regroupant sous une appellation unique la quasi totalité des lois usitées actuellement.

3.1 La loi Gamma et la loi Gamma Inverse

Nous allons dans ce paragraphe analyser une loi incontournable en imagerie cohérente : la loi Gamma. C'est une généralisation de la loi exponentielle décroissante qui modélise les valeurs en intensité d'une image de chatoiement pleinement développé. Sa popularité repose sur une propriété assez exceptionnelle : celle d'additivité, qui sera abordée au paragraphe 3.1.10. Ainsi la somme de deux variables aléatoires suivant la même loi Gamma suit une loi Gamma.

La loi Gamma est introduite dans le Cramér [12] par le biais de la loi du χ^2 , définie à partir d'un jeu de variables indépendantes suivant une loi normale centrée : $(\xi_n, n \in [1, N])$. La variable x vérifiant :

$$x = \sum_{n=1}^N \xi_n^2 \quad (3.1)$$

est un cas particulier de la loi Gamma (voir la relation 3.3).

1. Les calculs fastidieux des différentes grandeurs utiles (moments, log-cumulants, ...) s'obtiennent sans difficultés majeures avec l'aide de logiciel de calcul formel. On peut aussi rechercher dans [35] un certain nombre de ces démonstrations.

Sur cet exemple de la loi Gamma, nous allons appliquer aussi bien les outils des statistiques traditionnelles que ceux des log-statistiques, et analyser les variantes de cette loi liées à des changements de variables.

La fiche synthétique de la loi Gamma est donnée page 96.

3.1.1 Analyse par les statistiques traditionnelles

La loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L]$, est une loi à deux paramètres, μ qui est lié à la valeur moyenne (paramètre d'échelle), et L qui est un paramètre de forme. Sa densité de probabilité s'écrit² :

$$\mathcal{G}[\mu, L](x) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{Lx}{\mu}\right)^{L-1} e^{-\frac{Lx}{\mu}} \quad L > 0 \quad (3.2)$$

C'est une généralisation de la loi exponentielle décroissante puisque

$$\mathcal{G}[\mu, L]|_{L=1}(x) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} = \mathcal{ED}[\mu](x)$$

c'est à dire la loi du chatolement pleinement développé rencontrée au chapitre 1 (expression 1.18).

Un cas particulier est la loi du χ^2 que l'on obtient en posant $L = \frac{N}{2}$ et $\mu = N$:

$$\mathcal{G}\left[\mu = N, L = \frac{N}{2}\right](x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{N}{2}} x^{\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \quad (3.3)$$

expression qui définit justement la loi du χ^2 de paramètre N (voir [12]).

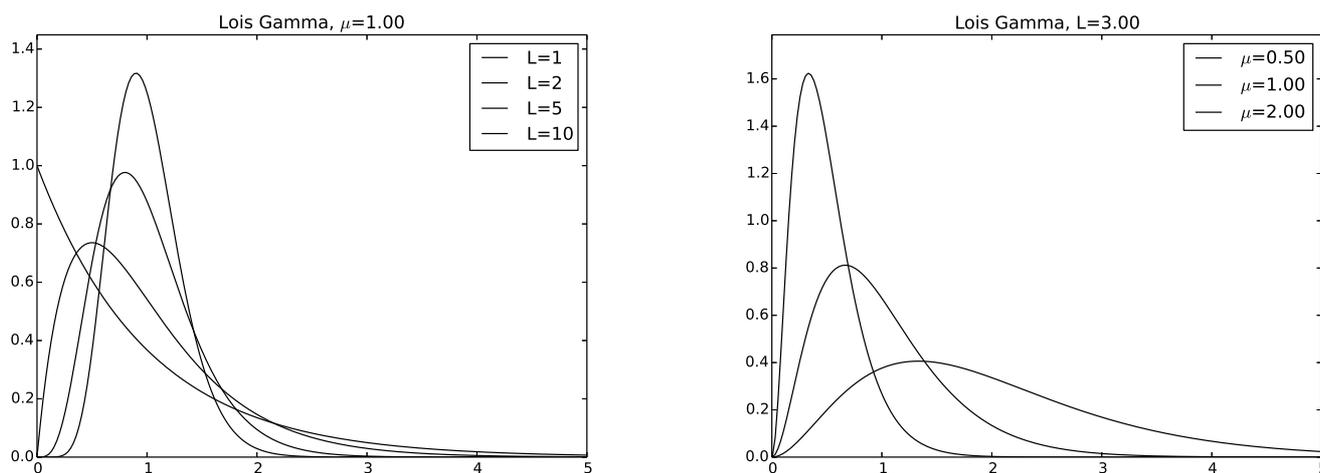


FIGURE 3.1 – Lois Gamma. A gauche : on fixe le paramètre d'échelle μ et on fait varier le paramètre de forme L . A droite : on fait varier le paramètre d'échelle μ et on fixe le paramètre de forme L .

Sa fonction caractéristique (au sens de Fourier) s'écrit³ :

$$\Phi_{\mathcal{G}}(\nu) = \left(\frac{1}{1 - i\frac{\mu}{L}\nu}\right)^L \quad (3.4)$$

qui vérifie bien entendu $\Phi_{\mathcal{G}}(\nu = 0) = 1$. Cette relation sera essentielle pour montrer que la loi Gamma possède la propriété d'additivité (paragraphe 3.1.10).

2. Nous discuterons au chapitre 7 d'une autre paramétrisation.

3. On trouve cette expression en utilisant les tables de transformées de Laplace, [6] par exemple. Attention au signe de ν lié ici à l'utilisation de \mathcal{F}^+ .

Le moment d'ordre r s'obtient en dérivant r fois l'expression 3.4 et en prenant ensuite le cas $\nu = 0$, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{cases} m_1 &= \mu \\ m_2 &= \mu^2 \frac{L+1}{L} \\ m_r &= \mu^r \frac{\Gamma(L+r)}{L^r \Gamma(L)} \end{cases} \quad (3.5)$$

la dernière relation (moment d'ordre r) s'obtenant par une récurrence évidente.

Le cumulatif d'ordre r s'obtient en effectuant r fois la dérivation logarithmique de l'expression 3.4 et en prenant ensuite le cas $\nu = 0$, ce qui permet d'écrire en particulier :

$$\kappa_2 = M_2 = \frac{\mu^2}{L}$$

On obtient ainsi diverses grandeurs utiles dans l'étude de la loi Gamma, comme le coefficient de variation (définition 2.19), ainsi que les coefficients β_1 (définition 2.20) et β_2 (définition 2.21) :

$$\begin{cases} \gamma &= \sqrt{\frac{1}{L}} \\ \beta_1 &= \frac{4}{L} \\ \beta_2 &= 3 + \frac{6}{L} \end{cases} \quad (3.6)$$

Enfin, pour L tendant vers l'infini, on remarque que :

$$\begin{cases} m_1 &= \mu \\ m_2 &= \mu^2 \\ m_r &= \mu^r \end{cases}$$

ce qui revient à dire que la loi Gamma tend asymptotiquement vers la loi homothétique (Dirac en μ), qui peut se voir comme une loi normale dégénérée ($\sigma = 0$) dont le support est réduit à un unique point⁴.

3.1.2 Analyse par les log-statistiques

A partir de l'expression analytique de la loi Gamma (relation 3.2), il est aisé d'en déduire la fonction caractéristique de deuxième espèce. En effet, les tables de transformées de Mellin ([6], [11],[41],...) donnent la relation :

$$\mathcal{M}[e^{-x}](s) = \Gamma(s) \quad \text{Re}(s) > 0$$

Grâce aux propriétés **TM 1** et **TM 2** de la transformée de Mellin (voir la table 2.1), on obtient :

$$\phi_{\mathcal{G}}(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \quad L > 0 : \quad \text{Re}(s) > 1 - L \quad (3.7)$$

qui vérifie bien entendu $\phi_{\mathcal{G}}(s=1) = 1$

Pour des valeurs de s réelles, l'expression 3.7 donne directement les moments d'ordre $r = s - 1$, non nécessairement entiers (moments d'ordre fractionnaires) :

$$m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L+r)}{L^r \Gamma(L)} \quad (3.8)$$

4. Il n'est en effet pas possible qu'une loi définie sur \mathbb{R}^+ puisse converger vers une loi définie sur \mathbb{R} , excepté le cas d'une loi définie seulement en un unique point dans \mathbb{R}^+ . Cependant il est d'usage de dire que la loi Gamma converge vers une loi normale, mais cette manière d'exprimer la réalité est trop imprécise car il faudrait préciser que c'est une loi normale dégénérée.

ce qui généralise l'expression traditionnelle 3.5.

Le log-cumulant d'ordre r s'obtient en dérivant logarithmiquement r fois l'expression 3.7 et en prenant ensuite le cas $s = 1$, ce qui donne :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 &= \log(\mu) + \Psi(L) - \log(L) \\ \tilde{\kappa}_2 &= \Psi(1, L) \\ \tilde{\kappa}_r &= \Psi(r-1, L) \quad r > 2 \end{cases} \quad (3.9)$$

3.1.3 Loi Gamma et loi Gamma Inverse

Nous avons vu au paragraphe 2.4.3 la définition et les propriétés des lois inverses. Appliqué à la loi Gamma, on en déduit un formalisme de la loi Gamma Inverse :

$$\mathcal{GI}[\mu, M](x) = \frac{1}{\Gamma(M)} \frac{1}{M\mu} \left(\frac{M\mu}{x}\right)^{M+1} e^{-\frac{M\mu}{x}} \quad M > 0 \quad (3.10)$$

Cette expression a la propriété d'avoir le paramètre μ lié à la moyenne sous la forme $\frac{x}{\mu}$. La fiche de la loi Gamma Inverse est donnée page 98.

La fonction caractéristique de deuxième espèce s'obtient grâce à la relation 3.7 et à la propriété 2.47, ce qui permet d'écrire directement l'expression :

$$\phi_{\mathcal{GI}}(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s} \Gamma(M)} \quad (3.11)$$

dont on déduit les moments :

$$\begin{cases} m_1 &= \mu \frac{M}{M-1} & M > 1 \\ m_2 &= \mu^2 \frac{M^2}{(M-1)(M-2)} & M > 2 \\ m_r &= \mu^r \frac{\Gamma(M-r)}{M^{-r} \Gamma(M)} & r < M \end{cases}$$

De la même manière, on obtient les log-cumulants de la loi Gamma Inverse, grâce aux relations 3.9 et de la propriété 2.48 :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 &= \log(\mu) - (\Psi(L) - \log(L)) \\ \tilde{\kappa}_2 &= \Psi(1, L) \\ \tilde{\kappa}_r &= (-1)^r \Psi(r-1, L) \quad r > 2 \end{cases} \quad (3.12)$$

3.1.4 La loi Gamma Généralisée

Au paragraphe 2.4.5, nous avons vu comment passer de la loi suivie par une variable x à la loi suivie par la loi Y telle que $X = Y^\eta$.

Appliquer cette approche à la loi Gamma –dont on connaît l'expression de la densité de probabilité, celle de la fonction caractéristique de deuxième espèce et les expressions des log-cumulants– permet de définir la loi Gamma Généralisée $\mathcal{GG}[\mu, L, \eta]$ (avec l'adaptation requise pour le paramètre d'échelle μ) :

– La propriété 2.55 permet d'écrire la densité de probabilité de la loi Gamma Généralisée :

$$\mathcal{GG}[\mu, L, \eta](x) = \frac{|\eta|}{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{\Gamma(L)} \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu}\right)^{\eta L - 1} e^{-\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu}\right)^\eta} \quad L > 0 \quad (3.13)$$

– Connaissant l'expression de la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi Gamma (relation 3.7), la propriété 2.56 donne la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi Gamma Généralisée :

$$\phi_{\mathcal{GG}}(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma\left(L + \frac{s-1}{\eta}\right)}{L^{\frac{s-1}{\eta}} \Gamma(L)} \quad (3.14)$$

dont on déduit les moments :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = \mu \frac{\Gamma(L+\frac{1}{\eta})}{L^{\frac{1}{\eta}} \Gamma(L)} \quad \eta > 0 \text{ ou } L > -\frac{1}{\eta} \\ m_2 = \mu^2 \frac{\Gamma(L+\frac{2}{\eta})}{L^{\frac{2}{\eta}} \Gamma(L)} \quad \eta > 0 \text{ ou } L > -\frac{2}{\eta} \\ m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L+\frac{r}{\eta})}{L^{\frac{r}{\eta}} \Gamma(L)} \quad \left\{ \begin{array}{l} r > -\eta L \text{ si } \eta > 0 \\ r < -\eta L \text{ si } \eta < 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.15)$$

– Enfin la propriété 2.57 permet d'écrire directement les log-cumulants de la loi Gamma Généralisée connaissant ceux de la loi Gamma (relation 3.9) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\kappa}_1 = \log \mu + \frac{\Psi(L) - \log(L)}{\eta} \\ \tilde{\kappa}_2 = \frac{\Psi(1, L)}{\eta^2} \\ \tilde{\kappa}_r = \frac{\Psi(r-1, L)}{\eta^r} \end{array} \right. \quad (3.16)$$

On peut remarquer que le cas $\eta = 1$ redonne bien évidemment les relations spécifiques à la loi Gamma et que le cas $\eta = -1$ redonne bien évidemment les relations spécifiques à la loi Gamma Inverse.

La fiche de la loi Gamma Généralisée est donnée page 136.

3.1.5 Passage en amplitude : la loi de Nakagami

A partir de la loi Gamma Généralisée et en posant $\eta = 2$ dans l'expression de la loi de probabilité (équation 3.13), on obtient la loi de Nakagami :

$$\mathcal{RN}[\mu, L](x) = \frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{L}}{\Gamma(L)} \left(\frac{\sqrt{L}x}{\mu} \right)^{2L-1} e^{-\left(\frac{\sqrt{L}x}{\mu}\right)^2}$$

le cas $L = 1$ correspondant à la loi de Rayleigh que suit le chatoisement pleinement développé. Sa fonction caractéristique de deuxième espèce se déduit de la relation 3.14 :

$$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L + \frac{s-1}{2})}{L^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(L)}$$

d'où l'on déduit les moments :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = \mu \frac{\Gamma(L+\frac{1}{2})}{\sqrt{L} \Gamma(L)} \\ m_2 = \mu^2 \\ m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L+\frac{r}{2})}{L^{\frac{r}{2}} \Gamma(L)} \quad r > -2L \end{array} \right.$$

Enfin les log-cumulants s'obtiennent directement de la relation 3.16

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\kappa}_1 = \log \mu + \frac{1}{2} (\Psi(L) - \log(L)) \\ \tilde{\kappa}_2 = \frac{1}{4} \Psi(1, L) \\ \tilde{\kappa}_r = \frac{1}{2^r} \Psi(r-1, L) \end{array} \right.$$

La fiche de la loi de Nakagami est donnée page 150 et celle de la loi de Nakagami Inverse, page 152.

3.1.6 Loi Gamma et loi Gamma Inverse dans le diagramme $\beta_1 - \beta_2$

Pearson [24] a défini un système de lois, appelé système de Pearson, et, grâce à l'utilisation des coefficients β_1 (asymétrie, relation 2.20) et β_2 (aplatissement, relation 2.21), il les a caractérisées dans un diagramme, appelé "diagramme $\beta_1 - \beta_2$ ", dans lequel chaque classe de densité de probabilité peut

être représentée, soit par un unique point (c'est le cas de la loi normale), soit par une courbe (c'est généralement le cas des lois à deux paramètres comme la loi Gamma), soit par une région délimitée par deux courbes (c'est généralement le cas des lois à trois paramètres comme la loi de Fisher). Cette représentation place le coefficient β_1 en abscisse et le coefficient β_2 en ordonnée (en retournant l'axe qui pointe vers le bas pour les grandes valeurs de β_2).

Dans ce diagramme, toutes les lois normales occupent la position (0,3). Notons que l'on démontre qu'aucune loi ne se positionne au dessus d'une droite d'origine (0,1) et de pente $\frac{3}{2}$ (on parle de zone interdite).

Puisque, dans le cas de la loi Gamma, nous avons vu que (relations 3.6)

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{4}{L} \\ \beta_2 &= 3 + \frac{6}{L}\end{aligned}$$

on en déduit que, dans le diagramme $\beta_1 - \beta_2$, les lois Gamma sont représentées par la droite d'origine (0,3) –c'est à dire le point correspondant à toutes les lois normales⁵– et de pente $\frac{3}{2}$. Notons que pour L tendant vers l'infini, on note que les lois Gamma se localisent en (0,3), position de toutes les lois normales : nous avons vu en effet que la loi Gamma tend asymptotiquement vers la loi homothétique, qui est une loi normale dégénérée ($\sigma = 0$).

De même pour la loi Gamma Inverse, il est facile de montrer que :

$$\begin{aligned}\beta_1 &= 16 \frac{L-2}{(L-3)^2} \\ \beta_2 &= 3 \frac{(L+5)(L-2)}{(L-3)(L-4)}\end{aligned}$$

ce qui montre que la loi Gamma Inverse est représentée par un morceau de parabole d'origine (0,3) (la pente à l'origine est $\frac{15}{8}$).

Il faut noter que seules les lois Gamma Inverse telles que $L > 4$ sont représentables dans ce diagramme, ce qui illustre le fait que ce diagramme n'est pas adapté pour l'étude des lois à queue lourde.

La zone entre les courbes spécifiques à la loi Gamma et à la loi Gamma Inverse correspond aux lois de Fisher.

3.1.7 Loi Gamma et loi Gamma Inverse dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$

Puisque les diagrammes faisant intervenir des moments jusqu'à l'ordre 4 permettent une classification des densités de probabilité, il était tentant de mener une démarche identique dans le monde des log-statistiques. En choisissant les log-cumulants d'ordre 2 et 3, on se dote ainsi d'une nouvelle représentation des densités de probabilités dans laquelle on peut tirer partie de la propriété d'additivité des log-cumulants lorsque les lois opèrent de manière multiplicative (c'est à dire par convolution de Mellin).

L'origine du diagramme correspond à la loi homothétique, c'est à dire la loi faisant correspondre à la valeur x une nouvelle valeur αx (ce qui représente un simple gain).

Puisque les log-cumulants d'ordre 2 sont positifs ou nuls, on va définir le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ comme le demi plan $\tilde{\kappa}_2 \geq 0$ avec en abscisse le log-cumulant d'ordre 3 et en ordonnée le log-cumulant d'ordre 2.

Dans ce diagramme, la loi Gamma est représentée par une branche "à gauche" (valeurs négatives du log-cumulant d'ordre 3) puisque l'on a (relations 3.9) :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_2 = \Psi(1, L) > 0 \\ \tilde{\kappa}_3 = \Psi(2, L) < 0 \end{cases}$$

Le fait que le log-cumulant d'ordre 3 soit négatif reflète un caractère "tête lourde" de cette loi, très marqué pour $L \in]0, 1]$ puisque dans ces cas le mode est à l'origine.

5. et donc en particulier la loi normale dégénérée $\sigma \rightarrow 0$ qui est la loi homothétique.

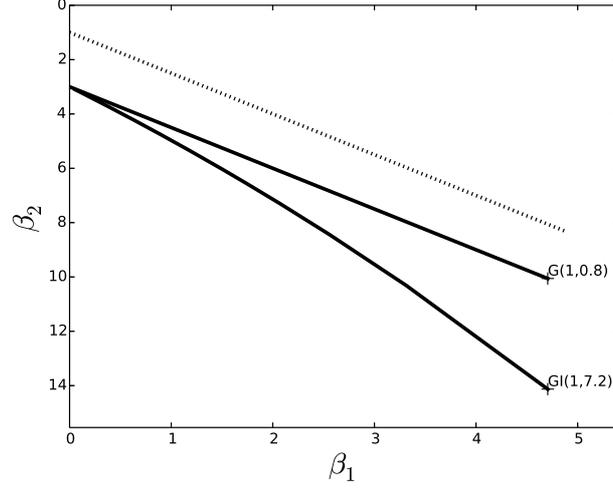


FIGURE 3.2 – Lois Gamma (branche supérieure) et Gamma Inverse (branche inférieure) dans le diagramme $\beta_1 - \beta_2$. La courbe en pointillé représente la limite supérieure des lois dans ce diagramme (au dessus, la zone est dite interdite). Pour des valeurs de L grandes, lois Gamma et Gamma Inverse convergent vers le point $(0,3)$, c’est à dire vers une loi normale. Les lois Gamma ($L = 0.8$) et Gamma Inverse ($M = 7.2$) marquent les extrémités des représentations des deux branches en leur bord droit.

La loi Gamma Inverse est représentée par une branche “à droite” (valeurs positives du log-cumulant d’ordre 3) puisque l’on a :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_2 = \Psi(1, L) > 0 \\ \tilde{\kappa}_3 = -\Psi(2, L) > 0 \end{cases}$$

Le fait que le log-cumulant d’ordre 3 soit positif reflète un caractère “queue lourde” de cette loi d’autant plus marquée que M est petit (rappelons que cette loi ne possède que ses moments d’ordre $r < M$).

Comme dans le cas du diagramme $\beta_1 - \beta_2$, la zone entre les courbes spécifiques à la loi Gamma et à la loi Gamma Inverse correspond aux lois de Fisher.

Soulignons enfin que tout point du demi espace $\tilde{\kappa}_2 > 0$ est censé représenter une lois de probabilité (existence), mais que la loi représentée par ce point de ce demi-espace n’est pas unique.

3.1.8 Estimation des paramètres de la loi Gamma

Deux méthodes peuvent être appliquées à l’estimation des paramètres de la loi Gamma :

- En inversant le système des deux premiers moments (relation 3.5) :

$$\begin{aligned} m_1 &= \mu \\ m_2 &= \mu^2 \frac{L+1}{L} \end{aligned}$$

on obtient analytiquement les valeurs de μ et L :

$$\begin{aligned} \mu &= m_1 \\ L &= \frac{m_1^2}{m_2 - m_1^2} \end{aligned}$$

- En inversant le système des deux premiers log-cumulants (relation 3.9) :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_1 &= \log(\mu) + \Psi(L) - \log(L) \\ \tilde{\kappa}_2 &= \Psi(1, L) \end{aligned}$$

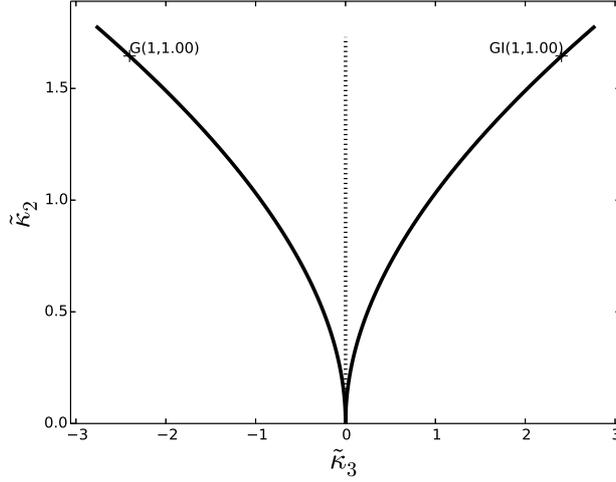


FIGURE 3.3 – Lois Gamma (courbe à gauche) et Gamma Inverse (courbe à droite) dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$. La courbe en pointillé représente la loi log-normale. Pour des valeurs de L grandes, lois Gamma et Gamma Inverse convergent vers l'origine, c'est à dire la loi homothétique. Les lois Gamma ($L = 1.0$) et Gamma Inverse ($M = 1.0$) marquent les extrémités des représentations des deux branches en leur bord supérieur.

et en notant $\Psi^{-1}(1, x)$ la fonction inverse de $\Psi(1, x)$, on a :

$$L = \Psi^{-1}(1, \tilde{\kappa}_2)$$

d'où, connaissant L :

$$\mu = e^{\tilde{\kappa}_1 - \Psi(L) + \log(L)}$$

La mise en œuvre de cette méthode requiert la connaissance de la fonction $\Psi^{-1}(1, x)$, dont les propriétés sont très simples (puisque les fonctions Polygamma sont strictement monotones) mais qui n'a pas d'existence théorique. Cependant, des approximations numériques sont très aisées à définir [40].

3.1.9 Loi Gamma et convolution de Mellin

L'expression de la seconde fonction caractéristique de la loi Gamma montre que sa dépendance en la variable s se fait en particulier par le biais d'une fonction Gamma :

$$\phi_G(s) \propto \Gamma(L + s - 1)$$

De même pour l'expression de la seconde fonction caractéristique de la loi Gamma Inverse qui donne la relation :

$$\phi_{GI}(s) \propto \Gamma(M + 1 - s)$$

En généralisant la notion de *Compound Speckle* à la combinaison multiplicative de P lois Gamma de paramètres $L_p, p \in [1, P]$ et de Q lois Gamma Inverse de paramètres $M_q, q \in [1, Q]$, la propriété de produit des fonctions caractéristiques de deuxième espèce mène à une fonction caractéristique de deuxième espèce de la forme :

$$\prod_{p=1}^P \Gamma(L_p + s - 1) \prod_{q=1}^Q \Gamma(M_q + 1 - s)$$

Les tables de transformées de Mellin Inverse permettent alors de traiter sans autre calcul que ceux liés aux propriétés de la transformée de Mellin quelques cas particuliers de lois à 3 ou 4 variables (c'est

à dire les cas $P \leq 2$ et $Q \leq 2$) pour lesquels on a en général la forme analytique de la transformée de Mellin inverse.

On a ainsi pour les lois à 3 paramètres ($P + Q = 2$) les cas suivants :

– $P = 2$ et $Q = 0$. La forme de la fonction caractéristique de deuxième espèce s'exprime comme :

$$\propto \Gamma(L + s - 1) \Gamma(M + s - 1)$$

On obtient alors la loi \mathcal{K} déjà rencontrée dans le *Compound Speckle* de Goodman, ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{G}[\mu = 1, M] &= \mathcal{K}[\mu, L, M] \\ &= \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{2LM}{\mu} \left(\frac{LMx}{\mu}\right)^{\frac{M+L}{2}-1} K_{M-L} \left[2 \left(\frac{LMx}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad L > 0, M > 0 \end{aligned}$$

La fiche de la loi \mathcal{K} est donnée page 102.

– $P = 0$ et $Q = 2$. La forme de la fonction caractéristique de deuxième espèce s'exprime comme :

$$\propto \Gamma(L + 1 - s) \Gamma(M + 1 - s)$$

On obtient alors la loi \mathcal{K} Inverse :

$$\begin{aligned} \mathcal{GI}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[\mu = 1, M] &= \mathcal{KI}[\mu, L, M] \\ &= \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{2}{LM\mu} \left(\frac{LM\mu}{x}\right)^{\frac{M+L}{2}+1} K_{M-L} \left[2 \left(\frac{LM\mu}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad L > 0, M > 0 \end{aligned}$$

La fiche de la loi \mathcal{KI} est donnée page 104.

– $P = 1$ et $Q = 1$. La forme de la fonction caractéristique de deuxième espèce s'exprime comme :

$$\propto \Gamma(L + s - 1) \Gamma(s + 1 - M)$$

On obtient la loi de Fisher, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[\mu = 1, M] &= \mathcal{F}[\mu, L, M] \\ &= \frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{\left(\frac{Lx}{M\mu}\right)^{L-1}}{\left(1 + \frac{Lx}{M\mu}\right)^{L+M}} \quad L > 0, M > 0 \quad (3.17) \end{aligned}$$

La fiche de la loi de Fisher est donnée page 106.

On la connaît aussi sous le nom de “loi Pearson VI” ainsi que “loi Beta Prime”. Le cas particulier $L = M = 1/2$ est la loi de Hotelling.

Notons qu'elle est introduite dans le Cramér [12] à partir de deux jeux de variables indépendantes suivant une loi normale centrée : $(\xi_i, i \in [1, L])$ et $(\eta_j, j \in [1, M])$. La variable x vérifiant :

$$x = \frac{\sum_{i=1}^L \xi_i^2}{\sum_{j=1}^M \eta_j^2} \quad (3.18)$$

permet la définition de la loi de Fisher (Cramér parle plus précisément de “loi Z de Fisher”).

L'étude de ce cas ($P + Q = 2$) peut se résumer dans le tableau 3.1 (gauche).

De même on a pour les lois à 4 paramètres ($P + Q = 3$) les cas suivants :

$\hat{\star}$	\mathcal{G}	\mathcal{GI}
\mathcal{G}	\mathcal{K}	\mathcal{F}
\mathcal{GI}	\mathcal{F}	\mathcal{KI}

$\hat{\star}$	\mathcal{G}	\mathcal{GI}
\mathcal{K}	\mathcal{Q}_{SK}	\mathcal{Q}_U
\mathcal{KI}	\mathcal{Q}_{UI}	\mathcal{Q}_{SKI}
\mathcal{F}	\mathcal{Q}_U	\mathcal{Q}_{UI}

TABLE 3.1 – Résultats de convolutions de Mellin entre loi Gamma et loi Gamma Inverse. On rappelle que la convolution de Mellin est commutative, ce qui simplifie d'autant ces tableaux.

- $P = 2$ et $Q = 1$. La forme de la fonction caractéristique de deuxième espèce s'exprime comme :

$$\propto \Gamma(L + s - 1) \Gamma(M + s - 1) \Gamma(s + 1 - N)$$

On obtient la loi U (proposée par Delignon, [13]) :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{G}[\mu = 1, M] \hat{\star} \mathcal{GI}[\mu = 1, N] \\ &= \mathcal{Q}_U[\mu, L, M, N] \\ &= \frac{LM}{N\mu} \frac{\Gamma(L+N)\Gamma(M+N)}{\Gamma(M)\Gamma(N)\Gamma(L)} \left(\frac{LMx}{N\mu}\right)^{\frac{L+M-3}{2}} e^{\frac{LMx}{2N\mu}} W_{\frac{1-L-M-2N}{2}, \frac{L-M}{2}} \left(\frac{LMx}{N\mu}\right) \end{aligned}$$

W étant la fonction de Whittaker (voir annexe A.3.3). Notons que Delignon utilise un formalisme fondé sur la fonction U (la fonction Ψ de Tricomi, voir l'annexe A.3.1) et a donc utilisé cette lettre U pour désigner cette classe de loi dans son système KUBW⁶. Dans ce document, pour éviter d'utiliser trop de notations ésotériques, nous avons ramené la loi U sous forme de fonction de Whittaker grâce à l'identité A.33 de l'annexe A.3.3 dédiée aux fonctions de Whittaker⁷.

La fiche de la loi U est donnée page 118.

Remarquons que la loi U peut se décomposer de deux autres manières (voir le tableau 3.1), ce qui donne au final :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_U[\mu, L, M, N] &= \mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{G}[\mu = 1, M] \hat{\star} \mathcal{GI}[\mu = 1, N] \\ &= \mathcal{F}[\mu, L, N] \hat{\star} \mathcal{G}[\mu = 1, M] \\ &= \mathcal{F}[\mu, M, N] \hat{\star} \mathcal{G}[\mu = 1, L] \\ &= \mathcal{K}[\mu, L, M] \hat{\star} \mathcal{GI}[\mu = 1, N] \end{aligned}$$

- $P = 1$ et $Q = 2$. La forme de la fonction caractéristique de deuxième espèce s'exprime comme :

$$\propto \Gamma(L + 1 - s) \Gamma(M + 1 - s) \Gamma(N + s - 1)$$

On obtient la loi U inverse :

$$\begin{aligned} \mathcal{GI}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[\mu = 1, M] \hat{\star} \mathcal{G}[\mu = 1, N] \\ &= \mathcal{Q}_{UI}[\mu, L, M, N] \\ &= \frac{N}{LM\mu} \frac{\Gamma(L+N)\Gamma(M+N)}{\Gamma(M)\Gamma(N)\Gamma(L)} \left(\frac{LM\mu}{Nx}\right)^{\frac{L+M-3}{2}+2} e^{\frac{LM\mu}{2Nx}} W_{\frac{1-L-M-2N}{2}, \frac{L-M}{2}} \left(\frac{LM\mu}{Nx}\right) \end{aligned}$$

W étant la fonction de Whittaker (voir annexe A.3.3).

La fiche de la loi U Inverse est donnée page 120.

Remarquons que la loi U Inverse peut se décomposer de deux autres manières (voir le tableau 3.1), ce qui donne au final :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{UI}[\mu, L, M, N] &= \mathcal{GI}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[\mu = 1, M] \hat{\star} \mathcal{G}[\mu = 1, N] \\ &= \mathcal{KI}[\mu, L, M] \hat{\star} \mathcal{G}[\mu = 1, N] \\ &= \mathcal{F}[\mu, N, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[\mu = 1, M] \\ &= \mathcal{F}[\mu, N, M] \hat{\star} \mathcal{GI}[\mu = 1, L] \end{aligned}$$

6. K pour la loi K, B pour la loi Beta, U pour cette combinaison et W pour une construction fondée sur la loi Beta (paragraphe 3.2.6)

7. On aurait pu aussi tout passer dans un formalisme ne faisant intervenir que des fonctions hypergéométriques grâce à la relation A.34 qui permet d'écrire une fonction de Whittaker comme une fonction hypergéométrique, mais cela faisait perdre le lien avec l'appellation "W" de Delignon.

- $P = 3$ et $Q = 0$. La forme de la fonction caractéristique de deuxième espèce s'exprime comme :

$$\propto \Gamma(L + s - 1) \Gamma(M + s - 1) \Gamma(N + s - 1)$$

On obtient la loi baptisée dans ce document “Super-K”, qui n'a pas de forme analytique (hormis sous forme de fonction de Meijer) :

$$\mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{G}[\mu = 1, M] \hat{\star} \mathcal{G}[\mu = 1, N] = \mathcal{Q}_{SK}[\mu, L, M, N]$$

La fiche de la loi “Super-K” est donnée page 114

- $P = 0$ et $Q = 3$. La forme de la fonction caractéristique de deuxième espèce s'exprime comme :

$$\propto \Gamma(L + 1 - s) \Gamma(M + 1 - s) \Gamma(N + 1 - s)$$

On obtient la loi baptisée dans ce document “Super-K” Inverse, qui n'a pas de forme analytique (hormis sous forme de fonction de Meijer) :

$$\mathcal{GI}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[\mu = 1, M] \hat{\star} \mathcal{GI}[\mu = 1, N] = \mathcal{Q}_{SKI}[\mu, L, M, N]$$

La fiche de la loi “Super-K” Inverse est donnée page 116

L'étude de ce cas ($P + Q = 3$) peut se résumer dans le tableau 3.1 (droit).

3.1.10 La loi Gamma et sa propriété d'additivité

La loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L]$ joue un rôle prédominant en traitement d'images cohérentes car elle possède une propriété très particulière puisqu'elle vérifie le théorème d'addition et possède donc la propriété d'additivité.

Nous avons vu que sa fonction caractéristique (au sens de Fourier) s'écrit (en adaptant la relation 3.4 pour spécifier les paramètres μ et L) :

$$\Phi_x[\mu, L](\nu) = \left(\frac{1}{1 - i \frac{\mu}{L} \nu} \right)^L$$

Si nous voulons établir la fonction caractéristique correspondant à la moyenne arithmétique de N variables aléatoires suivant cette loi Gamma, il faut :

- prendre N lois Gamma $\mathcal{G}\left[\frac{\mu}{N}, L\right]$, dont les fonctions caractéristiques s'écrivent :

$$\Phi_x\left[\frac{\mu}{N}, L\right](\nu) = \left(\frac{1}{1 - i \frac{\mu}{NL} \nu} \right)^L$$

le choix μ/N impliquant que l'espérance du résultat de l'opération moyenne ait la même valeur que l'espérance de la loi initiale.

- prendre le produit de N de ces fonctions caractéristiques :

$$\prod_N \left[\left(\frac{1}{1 - i \frac{\mu}{NL} \nu} \right)^L \right] = \left(\frac{1}{1 - i \frac{\mu}{NL} \nu} \right)^{NL}$$

On reconnaît la fonction caractéristique de la loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, LN]$. Donc la loi suivie par la somme de N variables aléatoires suivant une même loi Gamma est aussi une loi Gamma, ce qui démontre que la loi Gamma suit le théorème d'addition⁸.

On peut noter que le cas particulier $L = 1$ permet de démontrer qu'une variable aléatoire suivant la loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, N]$ avec N entier est en fait la moyenne de N variables aléatoires suivant une loi exponentielle décroissante de paramètre μ .

Cette propriété ne peut s'étendre à une puissance de la variable x . Par exemple, si une grandeur suit une loi de Nakagami (variable en amplitude : le carré de cette variable, c'est à dire l'intensité, suit alors une loi Gamma), il est bien connu que la somme de N variables ne suivra pas une loi de Nakagami.

8. Propriété assez rare que la loi Gamma partage avec la loi binomiale, la loi de Poisson et la loi normale [12].

3.2 La loi Beta

C'est une loi à trois paramètres (un paramètre d'échelle, μ , et deux paramètres de forme L et M). Peut être que la propriété essentielle de la loi Beta, et qui fait au passage son succès, est le fait qu'elle est définie sur un support borné de \mathbb{R}^+ : $\left[0, \frac{M\mu}{L}\right]$. Notons que les usages de cette loi sont effectivement très variés (en particulier son utilisation en gestion de projet avec le très célèbre diagramme PERT⁹

On la connaît aussi sous le nom de "loi Pearson I".

Elle est introduite dans le Cramér [12] à partir de deux jeux de variables indépendantes suivant une loi normale centrée : $(\xi_i, i \in [1, L])$ et $(\eta_j, j \in [1, M])$. La variable x vérifiant :

$$x = \frac{\sum_{i=1}^L \xi_i^2}{\sum_{i=1}^L \xi_i^2 + \sum_{j=1}^M \eta_j^2} \quad (3.19)$$

permet la définition de la loi Beta.

La fiche synthétique de la loi Beta est donnée page 108.

3.2.1 Définition et propriétés

L'expression de la loi Beta est donnée par :

$$\mathcal{B}[\mu, L, M](x) = \frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \left(\frac{Lx}{M\mu}\right)^{L-1} \left(1 - \frac{Lx}{M\mu}\right)^{M-L-1} \quad x \in \left[0; \frac{M\mu}{L}\right] \quad L < M \quad (3.20)$$

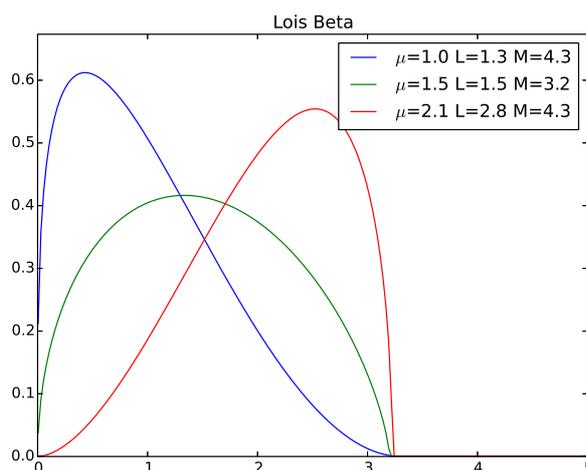


FIGURE 3.4 – Lois Beta monomodes (vérifiant les conditions $L > 1$ et $M > 2$). La position du mode dépend des deux paramètres de forme L et M .

Les tables de transformée de Mellin permettent d'exprimer sans problème sa fonction caractéristique de deuxième espèce puisque l'on trouve ([6]) :

$$\mathcal{M} \left[(1-x)^{\nu-1} \right] (s) = \Gamma(\nu) \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+\nu)} \quad 0 < x < 1$$

ce qui permet d'obtenir la relation suivante :

$$\phi_{\mathcal{B}}(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \frac{M^{s-1} \Gamma(M)}{\Gamma(M+s-1)} \quad (3.21)$$

9. *Program Evaluation and Review Technique*, méthode conventionnelle utilisable en gestion de projet, ordonnancement et planification, ainsi qu'en génétique.

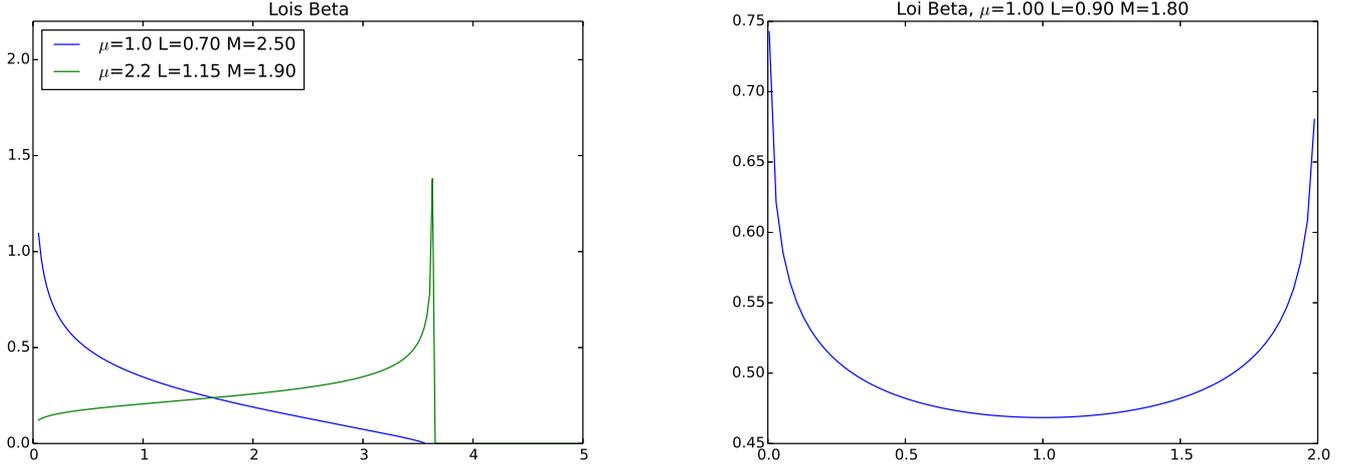


FIGURE 3.5 – Lois Beta. A gauche : deux exemples des cas particuliers $\{L < 1, M > 2\}$ (le mode est en 0) et $\{L > 1, M \leq 2\}$ (le mode est en $\frac{M\mu}{L}$). A droite : un exemple de loi Beta bimode (vérifiant la condition $L < 1$ et $M \leq 2$).

ainsi que l'expression des moments (au sens traditionnels) :

$$\begin{cases} m_1 = \mu \\ m_2 = \mu^2 \frac{L+1}{L} \frac{M}{M+1} \\ m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L+r)}{L^r \Gamma(L)} \frac{M^r \Gamma(M)}{\Gamma(M+r)} \quad r > -L \end{cases} \quad (3.22)$$

Les log-cumulants s'écrivent :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \log \mu + (\Psi(L) - \log L) - (\Psi(M) - \log M) \\ \tilde{\kappa}_2 = \Psi(1, L) - \Psi(1, M) \\ \tilde{\kappa}_r = \Psi(r-1, L) - \Psi(r-1, M) \end{cases} \quad (3.23)$$

ce qui permet de montrer que le cas limite de la loi Beta pour $M \rightarrow \infty$ est la loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L]$.

L'étude du mode de la loi Beta montre plusieurs cas possibles :

$$\begin{cases} \frac{(L-1)M}{L(M-2)} \mu & 1 < L < M & M > 2 \\ \frac{M}{L} \mu & 1 < L < M & M \leq 2 \\ 0 & L < 1 & M > 2 \\ \text{bimode} & L < 1, L < M & M \leq 2 \end{cases} \in \left] 0; \frac{M\mu}{L} \right[$$

ces différents cas sont illustrés figures 3.4 (cas monomode) et 3.5 (cas bimode : la loi a une forme de U).

La fiche de la loi est donnée page 108.

Il n'est pas possible de définir la loi Beta par convolution de Mellin de loi Gamma et de loi Gamma Inverse. En revanche, on peut écrire une relation fondamentale permettant de définir la loi Beta¹⁰ :

$$\mathcal{G}[\mu, L] = \mathcal{B}[\mu, L, M](x) \hat{\star} \mathcal{G}[\mu = 1, M] \quad (3.24)$$

Notons pour finir que cette loi a un comportement très particulier pour $M = L + 1$ puisque l'on a alors :

$$\mathcal{B}[\mu, L, L+1](x) = \frac{L^2}{(L+1)\mu} \left(\frac{Lx}{(L+1)\mu} \right)^{L-1} \quad x \in \left[0; \frac{(L+1)\mu}{L} \right]$$

On trouve ainsi comme cas particulier :

10. sans garantir l'unicité des fonctions issues de cette expression

- la fonction créneau, c'est à dire la loi uniforme pour $L = 1$ et $M = 2$
- la fonction polynome de degré 1 pour $L = 2$ et $M = 3$
- la fonction polynome de degré n pour $L = n + 1$ et $M = n + 2$

3.2.2 La loi Beta Inverse

Bien que pratiquement inusitée (et très curieusement ignorée des grands ouvrages classiques, comme [12, 46]), la loi Beta Inverse se déduit directement de l'expression de la loi Beta et de la définition et des propriétés des lois inverses (paragraphe 2.4.3). On a :

$$\mathcal{BI}[\mu, L, M](x) = \frac{M}{L\mu} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \frac{\left(\frac{Mx}{L\mu} - 1\right)^{M-L-1}}{\left(\frac{Mx}{L\mu}\right)^M} \quad x \in \left[\frac{L\mu}{M}; \infty\right[\quad L < M$$

Sa fonction caractéristique de deuxième espèce se déduit de celle de la loi Beta (relation 3.21), ce qui permet d'écrire

$$\phi_{\mathcal{BI}}(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+1-s)}{L^{1-s} \Gamma(L)} \frac{M^{1-s} \Gamma(M)}{\Gamma(M+1-s)} \quad (3.25)$$

d'où on déduit les log-cumulants :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 &= \log \mu - (\Psi(L) - \log(L)) + (\Psi(M) - \log(M)) \\ \tilde{\kappa}_2 &= \Psi(1, L) - \Psi(1, M) \\ \tilde{\kappa}_r &= (-1)^r (\Psi(r-1, L) - \Psi(r-1, M)) \end{cases} \quad (3.26)$$

L'étude du mode de la loi Beta Inverse montre deux cas de figure possibles :

$$\begin{cases} \frac{L}{L+1} \mu & \text{si } M > L + 1 \\ \frac{L}{M} \mu & \text{si } L \leq M \leq L + 1 \end{cases}$$

La fiche de la loi est donnée page 110.

Comme pour la loi Beta, il n'est pas possible de définir la loi Beta Inverse par convolution de Mellin de loi Gamma et de loi Gamma Inverse. En revanche, on peut écrire une relation fondamentale :

$$\mathcal{GI}[\mu, L] = \mathcal{BI}[\mu, L, M](x) \hat{\star} \mathcal{GI}[\mu = 1, M] \quad (3.27)$$

3.2.3 Loi Beta et loi Beta Inverse dans le diagramme $\beta_1 - \beta_2$

Les coefficients $\beta_1 - \beta_2$ de la loi Beta s'écrivent (avec rappelons le $L < M$) :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{4(2L-M)^2(M+1)}{L(M-L)(M+2)^2} \\ \beta_2 &= -3 \frac{(L^2M - 6L^2 - M^2L + 6LM - 2M^2)(M+1)}{L(M-L)(M+2)(M+3)} \end{aligned}$$

Même si ces relations sont complexes, on montre sans problème que la loi Beta se situe dans le diagramme $\beta_1 - \beta_2$ au dessus de la branche de la loi Gamma, et sous la droite d'origine $\beta_2=1$ et de pente 1 au dessus de laquelle il n'existe aucune loi de probabilité.

Pour $M > L$ et $L > 4$, les coefficients $\beta_1 - \beta_2$ de la loi Beta Inverse s'écrivent :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{4(L-2M+1)^2(L-2)}{(M-L)(M-1)(L-3)^2} \\ \beta_2 &= -3 \frac{(L^2M - 3L^2 - L + 6LM - M^2L - 5M^2 - 2 + 5M)(L-2)}{(M-L)(M-1)(L-3)(L-4)} \end{aligned}$$

On voit que la loi Beta Inverse se situe donc dans le diagramme $\beta_1 - \beta_2$ dans la région située entre la loi Gamma et la loi Gamma inverse, c'est à dire dans une zone partagée avec la loi de Fisher.

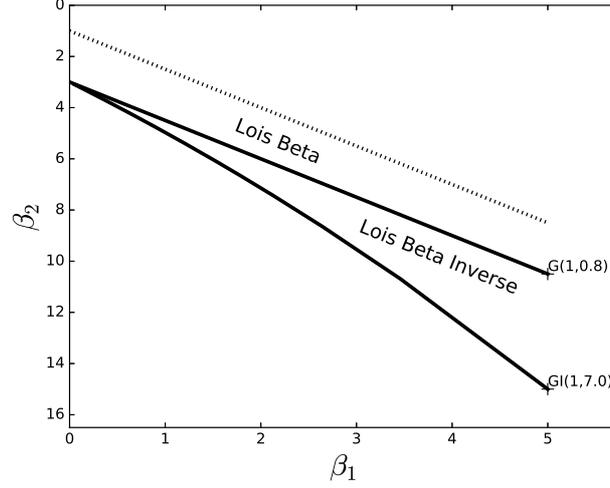


FIGURE 3.6 – Lois Beta et Beta Inverse dans le diagramme $\beta_1 - \beta_2$. Les lois Beta Inverse sont localisées entre les courbes des lois Gamma et Gamma inverse. Il faut bien noter que les lois Beta Inverse $\mathcal{BI}[\mu, L, M]$ ne sont représentables dans ce diagramme si et seulement si $L > 4$.

3.2.4 Loi Beta et loi Beta Inverse dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$

A partir de l'expression 3.23, on peut écrire :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_2 = \Psi(1, L) - \Psi(1, M) > 0 \\ \tilde{\kappa}_3 = \Psi(2, L) - \Psi(2, M) < 0 \end{cases}$$

ce qui montre que les lois Beta sont dans la partie gauche du diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$, entre l'axe des abscisses et la branche de la loi Gamma.

De même, à l'expression 3.26, on peut écrire :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_2 = \Psi(1, L) - \Psi(1, M) > 0 \\ \tilde{\kappa}_3 = -\Psi(2, L) + \Psi(2, M) > 0 \end{cases}$$

ce qui montre que les lois Beta Inverse sont dans la partie droite du diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$, entre l'axe des abscisses et la branche de la loi Gamma Inverse.

3.2.5 Estimation des paramètres de la loi Beta

Deux méthodes peuvent être appliquées à l'estimation des paramètres de la loi Beta :

- En inversant le système des trois premiers moments (relation 3.22) :

$$\begin{cases} m_1 = \mu \\ m_2 = \mu^2 \frac{L+1}{L} \frac{M}{M+1} \\ m_3 = \mu^3 \frac{(L+1)(L+2)}{L^2} \frac{M^2}{(M+1)(M+2)} \end{cases} \quad (3.28)$$

Ce système a une solution analytique. En posant :

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{m_1} \frac{m_2}{m_1} = \frac{(L+1)M}{L(M+1)} \\ R_2 &= \frac{1}{m_1} \frac{m_3}{m_2} = \frac{(L+2)M}{L(M+2)} \end{aligned}$$

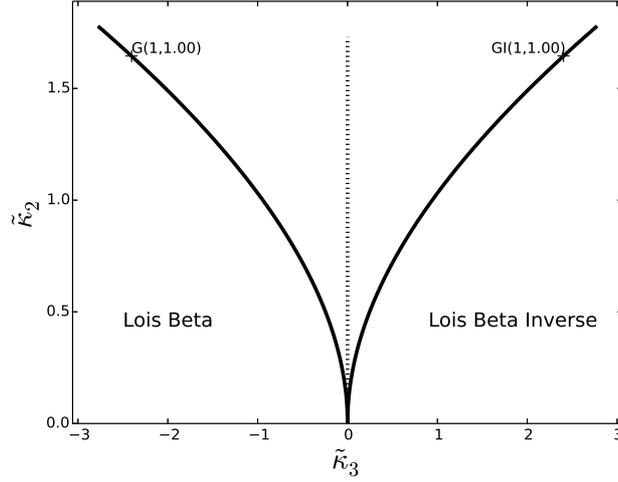


FIGURE 3.7 – Lois Beta (à gauche) et Beta Inverse (courbe à droite) dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$.

on a directement les trois paramètres (moyennant les conditions d'usage sur la non nullité des dénominateurs) :

$$\begin{aligned}\mu &= m_1 \\ L &= \frac{2(R_1 - R_2)}{-R_1 + 2R_2 - R_1R_2} \\ M &= \frac{2(R_2 - R_1)}{2R_1 - R_2 - 1}\end{aligned}$$

– En inversant le système des trois premiers log-cumulants (relation 3.23) :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \log \mu + (\Psi(L) - \log L) - (\Psi(M) - \log M) \\ \tilde{\kappa}_2 = \Psi(1, L) - \Psi(1, M) \\ \tilde{\kappa}_3 = \Psi(2, L) - \Psi(2, M) \end{cases} \quad (3.29)$$

Ce système est malheureusement implicite. On peut cependant noter que le paramètre μ (paramètre d'échelle) n'intervient que dans l'expression du premier log-cumulant, et que, traités ensemble, les second et troisième log-cumulants ne dépendent que des deux paramètres de forme L et M .

Pour résoudre numériquement ce système, on se restreint tout d'abord aux deux relations impliquant $\tilde{\kappa}_2$ et $\tilde{\kappa}_3$. Une méthode très simple (inspirée de celle utilisée pour l'estimation des paramètres de la loi de Fisher [34]) requiert les étapes suivantes :

– connaissant la valeur du log-cumulant $\tilde{\kappa}_2$, initialiser la valeur L_0 telle que :

$$\Psi(1, L_0) = \tilde{\kappa}_2$$

– vérifier que l'on traite bien une loi Beta. Pour cela on vérifie que la valeur L_0 est telle que :

$$\Psi(2, L_0) > \hat{\tilde{\kappa}}_3$$

Si ce n'est pas le cas, on arrête l'algorithme.

– à choisir un pas incrémental positif pour les valeurs de L : ΔL et à calculer

$$L_1 = L_0 - \Delta L$$

– à effectuer itérativement les étapes suivantes jusqu'à convergence (ou arrêt de l'algorithme sur test) :

- calculer $\Psi(2, L_i) - \Psi(2, M_i)$ et vérifier :

$$\Psi(2, L_i) - \Psi(2, M_i) \geq \tilde{\kappa}_3$$

Si ce test n'est pas vérifié, on arrête l'algorithme.

- incrémenter L_i : ce qui donne $L_{i+1} = L_i - \Delta L$ (avec un test pour que L_i ne soit pas trop petit)
- calculer M_{i+1} vérifiant $\Psi(1, M_{i+1}) = \Psi(1, L_{i+1}) - \tilde{\kappa}_2$

Sur ce schéma très simplifié (illustré figure 3.8), on appliquera bien évidemment des raffinements classiques (pas variable, dichotomie, ...) ¹¹ permettant une convergence plus rapide et efficace (il faut noter que, de toutes façons, cet algorithme est très rapide).

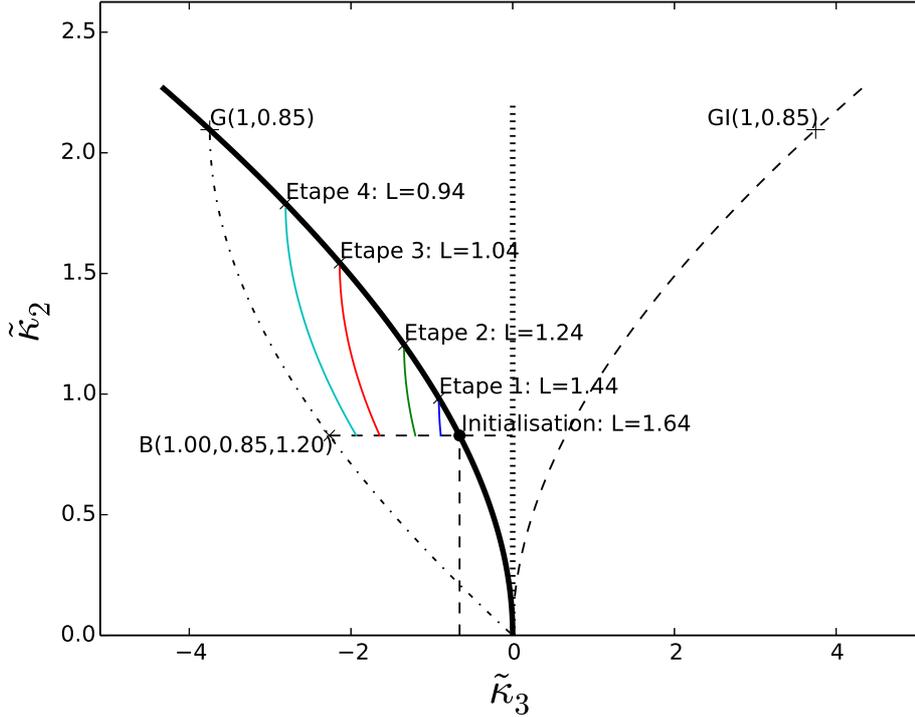


FIGURE 3.8 – Etapes de la méthode d'estimation des paramètres de la loi $\mathcal{B}[\mu = 1., L = 0.85, M = 1.2]$. L'initialisation s'effectue en recherchant la loi Gamma ayant la même valeur de log-cumulant d'ordre 2 : on trouve $L = 1.64$. Ensuite, on effectue les étapes décrites en diminuant la valeur de L de 0.2 (0.1 à l'étape 4). On se rapproche ainsi de la valeur théorique d'autant mieux que le pas ΔL est petit.

Une fois déterminées \hat{L} et \hat{M} , les estimées de L et M , le premier log-cumulant permet de déduire $\hat{\mu}$, l'estimée de μ , par la relation :

$$\log \hat{\mu} = \hat{\kappa}_1 - \left(\Psi(\hat{L}) - \log(\hat{L}) \right) + \Psi(\hat{M}) - \log(\hat{M})$$

3.2.6 Loi Beta, loi Beta Inverse et convolution de Mellin

L'expression de la seconde fonction caractéristique de la loi Beta montre que sa dépendance selon la variable s se fait en particulier par le biais d'un ratio de fonctions Gamma :

$$\phi_{\mathcal{B}}(s) \propto \frac{\Gamma(L + s - 1)}{\Gamma(M + s - 1)}$$

¹¹. de plus, on connaît les expressions analytiques des dérivées des fonctions à optimiser : on peut donc utiliser un algorithme de descente de gradient.

De même pour l'expression de la seconde fonction caractéristique de la loi Beta Inverse qui donne la relation :

$$\phi_{\mathcal{BI}}(s) \propto \frac{\Gamma(L+1-s)}{\Gamma(M+1-s)}$$

Comme pour la loi Gamma (paragraphe 3.1.9), on peut imaginer construire des lois en combinant par convolution de Mellin des lois Beta ou Beta Inverse avec des lois Gamma ou Gamma Inverse. En se restreignant à des lois à quatre paramètres (un d'échelle et trois de forme), on obtient :

– $\mathcal{G}[\mu, M] \hat{\star} \mathcal{B}[\mu, L, N]$, qui est La loi W (proposée par Delignon, [13]), notée $\mathcal{Q}_{\mathcal{W}}[\mu, L, M, N]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}[\mu, M] \hat{\star} \mathcal{B}[\mu, L, N] &= \mathcal{Q}_{\mathcal{W}}[\mu, L, M, N] \\ &= \frac{LM}{N\mu} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \left(\frac{LMx}{N\mu}\right)^{\frac{L+M-3}{2}} e^{-\frac{LMx}{2N\mu}} W_{\frac{1+L+M-2N}{2}, \frac{L-M}{2}}\left(\frac{LMx}{N\mu}\right) \end{aligned}$$

W étant la fonction de Whittaker (voir annexe A.3.3). Sa fonction caractéristique de deuxième espèce s'exprime sous la forme :

$$\sim \frac{\Gamma(L+s-1)\Gamma(M+s-1)}{\Gamma(N+s-1)}$$

La fiche de la loi W est donnée page 122.

– $\mathcal{GI}[\mu, M] \hat{\star} \mathcal{BI}[\mu, L, N]$ qui est la loi W Inverse

$$\begin{aligned} \mathcal{GI}[\mu, M] \hat{\star} \mathcal{BI}[\mu, L, N] &= \mathcal{Q}_{\mathcal{WI}}[\mu, L, M, N] \\ &= \frac{N}{LM\mu} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \left(\frac{LM\mu}{Nx}\right)^{\frac{L+M-3}{2}+2} e^{-\frac{LM\mu}{2Nx}} W_{\frac{1+L+M-2N}{2}, \frac{L-M}{2}}\left(\frac{LM\mu}{Nx}\right) \end{aligned}$$

W étant la fonction de Whittaker (voir annexe A.3.3). Sa fonction caractéristique de deuxième espèce s'exprime sous la forme :

$$\sim \frac{\Gamma(L+1-s)\Gamma(M+1-s)}{\Gamma(N+1-s)}$$

La fiche de la loi W Inverse est donnée page 124.

– $\mathcal{GI}[\mu, M] \hat{\star} \mathcal{B}[\mu, L, N]$ qui est la loi Y¹²

$$\begin{aligned} \mathcal{GI}[\mu, M] \hat{\star} \mathcal{B}[\mu, L, N] &= \mathcal{Q}_{\mathcal{Y}}[\mu, L, M, N] \\ &= \frac{L}{MN\mu} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(M)\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+L)}{\Gamma(M+N)} \left(\frac{Lx}{MN\mu}\right)^{-M-1} {}_1F_1\left(M+L; M+N; -\frac{MN\mu}{Lx}\right) \end{aligned}$$

${}_1F_1$ étant la fonction hypergéométrique conflente (voir A.3.1). Sa fonction caractéristique de deuxième espèce s'exprime sous la forme :

$$\sim \frac{\Gamma(L+s-1)\Gamma(M+1-s)}{\Gamma(N+s-1)}$$

La fiche de la loi Y est donnée page 126.

– $\mathcal{G}[\mu, M] \hat{\star} \mathcal{BI}[\mu, L, N]$ qui est la loi Y Inverse

$$\begin{aligned} \mathcal{G}[\mu, M] \hat{\star} \mathcal{BI}[\mu, L, N] &= \mathcal{Q}_{\mathcal{YT}}[\mu, L, M, N] \\ &= \frac{MN}{L\mu} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(M)\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+L)}{\Gamma(M+N)} \left(\frac{MNx}{L\mu}\right)^{M-1} {}_1F_1\left(M+L; M+N; -\frac{MNx}{L\mu}\right) \end{aligned}$$

${}_1F_1$ étant la fonction hypergéométrique conflente (voir A.3.1). Sa fonction caractéristique de deuxième espèce s'exprime sous la forme :

$$\sim \frac{\Gamma(L+1-s)\Gamma(M+s-1)}{\Gamma(N+1-s)}$$

La fiche de la loi Y Inverse est donnée page 128.

Tous ces cas sont résumés tableau 3.2.

12. ainsi baptisée pour faire suite aux lois U et W de Delignon.

$\hat{\star}$	\mathcal{G}	\mathcal{GI}
\mathcal{B}	\mathcal{Q}_W	\mathcal{Q}_Y
\mathcal{BI}	\mathcal{Q}_{YI}	\mathcal{Q}_{WI}

TABLE 3.2 – Résultats de convolutions de Mellin entre loi Gamma, loi Gamma Inverse, loi Beta et loi Beta Inverse. On rappelle que la convolution de Mellin est commutative, ce qui simplifie d'autant ce tableau.

3.3 Passage en échelle logarithmique

3.3.1 Loi Gamma et loi de Fisher-Tipett

Soit une variable aléatoire X définie sur \mathbb{R}^+ , de densité de probabilité $p_X(x)$. En passant en échelle logarithmique ($y = \log x$), on définit une variable aléatoire Y définie sur \mathbb{R} , de densité de probabilité $p_Y(y)$. On sait alors que :

$$p_Y(y) = e^y p_X(e^y) \quad (3.30)$$

Si la variable aléatoire X définie sur \mathbb{R}^+ suit une loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L]$

$$\mathcal{G}[\mu, L](x) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{Lx}{\mu}\right)^{L-1} e^{-\frac{Lx}{\mu}}$$

alors la variable aléatoire Y définie comme le logarithme de la variable aléatoire X suit une loi sur \mathbb{R} appelée loi de Fisher-Tipett et qui s'écrit :

$$\mathcal{FT}[m, L](y) = \frac{L^L}{\Gamma(L)} e^{L(y-m)} e^{-Le^{y-m}} \quad (3.31)$$

Le paramètre m de la loi de Fisher Tipett vérifie $m = \log \mu$, c'est à dire $\mu = e^m$.

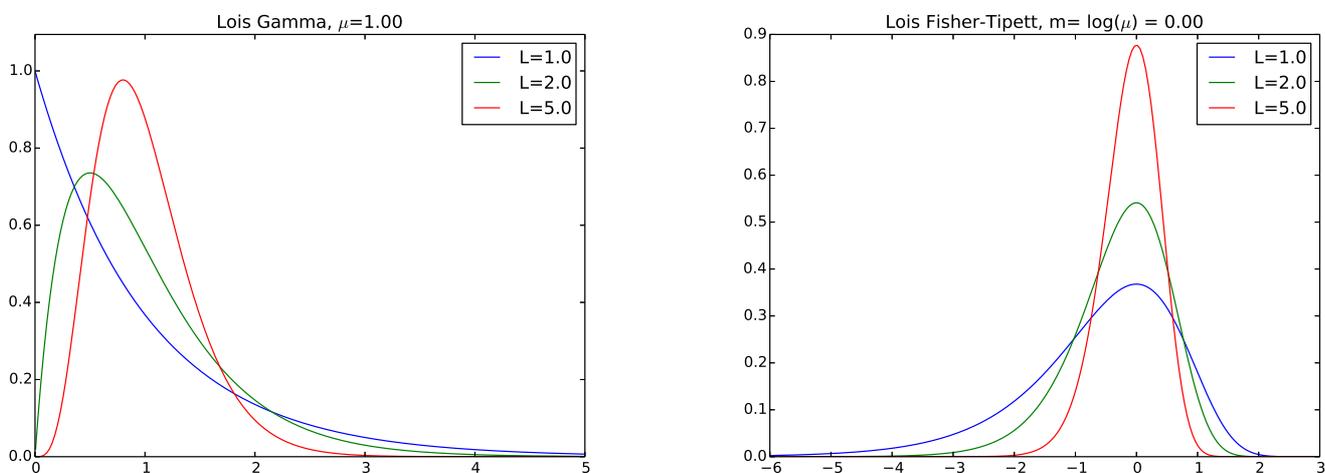


FIGURE 3.9 – A gauche : Trois exemples de lois Gamma. On remarque que la loi est d'autant mieux localisée autour de la valeur μ que L est grand. A droite : trois exemples de lois de Fisher-Tipett, avec les mêmes paramètres que les lois Gamma à gauche. Comme pour la loi Gamma, on remarque que la loi est d'autant mieux localisée autour de la valeur $m = \log \mu$ que L est grand.

D'après les liens entre transformée de Mellin et transformée de Fourier, on sait que pour deux fonctions $f(x)$ définie sur \mathbb{R}^+ et $g(y)$ définies sur \mathbb{R} telles que

$$g(\log x) = f(x)$$

la transformée de Fourier de $g(y)$ s'écrit en fonction de la transformée de Mellin de $f(x)$ (relation 2.8) :

$$\mathcal{F}[g](\nu) = \mathcal{M}[f](s)|_{s=-i\nu}$$

Connaissant la relation 3.30 ainsi que la propriété **TM2** de la transformée de Mellin, et sachant que $\phi_{\mathcal{G}}(s)$, la fonction caractéristique de deuxième espèce de la variable aléatoire X suivant la loi Gamma, s'écrit :

$$\phi_{\mathcal{G}}(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)}$$

cette dernière relation permet d'écrire $\Phi_{\mathcal{FT}}(\nu)$, la fonction caractéristique de la variable aléatoire Y suivant la loi de Fisher-Tipett :

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{FT}}(\nu) &= \phi_{\mathcal{G}}(s)|_{s=1-i\nu} \\ &= e^{i\nu m} \frac{\Gamma(L+i\nu)}{L^{i\nu} \Gamma(L)} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Si l'on se place dans le domaine des statistiques conventionnelles, cette expression permet de calculer les moments de la loi de Fisher Tipett (par dérivation de la fonction caractéristique, relation 2.15), ce qui donne pour les trois premiers les relations suivantes, assez lourdes et inextricables en apparence pour les moments supérieurs à 2 :

$$\begin{aligned} m_1 &= m + \Psi(L) - \log L \\ m_2 &= m^2 + 2m\Psi(L) - 2m \ln(L) + \Psi(1, L) + (\Psi(L))^2 - 2\Psi(L) \ln(L) + (\ln(L))^2 \\ m_3 &= (\Psi(L))^3 - (\ln(L))^3 + m^3 + \Psi(2, L) + 3m^2\Psi(L) - 3m^2 \ln(L) + 3m\Psi(1, L) + 3m(\Psi(L))^2 \\ &\quad + 3\Psi(1, L)\Psi(L) - 6m\Psi(L) \ln(L) - 3\Psi(1, L) \ln(L) - 3(\Psi(L))^2 \ln(L) \\ &\quad + 3m(\ln(L))^2 + 3\Psi(L)(\ln(L))^2 \end{aligned}$$

On en déduit les trois premiers moments centrés (relation 2.17) –qui sont aussi les trois premiers cumulants (relation 2.23)–, ce qui donne des relations simplissimes :

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= m + \Psi(L) - \log L \\ \kappa_2 &= \Psi(1, L) \\ \kappa_3 &= \Psi(2, L) \end{aligned}$$

c'est à dire, puisque $m = \log \mu$, les expressions des log-cumulants de la loi Gamma. On observe sur cet exemple une relation beaucoup plus générale (et facile à démontrer) : par passage en échelle logarithmique, les cumulants de la nouvelle loi (définie sur \mathbb{R}) sont les log-cumulants de la loi d'origine (définie sur \mathbb{R}^+).

3.3.2 Loi Gamma Inverse et loi de Fisher-Tipett Opposée

La même démarche peut s'effectuer en partant de la loi Gamma Inverse :

$$\mathcal{GI}[\mu, M](x) = \frac{1}{\Gamma(M)} \frac{1}{M\mu} \left(\frac{M\mu}{x} \right)^{M+1} e^{-\frac{M\mu}{x}}$$

il en résulte la loi de Fisher Tipett "opposée" (le terme inverse étant associée à un passage de la variable x à $1/x$ alors qu'ici on passe de la variable y à $-y$) :

$$\mathcal{FTO}[m, L](y) = \frac{L^L}{\Gamma(L)} e^{L(m-y)} e^{-Le^{m-y}}$$

avec $m = \log \mu$.

Par un raisonnement analogue à celui du précédent paragraphe, il est facile d'en déduire directement les cumulants de la loi de Fisher Tipett "opposée" connaissant les log-cumulants de la loi Gamma Inverse :

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= m - \Psi(L) + \log L \\ \kappa_2 &= \Psi(1, L) \\ \kappa_3 &= -\Psi(2, L) \end{aligned}$$

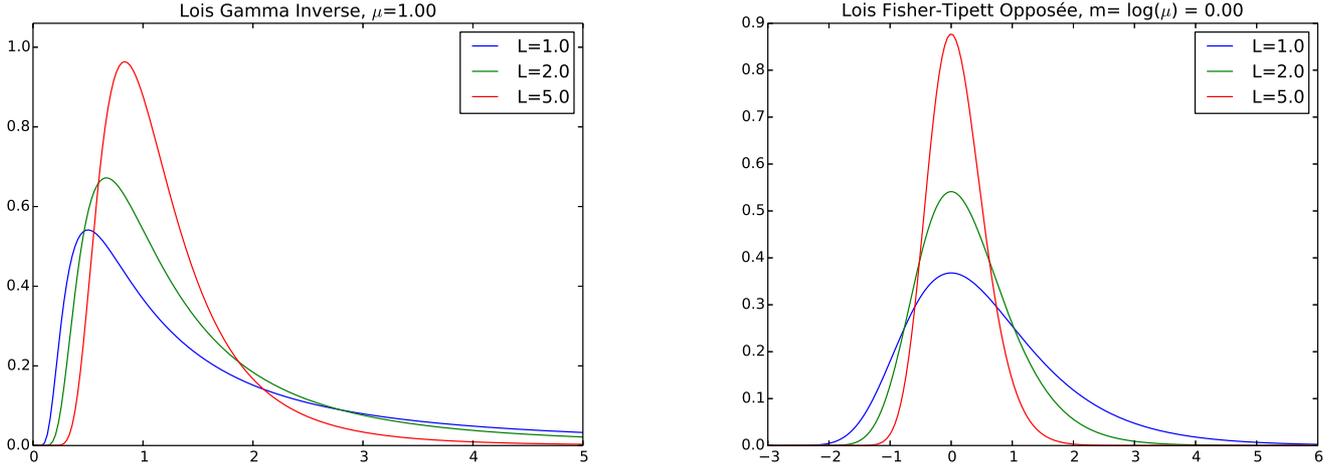


FIGURE 3.10 – A gauche : Trois exemples de lois Gamma Inverse. On remarque que la loi est d’autant mieux localisée autour de la valeur μ que L est grand. A droite : trois exemples de lois de Fisher-Tipett “Opposée”, avec les mêmes paramètres que les lois Gamma Inverse à gauche. Comme pour la loi Gamma, on remarque que la loi est d’autant mieux localisée autour de la valeur $m = \log \mu$ que L est grand.

3.3.3 Loi de Fisher et loi Z de Fisher

Connaissant les lois de Fisher Tipett et de Fisher Tipett Opposée (définies sur \mathbb{R}), on peut alors se demander quel serait la forme analytique de la convolution de deux lois de Fisher Tipett $\mathcal{FT}[m, L]$ et $\mathcal{FTO}[m, M]$. Le résultat est en fait très facile à démontrer. En effet, on sait que la loi de Fisher (relation 3.17) est le résultat d’une convolution de Mellin d’une loi Gamma et d’une loi Gamma Inverse :

$$\mathcal{F}[\mu, L, M] = \mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, M]$$

En passant en échelle logarithmique, la convolution de Mellin devient une vraie convolution, et la loi résultante, qui est en fait une généralisation de la loi Z proposé par Fisher dans son article [19] $\mathcal{F}_z[\mu, L, M]$ ¹³, s’écrit, grâce à la relation 2.66 :

$$\mathcal{F}_z[m, L, M] = \mathcal{FT}[m, L] \star \mathcal{FTO}[1, M] = \frac{L \Gamma(L+M)}{M \Gamma(L)\Gamma(M)} e^{w-m} \frac{\left(\frac{Le^{w-m}}{M}\right)^{L-1}}{\left(1 + \frac{Le^{w-m}}{M}\right)^{L+M}}$$

avec $\mu = e^m$.

Grâce aux résultats acquis sur la loi de Fisher en statistique de Mellin, on a directement les moments et les moments centrés de la loi Z de Fisher. En particulier :

$$\begin{aligned} m_1 &= m + \Psi(L) - \log L - (\Psi(M) - \log M) \\ M_2 &= \Psi(1, L) + \Psi(1, M) \\ M_3 &= \Psi(2, L) - \Psi(2, M) \end{aligned}$$

Toujours grâce à l’acquis sur les lois de Fisher, on a

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{F}_z[m, L, M] &= \mathcal{FT}[m, L] \\ \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{F}_z[m, L, M] &= \mathcal{FTO}[m, M] \end{aligned}$$

13. La loi Z proposée par Fisher s’écrit : $p(z) \sim \frac{e^{n_1 z}}{(n_2 + n_1 e^{2z})^{(n_1 + n_2)/2}}$, ce qui revient à décrire $p(z)$ par une forme généralisée de $\mathcal{F}_z[m = 1, n_1/2, n_2/2]$

3.3.4 Loi log-normale et loi normale

Soit une variable aléatoire Y définie sur \mathbb{R} , de densité de probabilité $p_Y(y)$. En passant en échelle exponentielle ($x = e^y$), on définit une variable aléatoire X définie sur \mathbb{R}^+ , de densité de probabilité $p_X(x)$. On sait alors que :

$$p_X(x) = \frac{1}{x} p_Y(\log x) \quad (3.33)$$

Si l'on considère une variable aléatoire Y définie sur \mathbb{R} suivant une loi normale $\mathcal{N}[m, \sigma]$:

$$\mathcal{N}[m, \sigma](u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}}$$

alors la variable aléatoire X définie comme le passage à l'exponentielle de la variable aléatoire Y suit une loi sur \mathbb{R}^+ appelée loi log-normale et qui s'écrit :

$$\mathcal{L}[\mu, \sigma](x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}x} e^{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.34)$$

avec $\mu = \log m$.

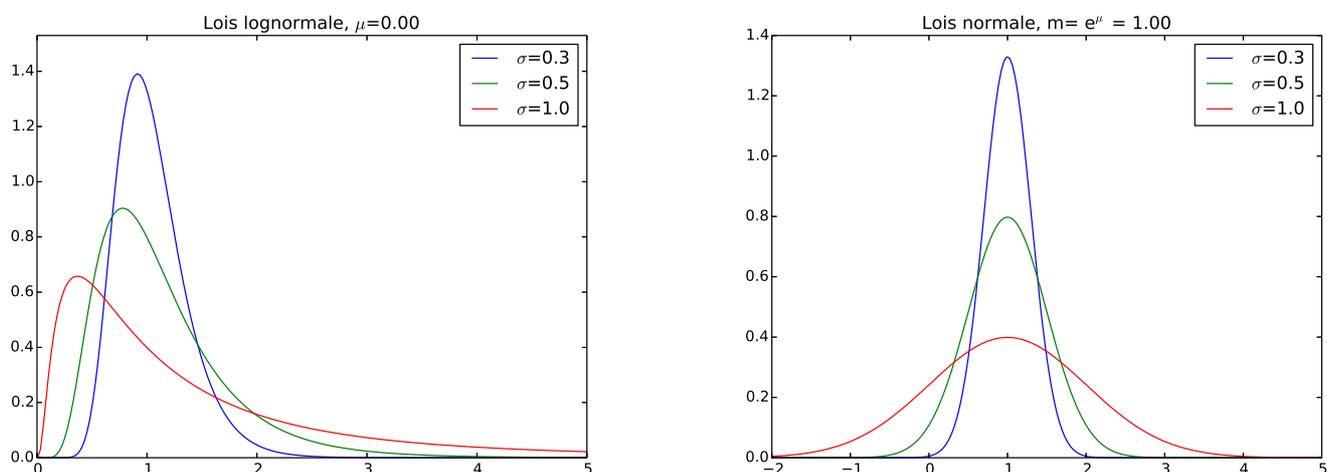


FIGURE 3.11 – A gauche : Trois exemples de lois lognormale. On remarque que la loi est d'autant mieux localisée autour de la valeur μ que σ est petit. A droite : trois exemples de lois normale, avec les mêmes paramètres que les lois lognormale à gauche. Comme pour la loi lognormale, on remarque que la loi est d'autant mieux localisée autour de la valeur $m = \log \mu$ que σ est petit.

D'après les liens entre transformée de Mellin et transformée de Fourier, on sait que pour deux fonctions $g(y)$ définie sur \mathbb{R} et $f(x)$ définies sur \mathbb{R}^+ telles que

$$f(x) = g(\log x)$$

la transformée de Mellin de $f(x)$ s'écrit en fonction de la transformée de Fourier de $g(y)$ (relation 2.8) :

$$\mathcal{M}[f](s) = \mathcal{F}[g](\nu)|_{\nu=js}$$

Connaissant la fonction caractéristique de la loi normale $\mathcal{N}[m, \sigma]$ qui s'écrit :

$$\Phi_{\mathcal{N}}(\nu) = e^{im\nu - \frac{\sigma^2\nu^2}{2}}$$

on en déduit la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi log-normale :

$$\begin{aligned}\phi_{\mathcal{L}}(s) &= \Phi_{\mathcal{N}}(\nu)|_{\nu=i(s-1)} \\ &= e^{-m(s-1)+\frac{\sigma^2(s-1)^2}{2}}\end{aligned}\tag{3.35}$$

Il est alors facile de montrer que puisque l'on connaît les cumulants de la loi normale :

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \mu \\ \kappa_2 &= \sigma^2 \\ \kappa_r &= 0 \quad \forall r > 2\end{aligned}$$

on en déduit directement les log-cumulants de la loi log-normale :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_1 &= \mu \\ \tilde{\kappa}_2 &= \sigma^2 \\ \tilde{\kappa}_r &= 0 \quad \forall r > 2\end{aligned}$$

3.4 Les lois de probabilités et leurs expressions sous forme de fonction de Meijer

Ce paragraphe a pour but d'introduire les fonctions de Meijer dans l'univers des lois définies sur \mathbb{R}^+ . Son objectif est double :

- Le catalogue actuel des lois utilisées en imagerie cohérente ressemble à un dédale d'appellations diverses et variées. Selon les auteurs, la même formulation peut recouvrir plusieurs noms de lois de probabilité¹⁴. L'introduction d'une notation unique à l'aide des fonctions de Meijer permet de mieux appréhender les différences et les similitudes. De plus, le lien essentiel entre fonctions de Meijer et transformée de Mellin –puisque les fonctions de Meijer sont définies comme des transformées de Mellin inverse– conduit à des expressions simples des fonctions caractéristiques de deuxième espèce ; les log-cumulants ont eux aussi des formes analytiques simplissimes.
- L'utilisation des fonctions de Meijer est possible dans les logiciels actuels (Maple, Python). Il n'est alors pas nécessaire d'être un spécialiste de fonctions dites spéciales et de leur programmation (voir l'annexe A qui tente de regrouper les diverses fonctions spéciales rencontrées dans ce rapport). Ceci explique pourquoi dans les prochains chapitres une formulation à l'aide des fonctions de Meijer sera proposée pour la quasi totalité des lois usuelles, ce qui évitera de donner des noms de fonctions inconnues d'une grande majorité des lecteurs puisque, au final, tout est Meijer. Sous cette formulation unique, il n'est pas nécessaire d'aller à la recherche d'un code existant dédié à une fonction spéciale donnée puisqu'un simple appel à une fonction de Meijer suffit.

Pour finir, nous montrerons qu'il est possible de donner le nom de Lois de Meijer à une famille de lois de probabilités définies uniquement à partir des fonctions de Meijer.

3.4.1 Lois Gamma, Gamma Inverse, Beta et Beta Inverse sous forme de fonction de Meijer

La loi Gamma et la loi Gamma Inverse ont leur fonction caractéristique de deuxième espèce qui est proportionnelle à la fonction Gamma (relations 3.7 et 3.11) :

$$\begin{aligned}\phi_{\mathcal{G}}(s) &\propto \Gamma(L_G + s - 1) \\ \phi_{\mathcal{GI}}(s) &\propto \Gamma(L_{GI} + 1 - s)\end{aligned}$$

En généralisant l'approche du paragraphe 3.1.9, qui par exemple avait permis la construction de la loi de Fisher en écrivant sa fonction caractéristique de deuxième espèce sous forme de produit des fonctions

¹⁴. La plus célèbre étant la loi de Fisher, nom historique qui regroupe la loi Beta de seconde espèce, la loi Beta Prime, la loi Pareto-2, la loi \mathcal{G}^0 de Frery, ...voir [36]

caractéristiques de deuxième espèce de la loi Gamma et de la loi Gamma Inverse :

$$\phi_{\mathcal{F}}(s) \propto \Gamma(L_G - 1 + s) \Gamma(L_{GI} + 1 - s)$$

on peut affirmer que toute combinaison de m lois Gamma et de n lois Gamma Inverse par convolution de Mellin aura une fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrivant formellement :

$$\phi(s) \propto \prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)$$

De même lois Beta et Beta Inverse ont des fonctions caractéristiques de deuxième espèce qui sont proportionnelles à un ratio de fonctions Gamma (relations 3.21 et 3.25)¹⁵

$$\phi_{\mathcal{B}}(s) \propto \frac{\Gamma(L_G + s - 1)}{\Gamma(M_B + s - 1)}$$

$$\phi_{\mathcal{BI}}(s) \propto \frac{\Gamma(L_{GI} + 1 - s)}{\Gamma(M_{BI} + 1 - s)}$$

et on peut affirmer que toute combinaison de m' lois Beta et de n' lois Beta Inverse par convolution de Mellin aura une fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrivant formellement :

$$\phi(s) \propto \prod_{j=1}^{m'} \frac{\Gamma(b_j + s)}{\Gamma(c_j + s)} \prod_{j=1}^{n'} \frac{\Gamma(1 - a_j - s)}{\Gamma(1 - d_j - s)}$$

En combinant lois Gamma, Gamma Inverse, Beta et Beta Inverse, on obtient une fonction caractéristique de deuxième espèce que l'on peut écrire sous la forme :

$$\frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)}$$

Or cette expression assez générale est celle à la base de la définition d'une catégorie de fonctions, appelées fonctions de Meijer : l'annexe B est dédiée à ces fonctions, et on a l'expression suivante dédiée à une classe particulière de fonctions de Meijer définies sur \mathbb{R}^+ et notées $\bar{G}_{p,q}^{m,n}$, définies par leur transformée de Mellin inverse (expression B.5) :

$$\bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} ; \begin{array}{l} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} x^{-s} ds$$

Rappelons que le formalisme de ces fonctions est assez déroutant : les indices n, p, m, q s'associant par paire selon diagonale et antidiagonale à droite de la lettre G (n avec p , m avec q), et que cette association est requise pour traiter les problèmes de convergence¹⁶.

Notons que les lois Gamma, Gamma Inverse, Beta et Beta Inverse s'expriment à l'aide de fonctions de Meijer (tableau 3.3). Notons aussi que les lois Gamma et Gamma Inverse correspondent aux paramètres de Meijer "à gauche", c'est à dire ceux qui interviennent au numérateur de la transformée de Mellin de la fonction de Meijer.

15. La notation choisie ici banalise le rôle de la loi Gamma de paramètre L_G , que l'on soit dans le cas de la loi Beta ou de la loi Gamma.

16. A contrario, si les problèmes de convergence ne se posent pas, on peut alléger cette notation et ne conserver que les paramètres a_1, \dots, a_p et b_1, \dots, b_q : c'est ce que font les logiciels proposant comme fonctions spéciales les fonctions de Meijer.

Loi Gamma	$\mathcal{G}[\mu, L_G]$	$\frac{L_G}{\mu} \frac{1}{\Gamma(L_G)} \bar{G}_{0,1}^{1,0} \left(\frac{L_G x}{\mu} \mid \begin{matrix} \cdot & ; & \cdot \\ L_G - 1 & ; & \cdot \end{matrix} \right)$
Loi Gamma Inverse	$\mathcal{GI}[\mu, L_{GI}]$	$\frac{1}{L_{GI} \mu} \frac{1}{\Gamma(L_{GI})} \bar{G}_{1,0}^{0,1} \left(\frac{x}{L_{GI} \mu} \mid \begin{matrix} -L_{GI} & ; & \cdot \\ \cdot & ; & \cdot \end{matrix} \right)$
Loi Beta	$\mathcal{B}[\mu, L_G, M_B]$	$\frac{L_G}{M_B \mu} \frac{\Gamma(M_B)}{\Gamma(L_G)} \bar{G}_{1,1}^{1,0} \left(\frac{L_G x}{M_B \mu} \mid \begin{matrix} \cdot & ; & M_B - 1 \\ L_G - 1 & ; & \cdot \end{matrix} \right)$
Loi Beta Inverse	$\mathcal{BI}[\mu, L_{GI}, M_{BI}]$	$\frac{M_{BI}}{L_{GI} \mu} \frac{\Gamma(M_{BI})}{\Gamma(L_{GI})} \bar{G}_{1,1}^{0,1} \left(\frac{M_{BI} x}{L_{GI} \mu} \mid \begin{matrix} -L_{GI} & ; & \cdot \\ \cdot & ; & -M_{BI} \end{matrix} \right)$

TABLE 3.3 – Expressions des Gamma, Gamma Inverse, Beta et Beta Inverse sous forme de fonctions de Meijer.

On remarque que ces lois Gamma, Gamma Inverse, Beta et Beta Inverse permettent une sorte de typologie des fonctions de Meijer \bar{G} :

$$\bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \mid \begin{array}{c} \text{Quadrant supérieur-gauche} \\ \text{Lois Gamma Inverse et Beta Inverse} \\ \text{Lois Gamma et Beta} \\ \text{Quadrant inférieur-gauche} \end{array} ; \begin{array}{c} \text{Quadrant supérieur-droit} \\ \text{Lois Beta} \\ \text{Lois Beta Inverse} \\ \text{Quadrant inférieur-droit} \end{array} \right)$$

Chaque quadrant de la fonction de Meijer est associé à une loi en particulier dans la liste des quatre lois Gamma, Gamma Inverse, Beta et Beta Inverse.

Notons que sur le plan analytique, ce sont les paramètres “à droite” (aussi bien de la première ligne que de la seconde ligne) qui peuvent poser des problèmes de convergence et qui conditionnent le domaine de définition (voir par exemple la condition suffisante de convergence B.1 : $p + q < 2(m + n)$).

3.4.2 Propriétés

Parmi les propriétés importantes des fonctions de Meijer, on peut retenir les suivantes :

- la primitive d’une fonction de Meijer s’exprime comme une fonction de Meijer (voir annexe B.2.6). Cette propriété a un rôle clé car si une densité de probabilité s’exprime sous forme de fonction de Meijer, on connaît alors aisément sa fonction de répartition. Ceci ouvre les portes à la simulation numérique de lois de probabilités (méthode dite de l’inversion de la fonction de répartition).
- la dérivée d’une fonction de Meijer s’exprime comme une fonction de Meijer (voir annexe B.2.5). Ceci peut s’avérer utile pour rechercher le mode d’une densité de probabilité.
- l’expression du log-cumulant d’ordre r (avec $r \geq 2$) d’une loi s’exprimant comme une fonction de Meijer est une simple somme de fonction polygamma (voir annexe C, équation C.2), chaque terme de la somme pouvant être rattaché à un type de lois dans la liste des quatre lois Gamma, Gamma

Inverse, Beta et Beta Inverse :

$$\begin{array}{cccc}
\text{Quadrant inférieur-gauche} & \text{Quadrant supérieur-gauche} & \text{Quadrant supérieur-droit} & \text{Quadrant inférieur-droit} \\
\overbrace{\sum_{j=1}^m \Psi(r-1, L_{G,j})} & + (-1)^r \overbrace{\sum_{j=1}^n \Psi(r-1, L_{GI,j})} & - \overbrace{\sum_{j=n+1}^p \Psi(r-1, M_{B,j})} & - (-1)^r \overbrace{\sum_{j=m+1}^q \Psi(r-1, M_{BI,j})} \\
\text{Lois Gamma} & \text{Lois Gamma Inverse} & \text{Lois Beta} & \text{Lois Beta Inverse} \\
\text{Lois Beta} & \text{Lois Beta Inverse} & &
\end{array} \tag{3.36}$$

Rappelons au passage que pour être une densité de probabilité les log-cumulants d'ordre pairs doivent être positifs ou nuls :

$$\forall r \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^n \Psi(2r-1, L_{GI,j}) + \sum_{j=1}^m \Psi(2r-1, L_{G,j}) - \sum_{j=m+1}^q \Psi(2r-1, M_{BI,j}) - \sum_{j=n+1}^p \Psi(2r-1, M_{B,j}) \geq 0$$

- le passage d'une loi s'exprimant comme une fonction de Meijer à sa loi inverse est formellement très simple eu égard à l'expression de la fonction inverse d'une fonction de Meijer (voir annexe B.1.5) : il suffit d'échanger les lignes de paramètres dans l'expression de la fonction de Meijer, ce qui donne, connaissant 3.36 :

$$\sum_{j=1}^n \Psi(r-1, L_{GI,j}) + (-1)^r \sum_{j=1}^m \Psi(r-1, L_{G,j}) - \sum_{j=m+1}^q \Psi(r-1, M_{BI,j}) - (-1)^r \sum_{j=n+1}^p \Psi(r-1, M_{B,j})$$

- la généralisation (passage de la variable x à la variable $y^\eta = x$) d'une loi s'exprimant comme une fonction de Meijer ne pose aucun problème théorique grâce à la propriété **TM 3** de la transformée de Mellin (voir le tableau 2.1). Connaissant le log-cumulant d'ordre $r \geq 2$ d'une loi initiale $\tilde{\kappa}_{X,r}$, le log-cumulant d'ordre r de la loi généralisée correspondante $\tilde{\kappa}_{Y,r}$ s'écrivent (2.57) :

$$\tilde{\kappa}_{Y,r} = \frac{1}{\eta^r} \tilde{\kappa}_{X,r}$$

ce qui donne ici :

$$\frac{1}{\eta^r} \left(\sum_{j=1}^m \Psi(r-1, L_{G,j}) + (-1)^r \sum_{j=1}^n \Psi(r-1, L_{GI,j}) - \sum_{j=n+1}^p \Psi(r-1, M_{B,j}) - (-1)^r \sum_{j=m+1}^q \Psi(r-1, M_{BI,j}) \right)$$

et en particulier pour les lois en amplitude :

$$\tilde{\kappa}_{Y,r} = \frac{1}{2^r} \tilde{\kappa}_{X,r}$$

c'est à dire

$$\frac{1}{2^r} \left(\sum_{j=1}^m \Psi(r-1, L_{G,j}) + (-1)^r \sum_{j=1}^n \Psi(r-1, L_{GI,j}) - \sum_{j=n+1}^p \Psi(r-1, M_{B,j}) - (-1)^r \sum_{j=m+1}^q \Psi(r-1, M_{BI,j}) \right)$$

- Enfin la convolution de Mellin de lois s'exprimant sous forme d'une fonction de Meijer est elle même une loi s'exprimant sous forme d'une fonction de Meijer. Cette propriété permet un cadre formel plus aisé à utiliser que la démarche historique (*Compound Speckle*) qui a nécessité un florilège de fonctions spéciales plus ou moins connues (fonction de Bessel modifiée de troisième espèce, fonction W de Whittaker, fonctions hypergéométriques) sans pour autant pouvoir être exhaustif (cas de la loi "super K" qui n'a pas de forme analytique excepté sous forme de fonction de Meijer).

3.4.3 Les lois de Meijer

Une première famille de lois : les lois de Meijer

Si $\bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} ; \begin{array}{l} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) > 0 \quad \forall x \geq 0$ et en choisissant une constante K telle que

$$\int_0^\infty K \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} ; \begin{array}{l} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) dx = 1$$

on en déduit que $K \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} ; \begin{array}{l} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right)$ est une densité de probabilité avec les conditions :

$$\begin{cases} a_i > 0 \quad \forall i \in [1, n] \\ b_i > 0 \quad \forall i \in [1, m] \\ p \geq \frac{n}{2} \\ q \geq \frac{m}{2} \end{cases}$$

Puisque, par définition, on a (relation B.6) :

$$\mathcal{M} \left[\bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} ; \begin{array}{l} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \right] (s) = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)}$$

il est facile de montrer que K doit vérifier l'égalité suivante :

$$K = \frac{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(-b_j) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + 1)}{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + 1) \prod_{j=1}^n \Gamma(-a_j)}$$

On a donc ainsi défini une première famille de lois fondées sur la fonction de Meijer, et ce serait rendre hommage au travail de Meijer que d'attribuer à ces lois le nom de "lois de Meijer" :

$$\overline{LG}_{p,q}^{m,n}(x) = \frac{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(-b_j) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + 1)}{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + 1) \prod_{j=1}^n \Gamma(-a_j)} \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} ; \begin{array}{l} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \quad (3.37)$$

Leurs fonctions caractéristiques de deuxième espèce s'écrivent :

$$\phi_{\overline{LG}}(s) = \frac{\prod_{j=1}^m \frac{\Gamma(b_j + s)}{\Gamma(b_j + 1)} \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(1 - a_j - s)}{\Gamma(-a_j)}}{\prod_{j=m+1}^q \frac{\Gamma(1 - b_j - s)}{\Gamma(-b_j)} \prod_{j=n+1}^p \frac{\Gamma(a_j + s)}{\Gamma(a_j + 1)}} \quad (3.38)$$

et vérifient bien évidemment :

$$\phi_{\overline{LG}}(s) \Big|_{s=1} = 1$$

Enfin, les log-cumulants d'ordre $r \geq 2$ vérifient une expression additive somme toute assez simple :

$$\underbrace{\sum_{j=1}^m \Psi(r-1, b_j)}_{\text{Quadrant inférieur-gauche}} + \underbrace{(-1)^r \sum_{j=1}^n \Psi(r-1, a_j)}_{\text{Quadrant supérieur-gauche}} - \underbrace{\sum_{j=n+1}^p \Psi(r-1, a_j)}_{\text{Quadrant supérieur-droit}} - \underbrace{(-1)^r \sum_{j=m+1}^q \Psi(r-1, b_j)}_{\text{Quadrant inférieur-droit}} \quad (3.39)$$

Cette loi possède donc un paramétrage spécifique permettant d'ajuster la forme de la loi grâce aux paramètres a_j et b_j . Cependant, si cette loi semble présenter toutes les qualités analytiques souhaitées, on peut noter que son premier moment s'écrit :

$$m_1 = \phi_{\overline{LG}}(s)|_{s=2} = \frac{\prod_{j=1}^m (b_j + 1) \prod_{j=m+1}^q (-b_j - 1)}{\prod_{j=1}^n (-a_j - 1) \prod_{j=n+1}^p (a_j +)}$$

grandeur qui ne dépend que des paramètres de forme : il faut alors non seulement ajuster la forme de la loi, mais aussi la valeur moyenne par le biais des seuls paramètres de forme.

Les lois de Meijer normalisées (LMN)

En général, on recherche des lois sur \mathbb{R}^+ telles qu'il y ait un paramètre d'échelle (généralement noté μ dans ce rapport) qui agisse multiplicativement sur la variable x et que l'on aimerait proche de la valeur moyenne de la loi ou de son mode. Dans le cas le plus général possible, les lois recherchées sont donc fonctions de $\frac{kx}{\mu}$, la constante k permettant d'ajuster la valeur moyenne au nouveau paramètre μ .

Si on prend comme point de départ une loi de Meijer $\overline{LG}_{p,q}^{m,n}(x)$ dont les paramètres $a_i, i \in [1, p]$ et $b_j, j \in [1, q]$ définissent la forme de la loi, on définit ainsi les "Lois de Meijer Normalisés", notées $\overline{LMN}_{p,q}^{m,n}[\mu](x)$ et telles que la dépendance en x soit sous la forme $\frac{kx}{\mu}$. Pour alléger l'écriture, on omet les paramètres a_i et b_i dans cette notation.

Puisque l'on recherche une densité de probabilité, on doit avoir :

$$\int_0^\infty \overline{LMN}_{p,q}^{m,n}[\mu](x) = 1$$

d'où :

$$\overline{LMN}_{p,q}^{m,n}[\mu](x) = \frac{k}{\mu} \overline{LG}_{p,q}^{m,n}(x)$$

De plus, connaissant la fonction caractéristique $\phi_{\overline{LG}}(s)$ des lois de Meijer (relation 3.38), on en déduit directement celle des Lois de Meijer Normalisés grâce à la propriété **TM 1** de la transformée de Mellin :

$$\phi_{\overline{LMN}}(s) = \frac{\mu^{s-1}}{k^{s-1}} \phi_{\overline{LG}}(s) = \frac{\mu^{s-1}}{k^{s-1}} \frac{\prod_{j=1}^m \frac{\Gamma(b_j + s)}{\Gamma(b_j + 1)} \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(1 - a_j - s)}{\Gamma(-a_j)}}{\prod_{j=m+1}^q \frac{\Gamma(1 - b_j - s)}{\Gamma(-b_j)} \prod_{j=n+1}^p \frac{\Gamma(a_j + s)}{\Gamma(a_j + 1)}}$$

Puisque l'on souhaite qu'il y ait un lien entre le premier moment et le nouveau paramètre μ , il suffit de choisir k tel que :

$$m_1 = \mu$$

ce qui donne :

$$k = \frac{\prod_{j=1}^m (b_j + 1) \prod_{j=m+1}^q (-b_j - 1)}{\prod_{j=1}^n (-a_j - 1) \prod_{j=n+1}^p (a_j + 1)}$$

et nous avons vu au paragraphe 2.4.4 que ce choix de paramètre d'échelle ne modifiait en rien les log-cumulants d'ordre supérieur à 1.

Ceci nous permet de définir le formalisme des “Lois de Meijer Normalisées” $\overline{LMN}_{p,q}^{m,n}(x)$, définies par la relation :

$$\overline{LMN}_{p,q}^{m,n}[\mu](x) = \frac{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(-b_j) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + 1)}{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + 1) \prod_{j=1}^n \Gamma(-a_j)} \frac{k}{\mu} \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(\frac{kx}{\mu} \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \quad ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m \quad ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right)$$

avec $k = \frac{\prod_{j=1}^m (b_j + 1) \prod_{j=m+1}^q (-b_j - 1)}{\prod_{j=1}^n (-a_j - 1) \prod_{j=n+1}^p (a_j + 1)}$

(3.40)

La log-fonction caractéristique d’une “Loi de Meijer Normalisée” a au final l’expression suivante :

$$\phi_{\overline{LMN}}(s) = \mu^{s-1} \frac{\prod_{j=1}^m \left(\frac{\Gamma(b_j + s) (b_j + 1)^{1-s}}{\Gamma(b_j + 1)} \right) \prod_{j=1}^n \left(\frac{\Gamma(1 - a_j - s) (-a_j - 1)^{s-1}}{\Gamma(-a_j)} \right)}{\prod_{j=m+1}^q \left(\frac{\Gamma(1 - b_j - s) (-b_j - 1)^{s-1}}{\Gamma(-b_j)} \right) \prod_{j=n+1}^p \left(\frac{\Gamma(a_j + s) (a_j + 1)^{1-s}}{(a_j + 1)} \right)}$$

expression qui permettra de retrouver des expressions connues pour certains cas particuliers de lois usuelles.

On peut vérifier les deux cas particuliers canoniques :

$$\begin{aligned} \phi(s)|_{s=1} &= 1 \\ \phi(s)|_{s=2} &= \mu \end{aligned}$$

Enfin, les log-cumulants d’ordre $r \geq 2$ des lois de Meijer normalisées vérifient une expression additive somme toute assez simple :

$$\underbrace{\sum_{j=1}^m \Psi(r-1, b_j)}_{\text{Quadrant inférieur-gauche}} + \underbrace{(-1)^r \sum_{j=1}^n \Psi(r-1, a_j)}_{\text{Quadrant supérieur-gauche}} - \underbrace{\sum_{j=n+1}^p \Psi(r-1, a_j)}_{\text{Quadrant supérieur-droit}} - \underbrace{(-1)^r \sum_{j=m+1}^q \Psi(r-1, b_j)}_{\text{Quadrant inférieur-droit}}$$

(3.41)

En revanche, le lien entre le logarithme du paramètre μ et le premier log-moment a une expression un peu lourde prenant en compte les facteurs de forme :

$$\tilde{m}_1 = \log \mu + \sum_{j=1}^m \Psi(b_j) - \sum_{j=1}^n \Psi(a_j) - \sum_{j=n+1}^p \Psi(a_j) + \sum_{j=m+1}^q \Psi(b_j)$$

Le groupe commutatif des lois de Meijer

On pourra enfin noter les points importants suivants :

- toutes les lois décrites par leur fiche synthétique dans le chapitre 4 peuvent effectivement s’exprimer sous la forme de lois de Meijer normalisées. Néanmoins, dans la description des lois usuelles, on peut noter que le moment d’ordre 1 n’est pas toujours égal au paramètre μ , et que, dans le même temps, les paramètres de forme apparaissent toujours sous une forme directe : la simplification dans l’expression a pour conséquence un moment d’ordre 1 différent du paramètre.

Par exemple la loi Gamma Inverse (fiche au paragraphe 4.2.2), définie pour $M > 0$, s’écrit :

$$\mathcal{GI}[\mu, M](x) = \frac{1}{\Gamma(M)} \frac{1}{M\mu} \left(\frac{M\mu}{x} \right)^{M+1} e^{-\frac{M\mu}{x}} = \frac{1}{M\mu} \frac{1}{\Gamma(M)} \bar{G}_{1,0}^{0,1} \left(\frac{x}{M\mu} \left| \begin{array}{l} -M \quad ; \quad . \\ . \quad ; \quad . \end{array} \right. \right)$$

a pour fonction caractéristique de deuxième espèce :

$$\phi_{\mathcal{GI}}(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s} \Gamma(M)}$$

et a pour premier moment :

$$m_1 = \mu \frac{M}{M-1} \quad M > 1$$

On a donc :

$$m_1 \neq \mu$$

Son homologue en loi de Meijer Normalisée s'écrit pour $M > 0$:

$$\overline{LMN}_{1,0}^{0,1}[\hat{\mu}](x) = \frac{1}{\Gamma(M)} \frac{1}{(M-1)\hat{\mu}} \bar{G}_{1,0}^{0,1} \left(\frac{x}{(M-1)\hat{\mu}} \left| \begin{array}{c} -M \quad ; \quad . \\ . \quad ; \quad . \end{array} \right. \right)$$

a pour fonction caractéristique de deuxième espèce :

$$\phi(s) = \frac{1}{\Gamma(M)} ((M-1)\hat{\mu})^{s-1} \Gamma(1+M-s) = \hat{\mu}^{s-1} \frac{\Gamma(M+1-s)}{(M-1)^{1-s} \Gamma(M)}$$

et a pour premier moment :

$$m_1 = \phi(s)|_{s=2} = \hat{\mu} \frac{1}{\Gamma(M)} (M-1) \Gamma(M-1) = \hat{\mu}$$

Ces résultats sont regroupés dans le tableau 3.4, ce qui permet de bien comprendre les différences et les similitudes.

	$\mathcal{GI}[\mu, M](x)$	$\overline{LMN}_{1,0}^{0,1}[\hat{\mu}](x)$
ddp	$\frac{1}{M\mu} \frac{1}{\Gamma(M)} \bar{G}_{1,0}^{0,1} \left(\frac{x}{M\mu} \left \begin{array}{c} -M \quad ; \quad . \\ . \quad ; \quad . \end{array} \right. \right)$	$\frac{1}{(M-1)\hat{\mu}} \frac{1}{\Gamma(M)} \bar{G}_{1,0}^{0,1} \left(\frac{x}{(M-1)\hat{\mu}} \left \begin{array}{c} -M \quad ; \quad . \\ . \quad ; \quad . \end{array} \right. \right)$
$\phi(s)$	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s} \Gamma(M)}$	$\hat{\mu}^{s-1} \frac{\Gamma(M+1-s)}{(M-1)^{1-s} \Gamma(M)}$
m_1	$\mu \frac{M}{M-1}$	$\hat{\mu}$
$\tilde{\kappa}_2$	$\Psi(1, M)$	$\Psi(1, M)$

TABLE 3.4 – Comparaison de la loi Gamma Inverse dans sa formulation “classique” et la loi de Meijer correspondante. Si les moments diffèrent, le log-cumulant d'ordre 2 est identique (propriété des similitudes, voir le paragraphe 2.4.4).

- la loi homothétique, qui s'exprime sous la forme d'un “Dirac Mellin”, s'exprime aussi sous la forme d'une loi de Meijer (voir fiche 4.1.1) puisque l'on a formellement (voir annexe B.2.4) :

$$\delta_{\mu}^{\mathcal{M}}(x) = \bar{G}_{0,0}^{0,0} \left(\frac{x}{\mu} \left| \begin{array}{c} . \quad ; \quad . \\ . \quad ; \quad . \end{array} \right. \right)$$

- toute loi de Meijer possède une loi inverse (voir paragraphe C.2.1 de l'annexe C).

On en déduit que les lois de Meijer, associées à la convolution de Mellin, forment un groupe commutatif¹⁷.

¹⁷. et on pourrait aller plus loin en affirmant que c'est un groupe à 2 générateurs.

Lois de Meijer Normalisées Généralisées

De par le principe de généralisation des lois, on peut définir les Lois de Meijer Normalisées Généralisées par l'expression :

$$\overline{LMG}[\mu, \eta]_{p,q}^{m,n}(x) = \eta \frac{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(-b_j) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + 1)}{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + 1) \prod_{j=1}^n \Gamma(-a_j)} \frac{k}{\mu} \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(\left(\frac{kx}{\mu} \right)^\eta \middle| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n ; a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m ; b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right)$$

avec $k = \left(\frac{\prod_{j=1}^m (b_j + 1) \prod_{j=m+1}^q (-b_j - 1)}{\prod_{j=1}^n (-a_j - 1) \prod_{j=n+1}^p (a_j + 1)} \right)^{\frac{1}{\eta}}$

(3.42)

Deuxième partie

Les lois utiles en imagerie cohérente

Cette partie est en pratique un catalogue résumé des lois les plus usuelles en imagerie cohérente. Elle comporte trois chapitres :

- un chapitre dédié aux lois fondamentales, c'est à dire celles qui ont l'expression la plus simple dans l'univers de Mellin. La loi générique en est la loi Gamma, puisque l'on a :

$$\mathcal{M}(\mathcal{G}[\mu, L])(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \quad L > 0 : \quad \text{Re}(s) > 1 - L$$

On note que la fonction Gamma joue un rôle essentiel dans l'expression de la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi Gamma. On associe bien entendu à la loi Gamma sa loi inverse et l'on peut écrire :

$$\mathcal{M}(\mathcal{GI}[\mu, M])(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s} \Gamma(M)} \quad M > 0 : \quad \text{Re}(s) < M + 1$$

expression qui donne aussi la part belle à la fonction Gamma.

Les lois dites “en intensité”, qui se déduisent par convolution de Mellin de cette loi fondamentale ainsi que de son inverse, ou à partir de la loi Beta, sont donc représentées dans ce chapitre.

- un chapitre dédié aux lois généralisées telles qu'elles ont été définies au chapitre 2, paragraphe 2.4.5. Une loi généralisée s'exprime à partir d'une loi élémentaire $p_X(x)$ (donc entrant dans le cadre des lois fondamentales) décrivant une variable aléatoire X : la loi généralisée $p_Y(y)$ décrit alors la variable aléatoire Y telle que $X = Y^\eta$. On a (relation 2.55) :

$$p_{X,\eta}(y) = |\eta| y^{(\eta-1)} p_X(y^\eta)$$

ainsi que (relation 2.56) :

$$\phi_{X,\eta}(s) = \phi_X \left(1 + \frac{s-1}{\eta} \right)$$

Les lois de Weibull et Gamma Généralisée entrent dans cette catégorie.

- Enfin le cas particulier des lois généralisées $\eta = 2$: c'est le cadre usuel des images de l'imagerie cohérente et ces lois portent souvent le dénominateur de “lois en amplitude”. Les lois de Rayleigh et de Nakagami entrent dans cette catégorie.

Dans le cadre des lois à trois paramètres seront abordées les lois de Halphen (voir [37]). Elles ne sont pas modélisables par convolution de Mellin puisqu'elles s'expriment comme des produits de densité de probabilité des lois fondamentales (généralisées ou non). Elles jouent un certain rôle en imagerie radar puisque on les connaît le plus souvent sous le nom de Loi Inverse Gaussienne Généralisée et le paragraphe 4.3.6 leur sera dédié. Plus précisément, l'adaptation des lois de Halphen à des données en amplitude sera abordée dans la partie dédiée aux lois en amplitude (chapitre 6). Un premier cas (paragraphe 6.3.6), appelé “loi de Halphen modifiée en amplitude”, offre quelques analogies avec la loi de Fisher en amplitude (trois paramètres, dont deux de forme : le premier agissant sur la tête de distribution, le second sur la queue de distribution). Le cas général (4 paramètres) est détaillé au paragraphe 6.4.9 et permet de faire un lien avec les distributions $\mathcal{G}_A(\alpha, \gamma, \lambda, n)$ proposées par Frery ([20]).

Chapitre 4

Les lois usuelles définies sur \mathbb{R}^+

Ce chapitre décrit sous forme de fiche synthétique un certain nombre de lois “en intensité” plus ou moins usitées en imagerie cohérente. Chaque fiche décrit une loi à des fins très utilitaires : on retrouve l’expression de la densité de probabilité, celle de sa fonction caractéristique de deuxième espèce, l’expression des moments, log-moments et autres paramètres utiles. Enfin, par une expression “à la Meijer”, on obtient un moyen pour définir sa fonction de répartition (chose fort utile dès lors que l’on veut simuler cette loi).

Pour les lois à un, deux ou trois paramètres, des illustrations de la densité de probabilité sont données pour des valeurs typiques des paramètres. Une analyse qualitative de chaque loi dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ permet d’analyser le comportement des lois à l’aune des références que sont la loi Gamma et la loi Gamma Inverse. En revanche, pour les lois à quatre paramètres, aucune illustration des densités de probabilités n’est donnée étant donné le nombre de cas possibles. En revanche, les diagrammes $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ permettent une analyse de la construction de ces lois par convolution de Mellin ainsi qu’une meilleure compréhension de leur localisation.

Les lois sont cataloguées selon le nombre de leurs paramètres.

4.1 Lois à un paramètre

4.1.1 Loi Homothétique

Cette loi permet de représenter dans l'univers des log-statistiques un simple gain. Si on a une loi dont le paramètre d'échelle est μ_0 et qui est décrite par P paramètres de forme :

$$p[\mu_0, \theta_1, \dots, \theta_P](x)$$

alors on a :

$$p[\mu_0, \theta_1, \dots, \theta_P](x) \hat{\star} \mathcal{H}[K](x) = p[\mu_1, \theta_1, \dots, \theta_P](x)$$

avec

$$\mu_1 = K \mu_0$$

Les log-cumulants d'ordre 2 et 3 de la loi homothétique sont nuls : aussi les lois homothétiques se situent toutes à l'origine du diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$.

Loi Homothétique	
$\mathcal{H}[\mu](x)$	$\frac{1}{\mu} \delta_{\mu}^{\mathcal{M}}(x)$
Loi inverse	$\mathcal{H}\left[\frac{1}{\mu}\right](x)$
Cas limite	
Construction	
Log-fonction caractéristique	μ^{s-1}
Moments	$\begin{cases} m_1 = \mu \\ m_2 = \mu^2 \\ m_r = \mu^r \end{cases}$
Ecart type	0
Coefficient de variation	0
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \log \mu \\ \tilde{\kappa}_2 = 0 \\ \tilde{\kappa}_r = 0 \quad \forall r > 1 \end{cases}$
Mode	μ
Formulation Meijer	$\frac{1}{\mu} \bar{G}_{0,0}^{0,0} \left(\frac{x}{\mu} \middle \cdot ; \cdot \right)$
Fonction de répartition	$\bar{G}_{1,1}^{0,1} \left(\frac{x}{\mu} \middle 1 ; \cdot \right)$

$\delta^{\mathcal{M}}$ est le “Dirac-Mellin”

4.1.2 Loi uniforme sur $[0, \mu]$

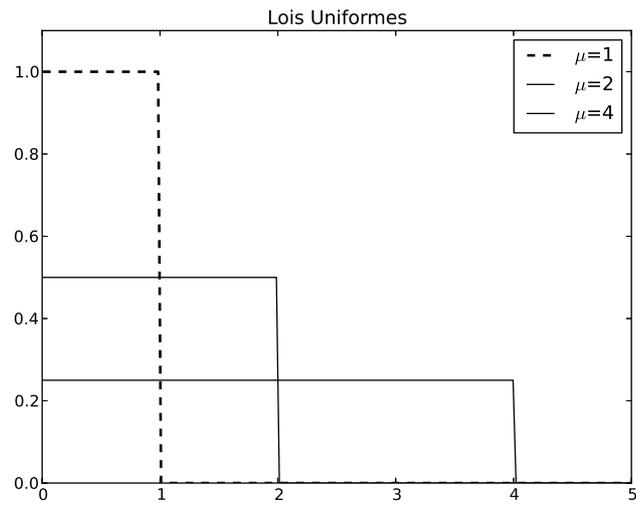


FIGURE 4.1 – Loi Uniforme

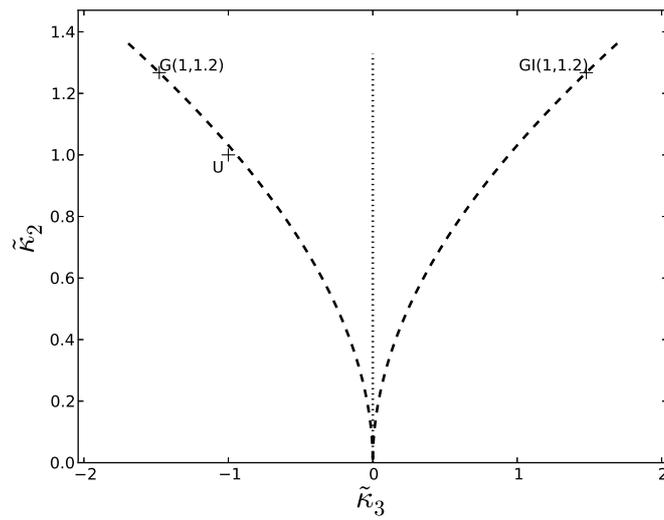


FIGURE 4.2 – Loi Uniforme dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$.

Loi uniforme sur $[0, \mu]$	
$\mathcal{U}[\mu](x)$	$\frac{1}{\mu}(Y(x) - Y(\mu - x))$
Loi inverse	
Cas limite	
Construction	
Log-fonction caractéristique	$\frac{\mu^{s-1}}{s}$
Moments	$\begin{cases} m_1 = \frac{\mu}{2} \\ m_2 = \frac{\mu^2}{3} \\ m_r = \frac{\mu^r}{r+1} \end{cases} \quad -1 < r$
Ecart type	$\sqrt{\frac{1}{12}}\mu$
Coefficient de variation	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = -1 + \log \mu \\ \tilde{\kappa}_2 = 1 \\ \tilde{\kappa}_r = (-1)^r \Gamma(r) \end{cases}$
Mode	
Formulation Meijer	$\frac{1}{\mu} \bar{G}_{1,1}^{1,0} \left(\frac{x}{\mu} \middle \begin{matrix} \cdot & ; & 1 \\ 0 & ; & \cdot \end{matrix} \right)$
Fonction de répartition	$\frac{1}{\mu} \bar{G}_{2,2}^{1,1} \left(\frac{x}{\mu} \middle \begin{matrix} 1 & ; & 2 \\ 1 & ; & 0 \end{matrix} \right)$

Y est la fonction de Heaviside

4.1.3 Loi Exponentielle Décroissante

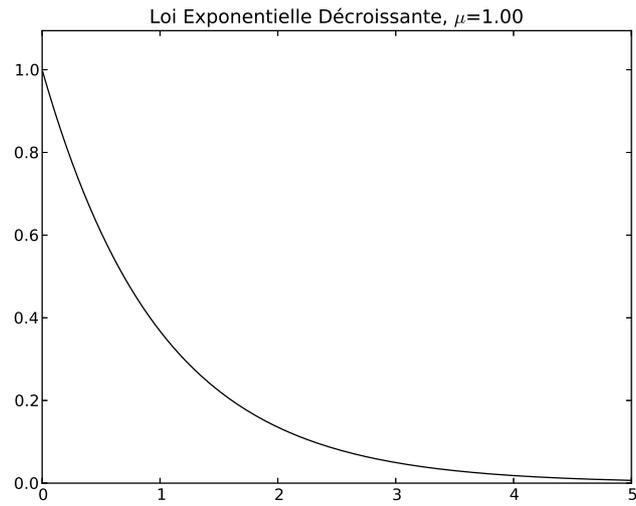


FIGURE 4.3 – Loi Exponentielle Décroissante

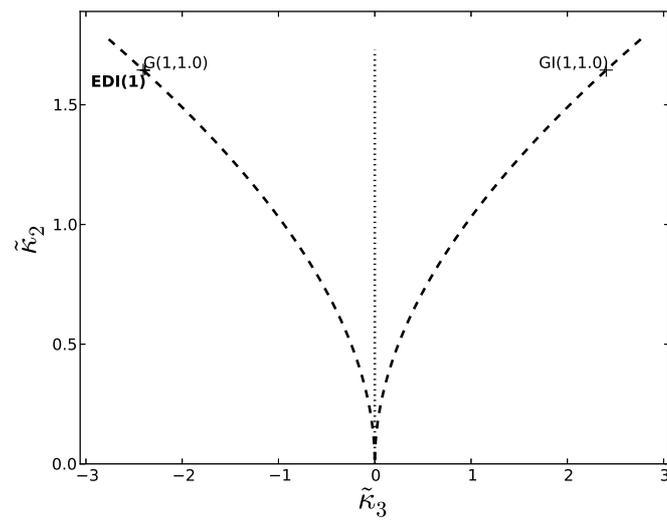


FIGURE 4.4 – Loi Exponentielle Décroissante dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$.

Loi Exponentielle Décroissante	
$\mathcal{ED}[\mu](x)$	$\frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}}$
Loi inverse	$\mathcal{EDI}[\mu](x)$
Cas limite	
Construction	
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \Gamma(s)$
Moments	$\begin{cases} m_1 = \mu \\ m_2 = 2\mu^2 \\ m_r = \Gamma(r+1)\mu^r \quad -1 < r \end{cases}$
Ecart type	μ
Coefficient de variation	1
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \log(\mu) + \Psi(1) \\ \tilde{\kappa}_2 = \Psi(1,1) \\ \tilde{\kappa}_r = \Psi(r-1,1) \end{cases}$
Mode	0
Formulation Meijer	$\frac{1}{\mu} \bar{G}_{0,1}^{1,0} \left(\frac{x}{\mu} \middle \begin{matrix} \cdot & ; & \cdot \\ 0 & ; & \cdot \end{matrix} \right)$
Fonction de répartition	$\bar{G}_{1,2}^{1,1} \left(\frac{x}{\mu} \middle \begin{matrix} 1 & ; & \cdot \\ 0 & ; & 0 \end{matrix} \right)$

4.1.4 Loi Exponentielle Décroissante Inverse

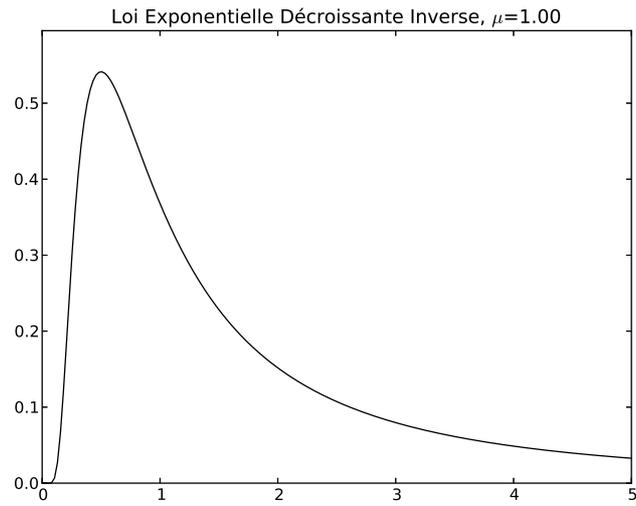


FIGURE 4.5 – Loi Exponentielle Décroissante Inverse

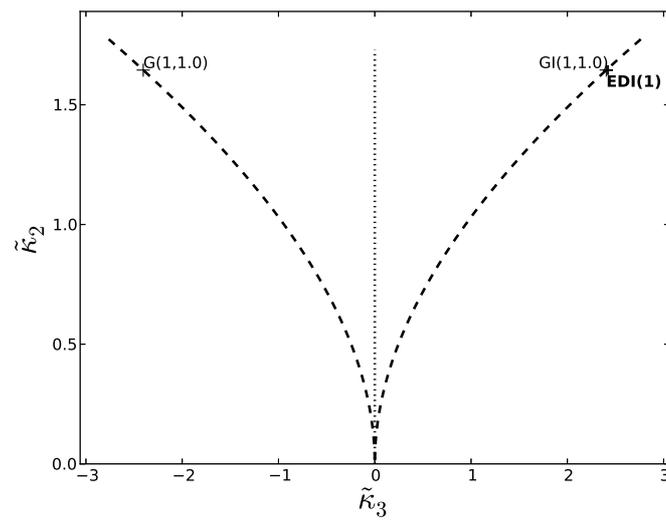


FIGURE 4.6 – Loi Exponentielle Décroissante Inverse dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$.

Loi Exponentielle Décroissante Inverse	
$\mathcal{EDL}[\mu](x)$	$\frac{1}{\mu} \left(\frac{\mu}{x}\right)^2 e^{-\frac{\mu}{x}}$
Loi inverse	$\mathcal{ED}[\mu](x)$
Cas limite	
Construction	
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \Gamma(2-s)$
Moments	$\begin{cases} m_1 = \text{sans} \\ m_2 = \text{sans} \\ m_r = \mu^r \Gamma(1-r) \quad r < 1 \end{cases}$
Ecart type	sans
Coefficient de variation	sans
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \log \mu - \Psi(1) \\ \tilde{\kappa}_2 = \Psi(1, 1) \\ \tilde{\kappa}_r = (-1)^r \Psi(r-1, 1) \end{cases}$
Mode	$\frac{\mu}{2}$
Formulation Meijer	$\frac{1}{\mu} G_{1,0}^{0,1} \left(\frac{x}{\mu} \mid \begin{matrix} -1 & ; & \cdot \\ \cdot & ; & \cdot \end{matrix} \right)$
Fonction de répartition	$\bar{G}_{2,1}^{0,2} \left(\frac{x}{\mu} \mid \begin{matrix} 1, 0 & ; & \cdot \\ \cdot & ; & 0 \end{matrix} \right)$

4.2 Lois à deux paramètres

4.2.1 Loi Gamma

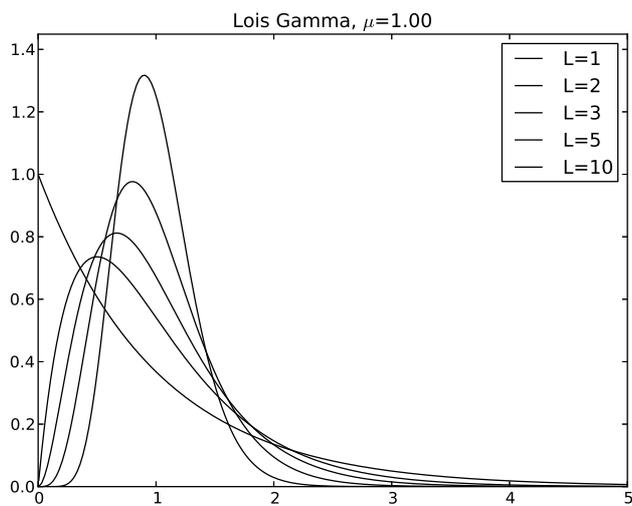


FIGURE 4.7 – Loi Gamma

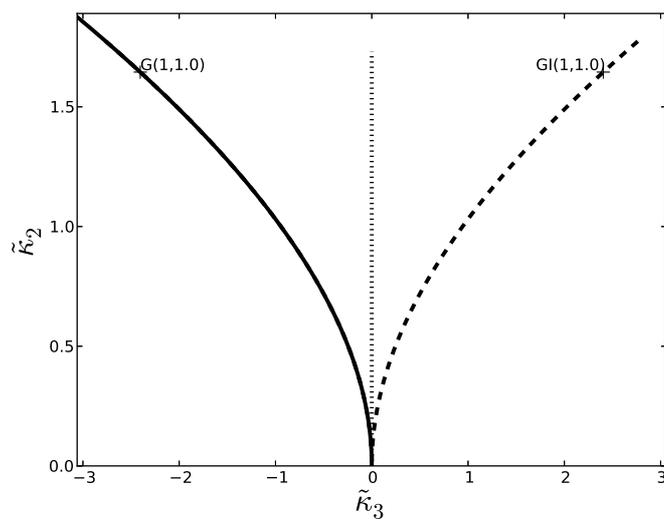


FIGURE 4.8 – Loi Gamma dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$.

Loi Gamma : $\mathcal{G}[\mu, L]$	
$\mathcal{G}[\mu, L](x)$	$\frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{Lx}{\mu}\right)^{L-1} e^{-\frac{Lx}{\mu}} \quad L > 0$
Loi inverse	$\mathcal{GI}[\mu, L]$
Cas limite $L \rightarrow \infty$	$\mathcal{H}[\mu]$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \quad \text{Re}(s) > 1 - L$
Moments	$\begin{cases} m_1 = \mu \\ m_2 = \mu^2 \frac{L+1}{L} \\ m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L+r)}{L^r \Gamma(L)} \end{cases} \quad -L < r$
Ecart type	$\frac{\mu}{\sqrt{L}}$
Coefficient de variation	$\sqrt{\frac{1}{L}}$
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \log(\mu) + \Psi(L) - \log(L) \\ \tilde{\kappa}_2 = \Psi(1, L) \\ \tilde{\kappa}_r = \Psi(r-1, L) \end{cases}$
Mode	$\begin{cases} \frac{L-1}{L} \mu & \text{si } L \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \in [0; \mu[$
Formulation Meijer	$\frac{L}{\mu} \frac{1}{\Gamma(L)} \bar{G}_{0,1}^{1,0} \left(\frac{Lx}{\mu} \mid L-1 \ ; \cdot \ ; \cdot \right)$
Fonction de répartition	$\frac{1}{\Gamma(L)} \bar{G}_{1,2}^{1,1} \left(\frac{Lx}{\mu} \mid 1 \ ; \cdot \ ; 0 \right)$

4.2.2 Loi Gamma Inverse

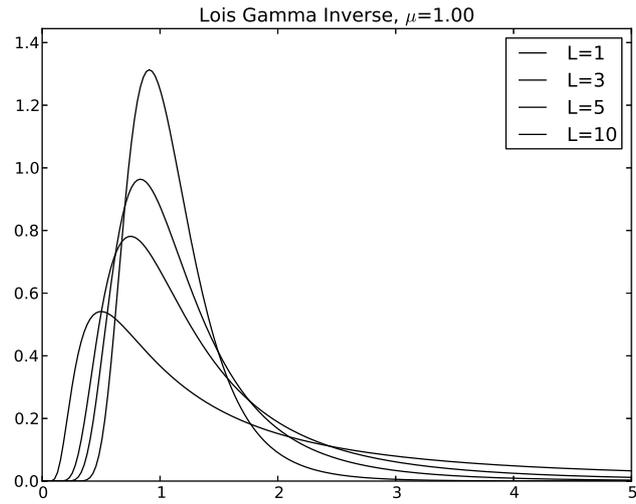


FIGURE 4.9 – Loi Gamma Inverse

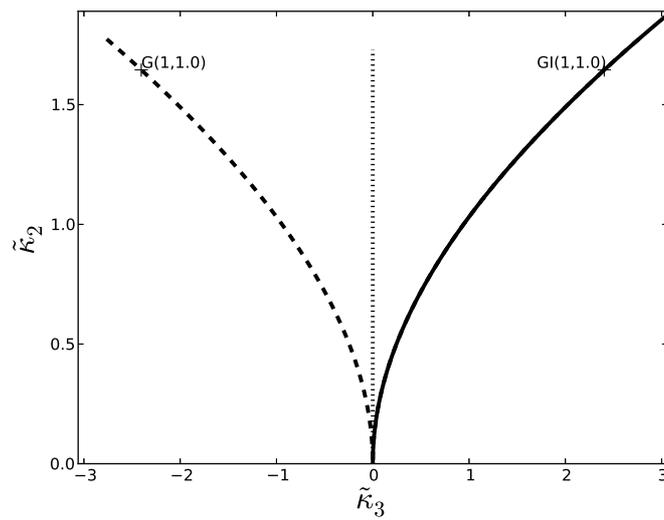


FIGURE 4.10 – Loi Gamma Inverse dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$.

Loi Gamma Inverse	
$\mathcal{GI}[\mu, M](x)$	$\frac{1}{\Gamma(M)} \frac{1}{M\mu} \left(\frac{M\mu}{x}\right)^{M+1} e^{-\frac{M\mu}{x}} \quad M > 0$
Loi inverse	$\mathcal{G}[\mu, M](x)$
Cas limite $M \rightarrow \infty$	$\mathcal{H}[\mu]$
Construction	
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s} \Gamma(M)} \quad \text{Re}(s) < M + 1$
Moments	$\begin{cases} m_1 = \mu \frac{M}{M-1} & M > 1 \\ m_2 = \mu^2 \frac{M^2}{(M-1)(M-2)} & M > 2 \\ m_r = \mu^r \frac{\Gamma(M-r)}{M^{-r} \Gamma(M)} & r < M \end{cases}$
Ecart type	$\mu \frac{M}{(M-1)\sqrt{M-2}} \quad M > 2$
Coefficient de variation	$\sqrt{\frac{1}{M-2}} \quad M > 2$
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \log \mu - (\Psi(M) - \log(M)) \\ \tilde{\kappa}_2 = \Psi(1, M) \\ \tilde{\kappa}_r = (-1)^r \Psi(r-1, M) \end{cases}$
Mode	$\frac{M}{M+1} \mu \in]0; \mu[$
Formulation Meijer	$\frac{1}{M\mu} \frac{1}{\Gamma(M)} \bar{G}_{1,0}^{0,1} \left(\frac{x}{M\mu} \left \begin{array}{c} -M \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \right)$
Fonction de répartition	$\frac{1}{\Gamma(M)} \bar{G}_{2,1}^{0,2} \left(\frac{x}{M\mu} \left \begin{array}{c} 1, -M+1 \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ 0 \end{array} \right. \right)$

4.2.3 Loi Log-normale

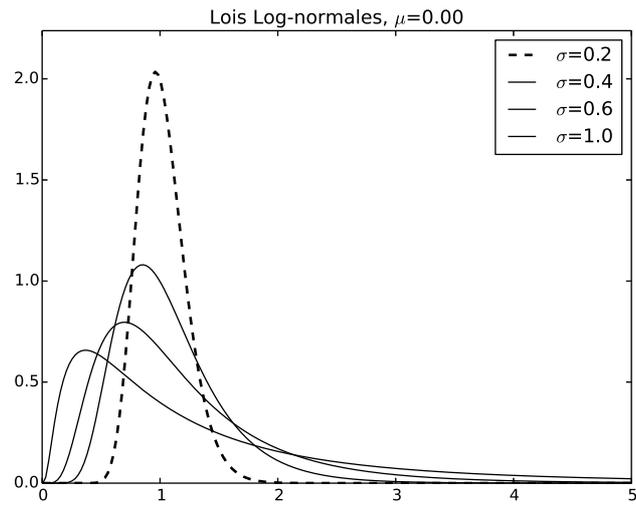


FIGURE 4.11 – Loi Log-normale

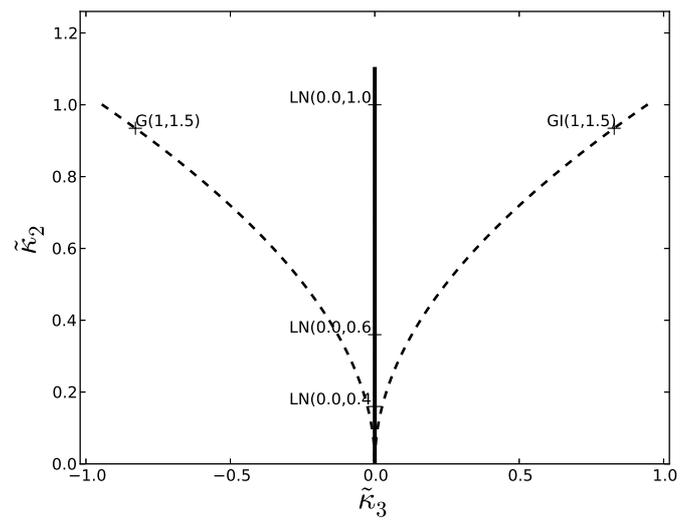


FIGURE 4.12 – Loi Log-normale dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$.

Loi Log-normale	
$\mathcal{L}[\mu, \sigma](x)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}x} e^{\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$
Loi inverse	$\mathcal{L}[-\mu, \sigma](x)$
Cas limite $\sigma \rightarrow 0$	$\mathcal{H}[e^\mu]$
Construction	
Log-fonction caractéristique	$e^{\mu(s-1)} e^{\left(\sigma^2 \frac{(s-1)^2}{2}\right)}$
Moments	$\begin{cases} m_1 = e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)} \\ m_2 = e^{(2\mu + 2\sigma^2)} \\ m_r = e^{\left(r\mu + \frac{r^2}{2}\sigma^2\right)} \quad \forall r \in]-\infty; \infty[\end{cases}$
Ecart type	$e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)} \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$
Coefficient de variation	$\gamma = \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{k}_1 = \mu \\ \tilde{k}_2 = \sigma^2 \\ \tilde{k}_r = 0 \quad \forall r \geq 3 \end{cases}$
Mode	$e^{\mu - \sigma^2}$
Formulation Meijer	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}x} \bar{G}_{0,1}^{1,0} \left(\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2} \middle \begin{matrix} \cdot & ; & \cdot \\ 0 & ; & \cdot \end{matrix} \right)$
Fonction de répartition	$1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \bar{G}_{1,2}^{1,1} \left(\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2} \middle \begin{matrix} 1 & ; & \cdot \\ \frac{1}{2} & ; & 0 \end{matrix} \right)$

4.3 Lois à trois paramètres

4.3.1 Loi \mathcal{K}

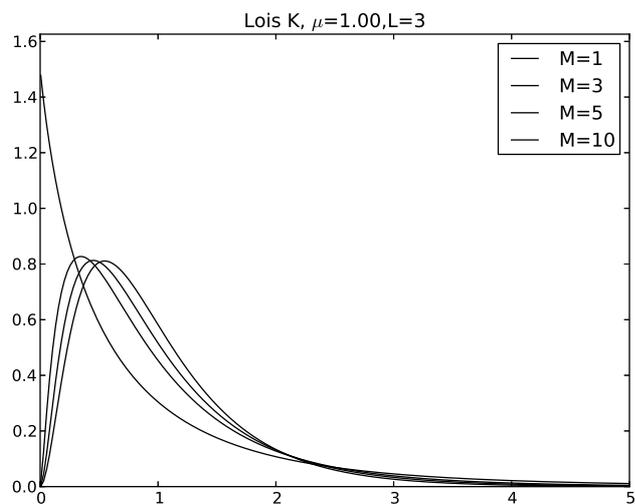
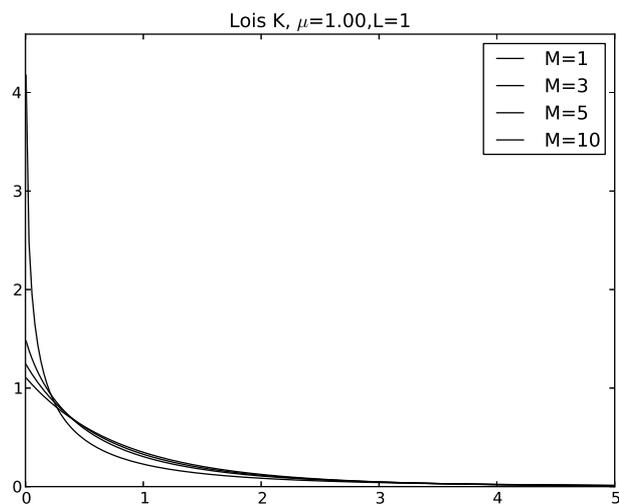


FIGURE 4.13 – Loi \mathcal{K}

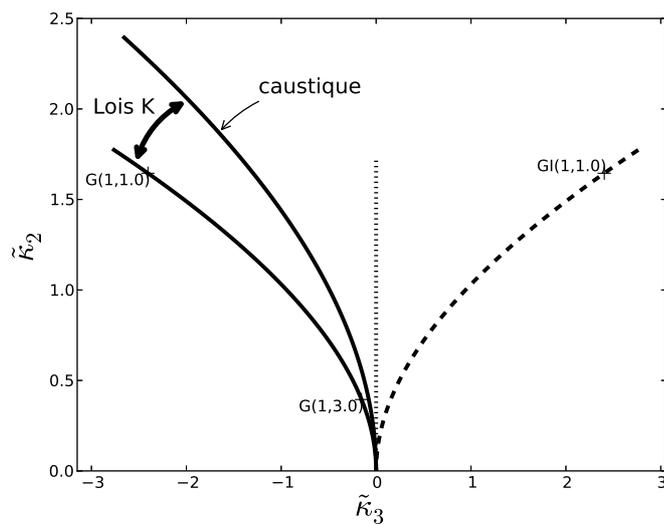
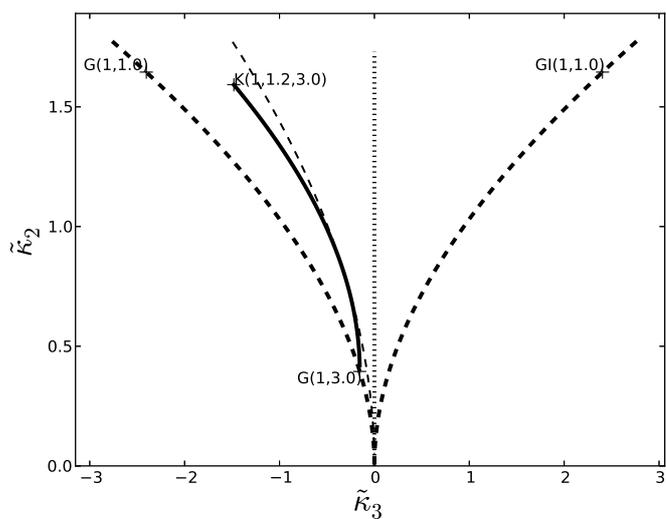


FIGURE 4.14 – Loi \mathcal{K} dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$.

Loi K : $\mathcal{K}[\mu, L, M]$	
$\mathcal{K}[\mu, L, M](x)$	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{2LM}{\mu} \left(\frac{LMx}{\mu}\right)^{\frac{M+L}{2}-1} K_{M-L} \left[2\left(\frac{LMx}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \quad L > 0, M > 0$
Loi inverse	$\mathcal{KI}[\mu, L, M](x)$
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{K}[\mu, L, M] = \mathcal{G}[\mu, M] \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{K}[\mu, L, M] = \mathcal{G}[\mu, L] \end{cases}$
Construction	$\mathcal{H}[\mu] \hat{\star} \mathcal{G}[1, L] \hat{\star} \mathcal{G}[1, M]$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1}\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+s-1)}{M^{s-1}\Gamma(M)}$
Moments	$\begin{cases} m_1 = \mu \\ m_2 = \mu^2 \frac{L+1}{L} \frac{M+1}{M} \\ m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L+r)}{L^r \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+r)}{M^r \Gamma(M)} \quad r > -\min(L, M) \end{cases}$
Ecart type	$\mu \sqrt{\frac{L+M+1}{LM}}$
Coefficient de variation	$\sqrt{\frac{L+M+1}{LM}}$
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \log(\mu) + (\Psi(L) - \log(L)) + (\Psi(M) - \log(M)) \\ \tilde{\kappa}_2 = \Psi(1, L) + \Psi(1, M) \\ \tilde{\kappa}_r = \Psi(r-1, L) + \Psi(r-1, M) \end{cases}$
Mode	pas d'expression analytique
Formulation Meijer	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{LM}{\mu} \tilde{G}_{0,2}^{2,0} \left(\frac{LMx}{\mu} \middle \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ L-1, M-1 & \cdot & \cdot \end{matrix} \right)$
Fonction de répartition	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \tilde{G}_{1,3}^{2,1} \left(\frac{LMx}{\mu} \middle \begin{matrix} 1 & \cdot & \cdot \\ L, M & \cdot & \cdot \\ & & 0 \end{matrix} \right)$

K est la fonction de Bessel modifiée de troisième espèce

4.3.2 Loi K inverse

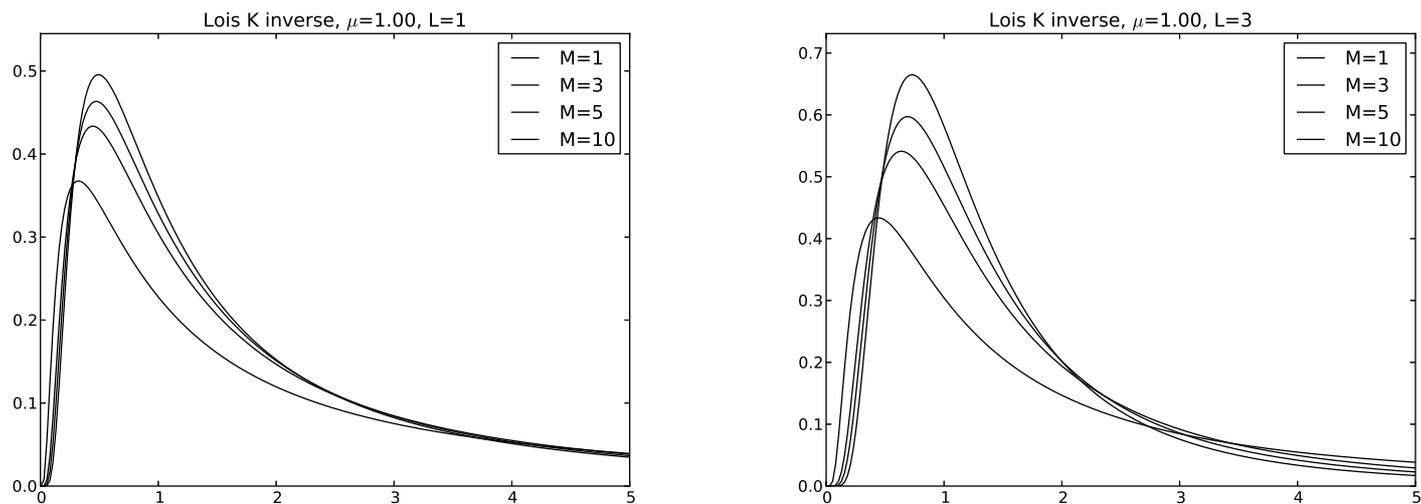


FIGURE 4.15 – Loi K Inverse

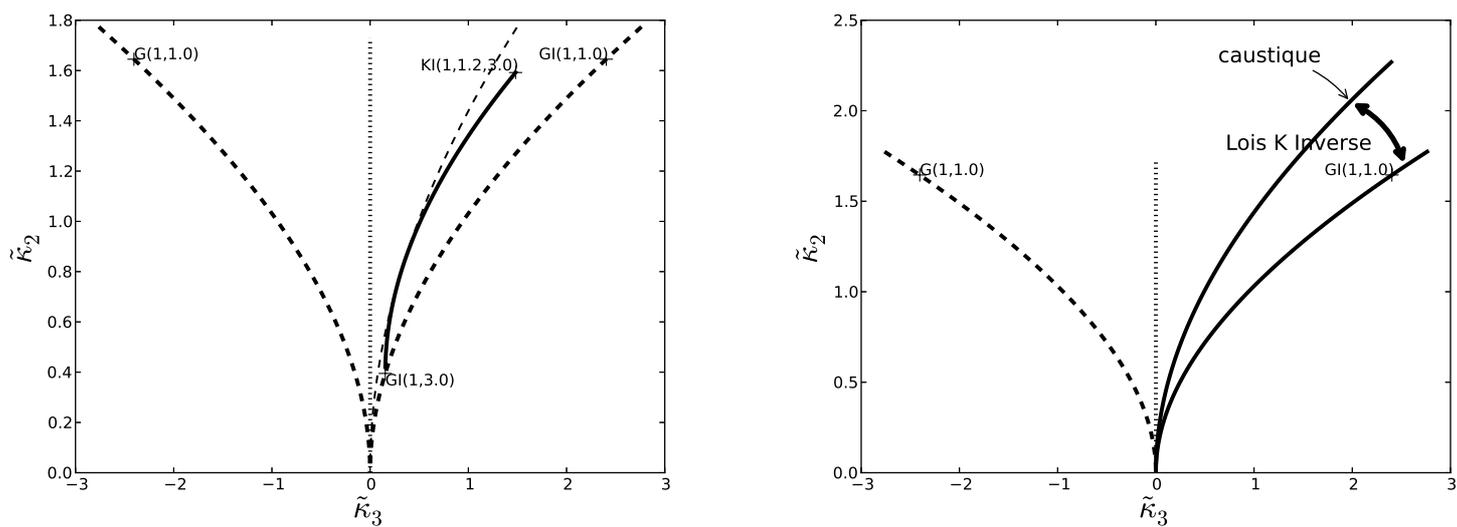


FIGURE 4.16 – Loi \mathcal{KI} dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$.

Loi K Inverse : $\mathcal{KI}[\mu, L, M]$	
$\mathcal{KI}[\mu, L, M](x)$	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{2}{LM\mu} \left(\frac{LM\mu}{x}\right)^{\frac{M+L}{2}+1} K_{M-L} \left[2\left(\frac{LM\mu}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \quad L > 0, M > 0$
Loi inverse	$\mathcal{K}[\mu, L, M](x)$
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{KI}[\mu, L, M] = \mathcal{GI}[\mu, M] \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{KI}[\mu, L, M] = \mathcal{GI}[\mu, L] \end{cases}$
Construction	$\mathcal{H}[\mu] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, M]$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+1-s)}{L^{1-s} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s} \Gamma(M)}$
Moments	$\begin{cases} m_1 = \mu \frac{L}{L-1} \frac{M}{M-1} & L > 1, M > 1 \\ m_2 = \mu^2 \frac{L^2}{(L-1)(L-2)} \frac{M^2}{(M-1)(M-2)} & L > 2, M > 2 \\ m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L-r)L^r}{\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M-r)M^r}{\Gamma(M)} & r < \min(L, M) \end{cases}$
Ecart type	$\sqrt{\frac{L+M-3}{(L-2)(M-2)}} \frac{L}{L-1} \frac{M}{M-1} \mu \quad L > 2, M > 2$
Coefficient de variation	$\sqrt{\frac{L+M-3}{(L-2)(M-2)}} \quad L > 2, M > 2$
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \log(\mu) - (\Psi(L) - \log(L)) - (\Psi(M) - \log(M)) \\ \tilde{\kappa}_2 = \Psi(1, L) + \Psi(1, M) \\ \tilde{\kappa}_r = (-1)^r (\Psi(r-1, L) + \Psi(r-1, M)) \end{cases}$
Mode	pas d'expression analytique
Formulation Meijer	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{1}{LM\mu} \bar{G}_{2,0}^{0,2} \left(\frac{x}{LM\mu} \left \begin{array}{c} -L, -M \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right)$
Fonction de répartition	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \bar{G}_{3,1}^{0,3} \left(\frac{x}{LM\mu} \left \begin{array}{c} -L+1, -M+1, 1 \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{array} \right)$

K est la fonction de Bessel modifiée de troisième espèce

4.3.3 Lois de Fisher

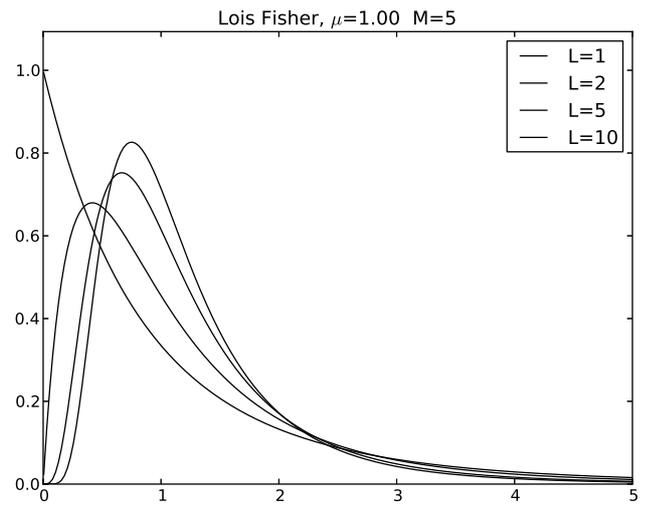
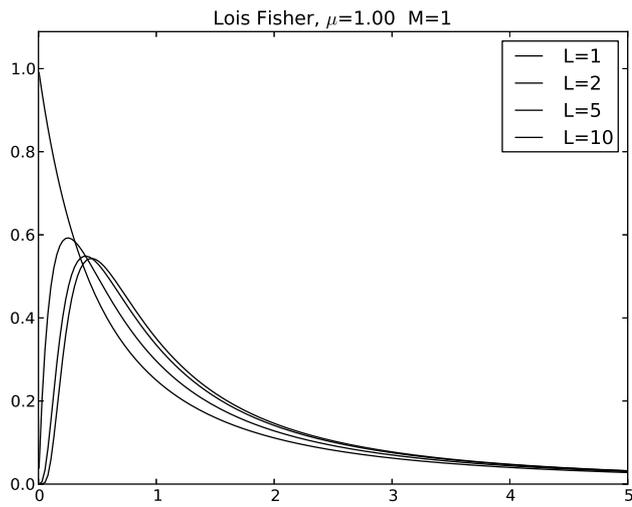


FIGURE 4.17 – Loi \mathcal{F}

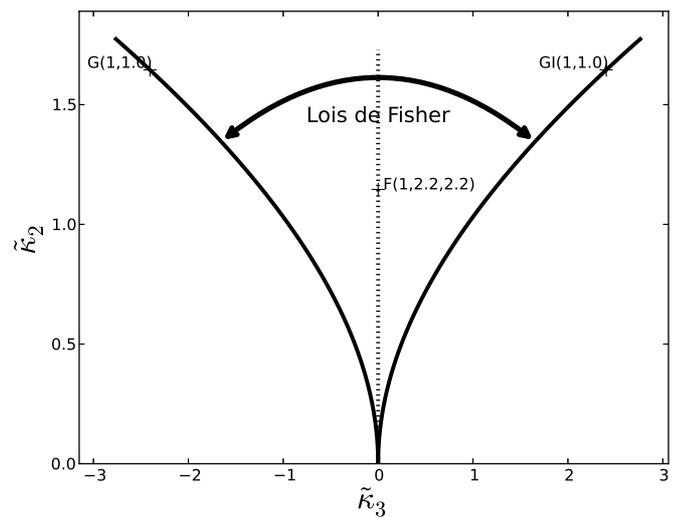
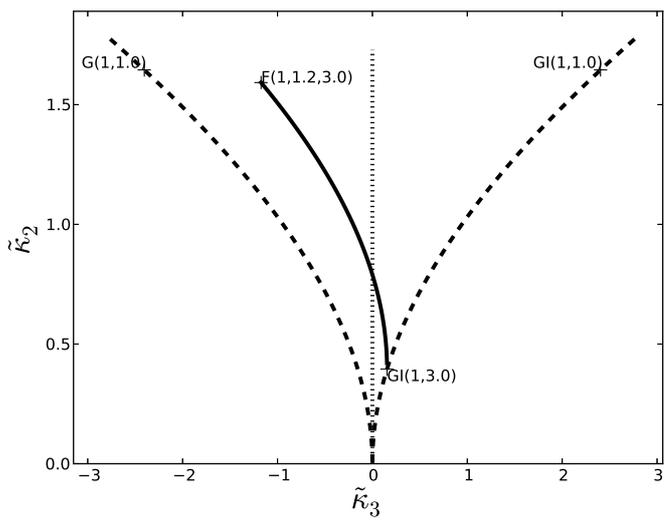


FIGURE 4.18 – Loi \mathcal{F} dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$.

Loi de Fisher : $\mathcal{F}[\mu, L, M]$	
$\mathcal{F}[\mu, L, M](x)$	$\frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{\left(\frac{Lx}{M\mu}\right)^{L-1}}{\left(1+\frac{Lx}{M\mu}\right)^{L+M}} \quad L > 0, M > 0$
Loi inverse	$\mathcal{F}[\mu, M, L]$
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{F}[\mu, L, M] = \mathcal{GI}[\mu, M] \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{F}[\mu, L, M] = \mathcal{G}[\mu, L] \end{cases}$
Construction	$\mathcal{H}[\mu] \hat{\star} \mathcal{G}[1, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, M]$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1}\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s}\Gamma(M)}$
Moments	$\begin{cases} m_1 = \mu \frac{M}{M-1} & M > 1 \\ m_2 = \mu^2 \frac{L+1}{L} \frac{M^2}{(M-1)(M-2)} & M > 2 \\ m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L+r)}{L^r \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M-r)}{M^{-r} \Gamma(M)} & -L < r < M \end{cases}$
Ecart type	$\mu \frac{M}{M-1} \sqrt{\frac{L+M-1}{L(M-2)}} \quad M > 2$
Coefficient de variation	$\sqrt{\frac{L+M-1}{L(M-2)}} \quad M > 2$
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \log \mu + (\Psi(L) - \log(L)) - (\Psi(M) - \log(M)) \\ \tilde{\kappa}_2 = \Psi(1, L) + \Psi(1, M) \\ \tilde{\kappa}_r = \Psi(r-1, L) + (-1)^r \Psi(r-1, M) \end{cases}$
Mode	$\begin{cases} \mu \frac{(L-1)M}{L(M+1)} & L > 1 \\ 0 & L \leq 1 \end{cases} \in [0; \mu[$
Formulation Meijer	$\frac{L}{M\mu} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \bar{G}_{1,1}^{1,1} \left(\frac{Lx}{M\mu} \mid \begin{matrix} -M & ; & \cdot \\ L-1 & ; & \cdot \end{matrix} \right)$
Fonction de répartition	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \bar{G}_{2,2}^{1,2} \left(\frac{Lx}{M\mu} \mid \begin{matrix} 1, -M+1 & ; & \cdot \\ L & ; & 0 \end{matrix} \right)$

4.3.4 Loi Beta

Appliquée à la fonction de répartition, la condition B.43 impose :

$$L < M \tag{4.1}$$

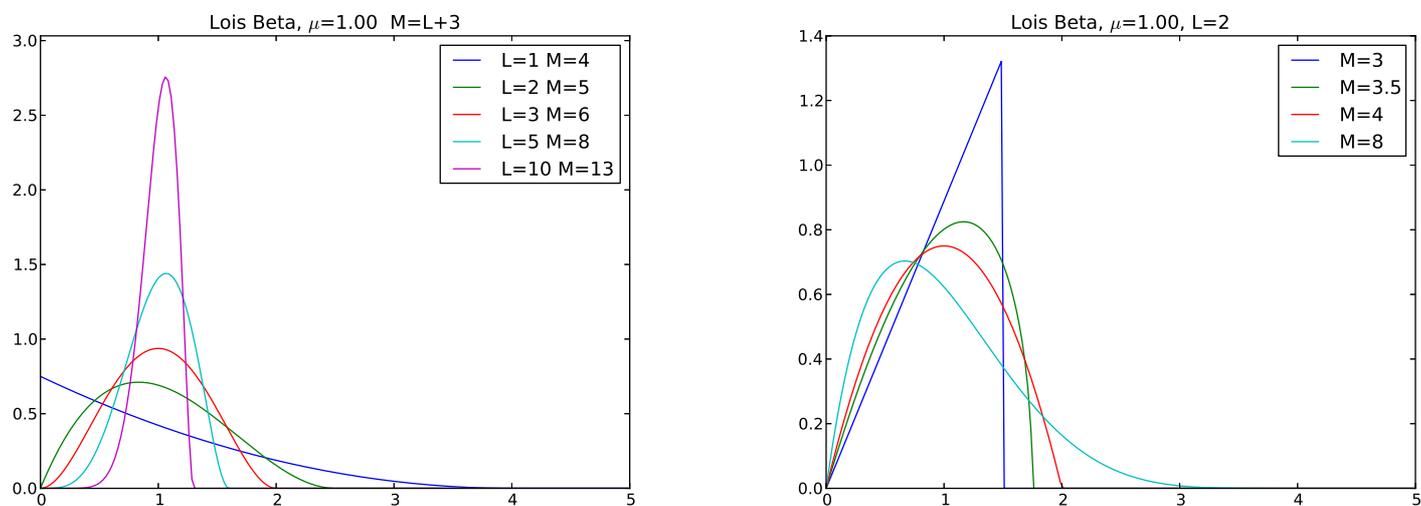


FIGURE 4.19 – Loi \mathcal{B}

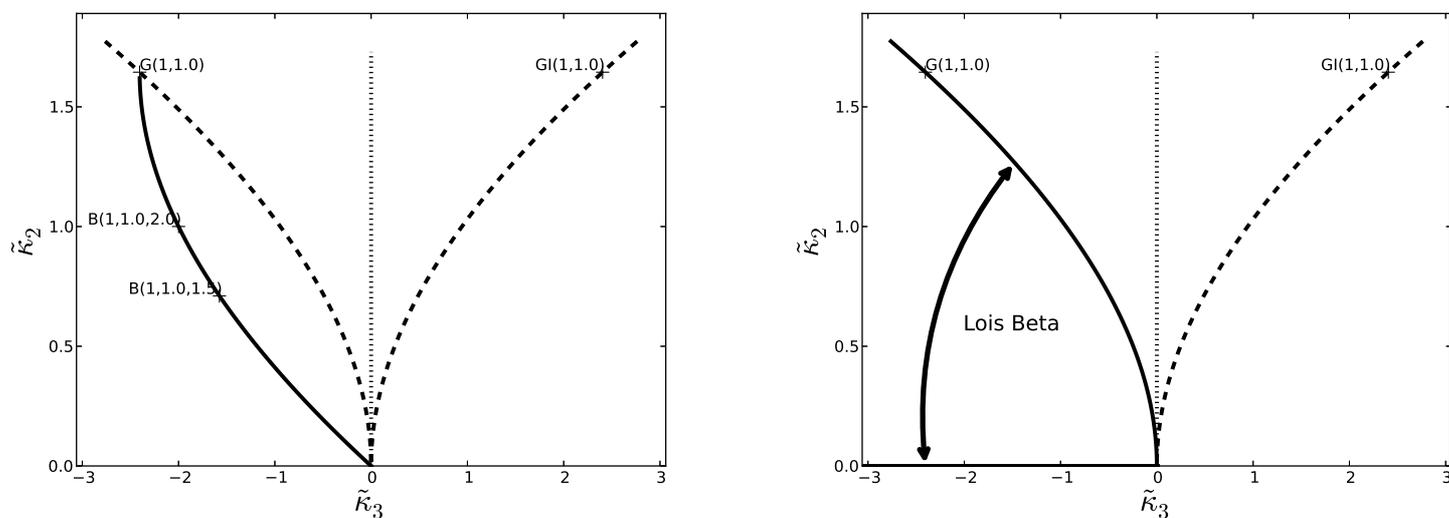


FIGURE 4.20 – Loi \mathcal{B} dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$.

Loi Beta : $\mathcal{B}[\mu, L, M]$	
$\mathcal{B}[\mu, L, M](x)$	$\frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \left(\frac{Lx}{M\mu}\right)^{L-1} \left(1 - \frac{Lx}{M\mu}\right)^{M-L-1} \quad x \in \left]0; \frac{M\mu}{L}\right[$ $L < M$
Loi inverse	$\mathcal{BI}[\mu, L, M](x)$
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{B}[\mu, L, M] = \mathcal{G}[\mu, L] \\ \lim_{M \rightarrow L^+} \mathcal{B}[\mu, L, M] = \mathcal{H}[\mu] \end{cases}$
Construction	$\mathcal{B}[\mu, L, M] \hat{\star} \mathcal{G}[\mu = 1, M] = \mathcal{G}[\mu, L]$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \frac{M^{s-1} \Gamma(M)}{\Gamma(M+s-1)}$
Moments	$\begin{cases} m_1 = \mu \\ m_2 = \mu^2 \frac{L+1}{L} \frac{M}{M+1} \\ m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L+r)}{L^r \Gamma(L)} \frac{M^r \Gamma(M)}{\Gamma(M+r)} \quad r > -L \end{cases}$
Ecart type	$\mu \sqrt{\frac{M-L}{L(M+1)}}$
Coefficient de variation	$\gamma = \sqrt{\frac{M-L}{L(M+1)}}$
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \log \mu + (\Psi(L) - \log L) - (\Psi(M) - \log M) \\ \tilde{\kappa}_2 = \Psi(1, L) - \Psi(1, M) \\ \tilde{\kappa}_r = \Psi(r-1, L) - \Psi(r-1, M) \end{cases}$
Mode	$\begin{cases} \frac{(L-1)M}{L(M-2)} \mu & 1 < L < M, M > 2 \\ \frac{M}{L} \mu & 1 < L < M, M \leq 2 \\ 0 & L < 1, M > 2 \\ \text{bimode} & L < 1, L < M, M \leq 2 \end{cases} \in \left]0; \frac{M\mu}{L}\right[$
Formulation Meijer	$\frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)} \bar{G}_{1,1}^{1,0} \left(\frac{Lx}{M\mu} \middle \begin{matrix} \cdot & ; & M-1 \\ L-1 & ; & \cdot \end{matrix} \right)$
Fonction de répartition	$\frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)} \bar{G}_{2,2}^{1,1} \left(\frac{Lx}{M\mu} \middle \begin{matrix} 1 & ; & M \\ L & ; & 0 \end{matrix} \right)$

4.3.5 Loi Beta Inverse

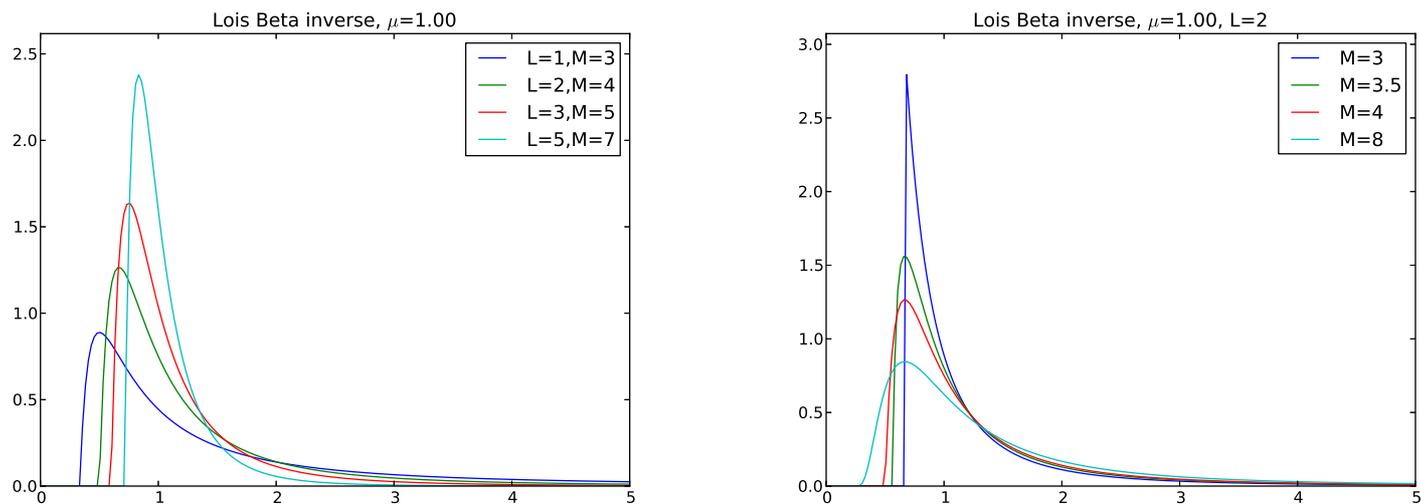


FIGURE 4.21 – Loi \mathcal{BI}

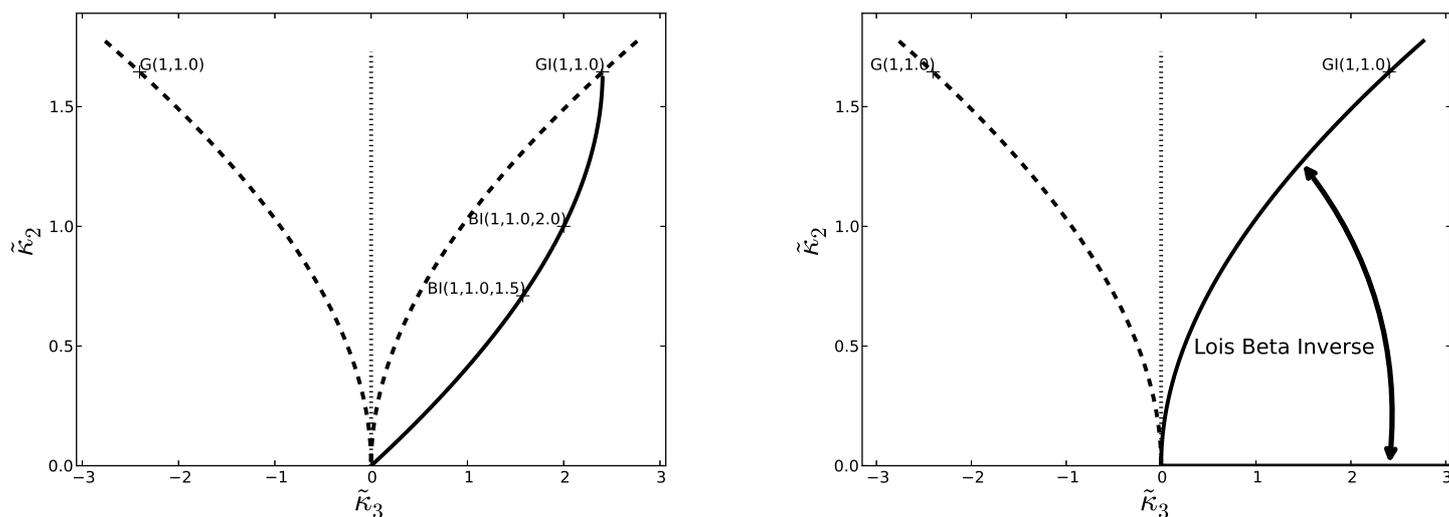


FIGURE 4.22 – Loi \mathcal{BI} dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$.

Loi Beta Inverse : $\mathcal{BI}[\mu, L, M]$	
$\mathcal{BI}[\mu, L, M](x)$	$\frac{M}{L\mu} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \frac{\left(\frac{Mx}{L\mu} - 1\right)^{M-L-1}}{\left(\frac{Mx}{L\mu}\right)^M} \quad x \in \left[\frac{L\mu}{M}; \infty\right[$ $L < M$
Loi inverse	$\mathcal{B}[\mu, L, M](x)$
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{BI}[\mu, L, M] = \mathcal{GI}[\mu, L] \\ \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{BI}[\mu, L, M] = \mathcal{H}[\mu] \end{cases}$
Construction	$\mathcal{BI}[\mu, L, M] \hat{\star} \mathcal{GI}[\mu, M] = \mathcal{GI}[\mu, L]$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+1-s)}{L^{1-s} \Gamma(L)} \frac{M^{1-s} \Gamma(M)}{\Gamma(M+1-s)}$
Moments	$\begin{cases} m_1 = \mu \frac{L}{L-1} \frac{M-1}{M} & L > 1 \\ m_2 = \mu^2 \frac{L^2}{(L-1)(L-2)} \frac{(M-1)(M-2)}{M^2} & L > 2 \\ m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L-r)}{L^{-r} \Gamma(L)} \frac{M^{-r} \Gamma(M)}{\Gamma(M-r)} & r < L \end{cases}$
Ecart type	$\mu \frac{L}{L-1} \frac{M-1}{M} \sqrt{\frac{M-L}{(L-2)(M-1)}} \quad L > 2$
Coefficient de variation	$\gamma = \sqrt{\frac{M-L}{(L-2)(M-1)}} \quad L > 2$
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \log \mu - (\Psi(L) - \log(L)) + (\Psi(M) - \log(M)) \\ \tilde{\kappa}_2 = \Psi(1, L) - \Psi(1, M) \\ \tilde{\kappa}_r = (-1)^r (\Psi(r-1, L) - \Psi(r-1, M)) \end{cases}$
Mode	$\begin{cases} \frac{L}{L+1} \mu & \text{si } M > L+1 \\ \frac{L}{M} \mu & \text{si } L \leq M \leq L+1 \end{cases} \in]0; \mu[$
Formulation Meijer	$\frac{M}{L\mu} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)} \bar{G}_{1,1}^{0,1} \left(\frac{Mx}{L\mu} \left \begin{array}{c} -L \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ -M \end{array} \right. \right)$
Fonction de répartition	$\frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)} \bar{G}_{2,2}^{0,2} \left(\frac{Mx}{L\mu} \left \begin{array}{c} -L+1, 1 \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ -M+1, 0 \end{array} \right. \right)$

4.3.6 Loi de Halphen (loi Inverse Gaussienne Généralisée) [37]

Proposées en 1941 par Halphen [16], les lois de Halphen sont un exemple de construction de nouvelles lois par multiplication de la loi exponentielle décroissante par la loi exponentielle décroissante inverse. Sous une forme assez générale, la loi de Halphen s'écrit¹ :

$$H[\alpha, \beta, \varepsilon](x) = \frac{1}{2 \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{2}} K_{\alpha}(2\sqrt{\beta\varepsilon})} x^{\alpha} e^{-\beta x - \varepsilon x^{-1}} \quad (4.2)$$

L'allure de la loi dépend de trois paramètres :

- le paramètre α opère sur la position du mode,
- le paramètre β agit sur le comportement au voisinage de l'origine,
- le paramètre ε définit un comportement de "queue lourde".

On la connaît plus souvent sous le nom de Loi Inverse Gaussienne Généralisée ([25]), mais cette dénomination est postérieure aux travaux d'Halphen.

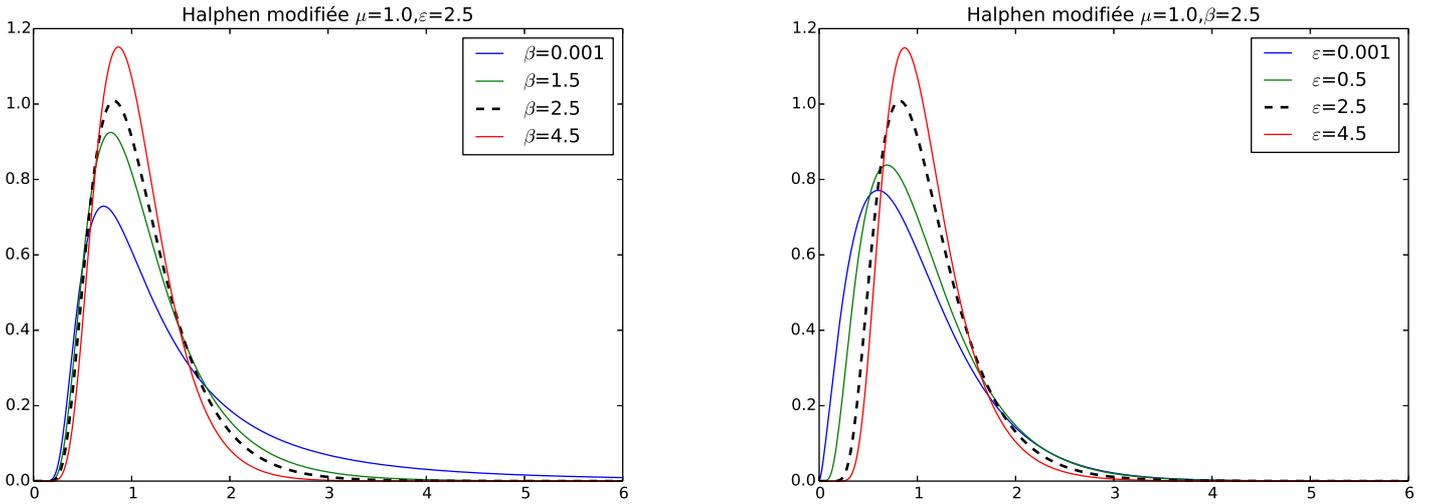


FIGURE 4.23 – Lois de Halphen modifiée. A gauche : pour $\beta \rightarrow 0$, on retrouve une loi Gamma Inverse. A droite : pour $\varepsilon \rightarrow 0$, on retrouve une loi Gamma.

Cette construction par multiplication de densités de probabilité s'avère beaucoup plus compliquée analytiquement parlant que la construction par convolution de Mellin. Cependant le cadre des log-statistiques permet de mener des calculs puisque l'on sait que la transformée de Mellin du produit de deux fonctions s'écrit sous la forme d'une convolution de leurs transformées de Mellin (relation 2.3). Ce calcul peut être mené à bien dans le cadre du produit d'une fonction exponentielle décroissante par une fonction exponentielle décroissante inverse, ce qui permet d'écrire ([37]) :

$$\mathcal{M} \left[e^{-\beta x} e^{-\varepsilon x^{-1}} \right] (s) = 2 \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{s}{2}} K_s(2\sqrt{\beta\varepsilon})$$

Associée à la propriété **TM2** de la transformée de Mellin, cette expression permet de calculer la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi de Halphen :

$$\phi(s) = \frac{1}{K_{\alpha}(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{s-1}{2}} K_{\alpha+s-1}(2\sqrt{\beta\varepsilon}) \quad (4.3)$$

Pour permettre une utilisation plus pratique de la loi de Halphen, nous proposons la loi de Halphen modifiée en fixant la valeur de α par la relation $\alpha = \beta - \varepsilon$ et en introduisant un paramètre μ de type échelle, ce qui donne la loi $\mathcal{HM}[\mu, \beta, \varepsilon]$:

$$\mathcal{HM}[\mu, \beta, \varepsilon](x) = \frac{1}{2\mu \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{\beta-\varepsilon}{2}} K_{\beta-\varepsilon}(\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{x}{\mu}\right)^{\beta-\varepsilon-1} e^{-\frac{\beta x}{\mu} - \frac{\varepsilon \mu}{x}} \quad (4.4)$$

1. En pratique, on trouve trois lois de Halphen inspirées de cette définition [37]

On a ainsi une loi à trois paramètres : un paramètre d'échelle (μ) et deux paramètres de formes, β –qui ressemble au paramètre de forme L de la loi Gamma–, et ε –qui ressemble au paramètre de forme M de la loi Gamma Inverse–.

Loi de Halphen modifiée $\mathcal{HM}[\mu, \beta, \varepsilon]$	
$\mathcal{HM}[\mu, \beta, \varepsilon](x)$	$\frac{1}{2\mu\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{\beta-\varepsilon}{2}} K_{\beta-\varepsilon}(\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{x}{\mu}\right)^{\beta-\varepsilon-1} e^{-\frac{\beta x}{\mu} - \frac{\varepsilon\mu}{x}}$
Loi inverse	$\mathcal{HM}[\mu, \varepsilon, \beta]$
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{\beta \rightarrow 0} \mathcal{HM}[\mu, \beta, \varepsilon] = \mathcal{GI}[\mu, \varepsilon] \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{HM}[\mu, \beta, \varepsilon] = \mathcal{G}[\mu, \beta] \end{cases}$
Construction	$\propto \mathcal{G}[\mu, \beta] \mathcal{GI}[\mu, \varepsilon]$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{1}{K_{\beta-\varepsilon}(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{s-1}{2}} K_{\beta-\varepsilon+s-1}(2\sqrt{\beta\varepsilon})$
Moments	$\begin{cases} m_1 = \mu \frac{1}{K_{\beta-\varepsilon}(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} K_{\beta-\varepsilon+1}(2\sqrt{\beta\varepsilon}) \\ m_2 = \mu^2 \frac{1}{K_{\beta-\varepsilon}(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \frac{\varepsilon}{\beta} K_{\beta-\varepsilon+2}(2\sqrt{\beta\varepsilon}) \\ m_r = \mu^r \frac{1}{K_{\beta-\varepsilon}(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{r}{2}} K_{\beta-\varepsilon+r}(2\sqrt{\beta\varepsilon}) \end{cases}$
Ecart type	
Coefficient de variation	
Log-Cumulants	pas de forme analytique connue
Mode	$\frac{(\beta-\varepsilon-1) + \sqrt{(\beta-\varepsilon-1)^2 + 4\varepsilon\beta}}{2\beta} \mu$
Formulation Meijer	$\propto \bar{G}_{0,1}^{1,0} \left(\frac{\beta x}{\mu} \middle \begin{matrix} \cdot & ; & \cdot \\ \beta - 1 & ; & \cdot \end{matrix} \right) \times \bar{G}_{1,0}^{0,1} \left(\frac{x}{\varepsilon\mu} \middle \begin{matrix} -\varepsilon & ; & \cdot \\ \cdot & ; & \cdot \end{matrix} \right)$
Fonction de répartition	

4.4 Lois à 4 paramètres

4.4.1 Loi “super K”

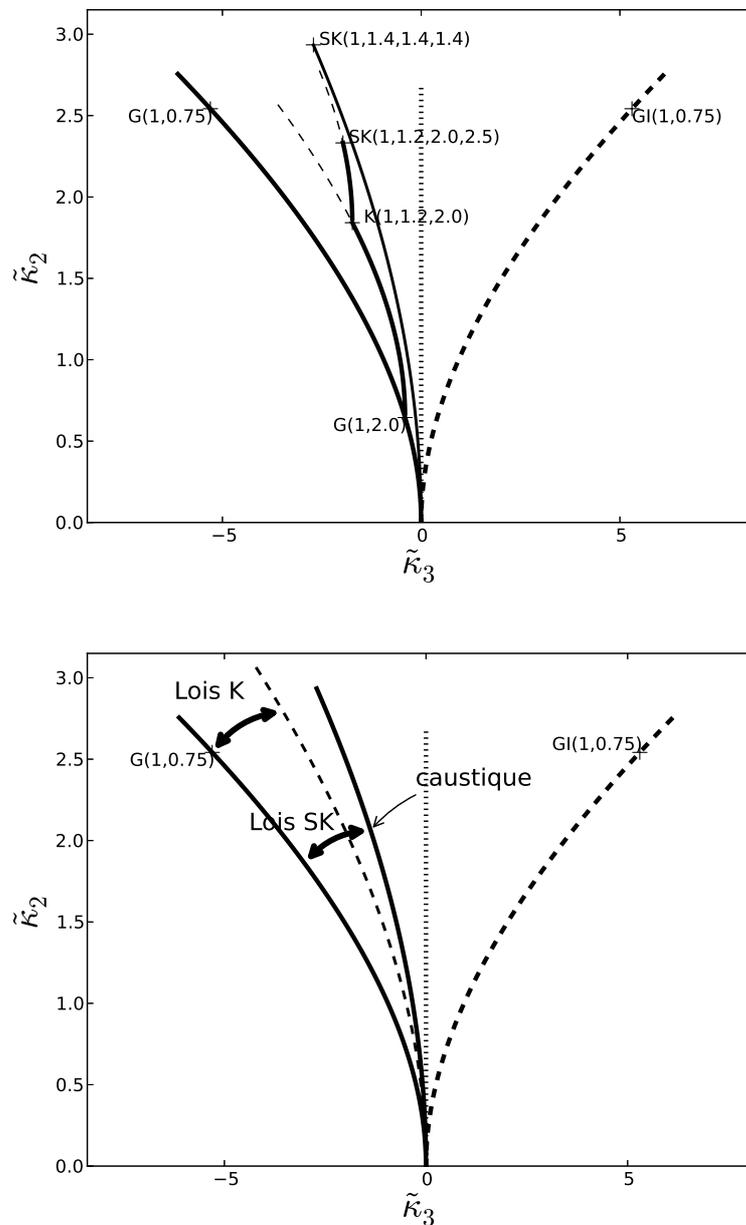


FIGURE 4.24 – Loi Q_{SK} dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$.

Loi "super K" : $\mathcal{Q}_{SK}[\mu, L, M, N]$	
$\mathcal{Q}_{SK}[\mu, L, M, N](x)$	$\frac{LMN}{\mu} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)\Gamma(N)} \bar{G}_{0,3}^{3,0} \left(\frac{LMNx}{\mu} \mid \begin{array}{c} L-1, M-1, N-1 \\ ; \\ \cdot \\ ; \\ \cdot \end{array} \right)$ $L > 0, M > 0, N > 0$
Loi inverse	$\mathcal{Q}_{SKI}[\mu, L, M, N]$
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{SK}[\mu, L, M, N] = \mathcal{K}[\mu, M, N] \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{SK}[\mu, L, M, N] = \mathcal{K}[\mu, L, N] \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{SK}[\mu, L, M, N] = \mathcal{K}[\mu, L, M] \end{cases}$
Construction	$\mathcal{H}[\mu] \hat{\star} \mathcal{G}[1, L] \hat{\star} \mathcal{G}[1, M] \hat{\star} \mathcal{G}[1, N]$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1}\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+s-1)}{M^{s-1}\Gamma(M)} \frac{\Gamma(N+s-1)}{N^{s-1}\Gamma(N)}$
Moments	$\begin{cases} m_1 = \mu \\ m_2 = \mu^2 \frac{L+1}{L} \frac{M+1}{M} \frac{N+1}{N} \\ m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L+r)}{L^r \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+r)}{M^r \Gamma(M)} \frac{\Gamma(N+r)}{N^r \Gamma(N)} \quad r > -\min(L, M, N) \end{cases}$
Ecart type	
Coefficient de variation	
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \log \mu + (\Psi(L) - \log(L)) + (\Psi(M) - \log(M)) + (\Psi(N) - \log(N)) \\ \tilde{\kappa}_2 = \Psi(1, L) + \Psi(1, M) + \Psi(1, N) \\ \tilde{\kappa}_r = \Psi(r-1, L) + \Psi(r-1, M) + \Psi(r-1, N) \end{cases}$
Mode	
Formulation Meijer	$\frac{LMN}{\mu} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)\Gamma(N)} \bar{G}_{0,3}^{3,0} \left(\frac{LMNx}{\mu} \mid \begin{array}{c} L-1, M-1, N-1 \\ ; \\ \cdot \\ ; \\ \cdot \end{array} \right)$
Fonction de répartition	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)\Gamma(N)} \bar{G}_{1,4}^{3,1} \left(\frac{LMNx}{\mu} \mid \begin{array}{c} 1 \\ L, M, N \\ ; 0 \end{array} \right)$

4.4.2 Loi “super K” Inverse

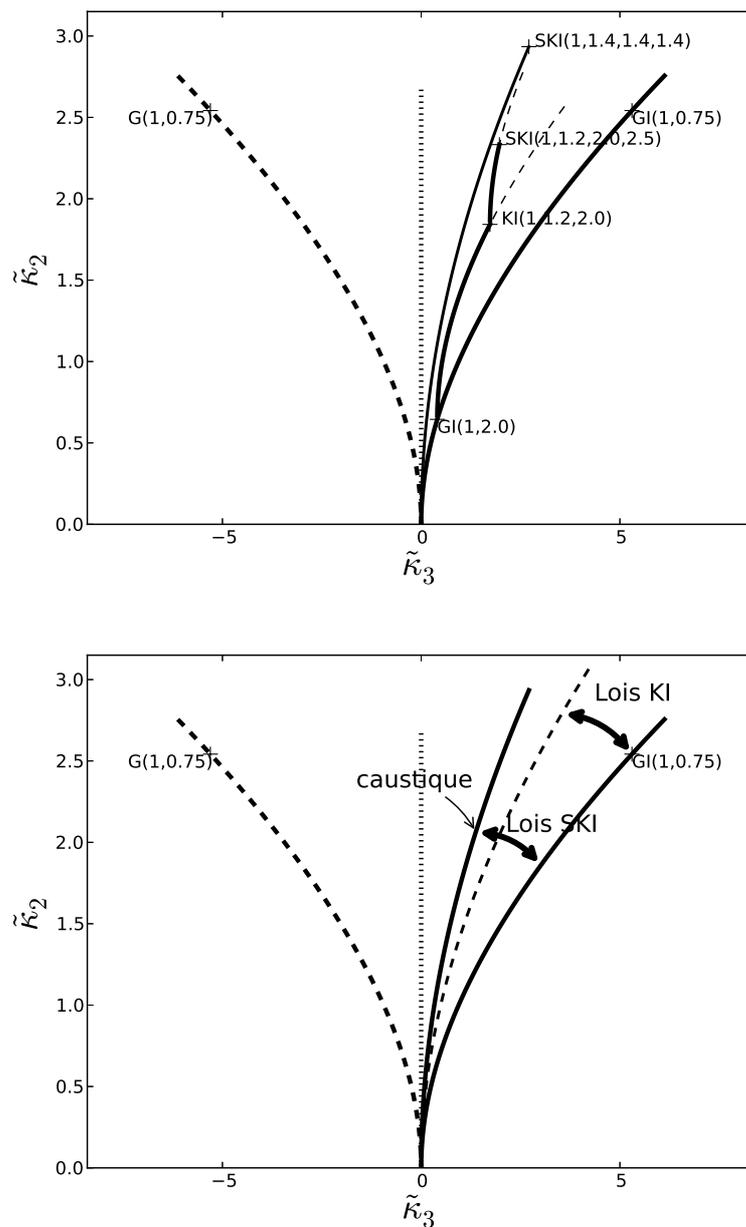


FIGURE 4.25 – Loi Q_{SKI} dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$.

Loi "super K" Inverse : $\mathcal{Q}_{SK\mathcal{I}}[\mu, L, M, N]$	
$\mathcal{Q}_{SK\mathcal{I}}[\mu, L, M, N](x)$	$\frac{1}{LMN\mu} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)\Gamma(N)} \bar{G}_{3,0}^{0,3} \left(\frac{x}{LMN\mu} \mid \begin{array}{l} -L, -M, -N \\ \cdot \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right)$ $L > 0, M > 0, N > 0$
Loi inverse	$\mathcal{Q}_{SK}[\mu, L, M, N]$
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{SK\mathcal{I}}[\mu, L, M, N] = \mathcal{KI}[\mu, M, N] \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{SK\mathcal{I}}[\mu, L, M, N] = \mathcal{KI}[\mu, L, N] \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{SK\mathcal{I}}[\mu, L, M, N] = \mathcal{KI}[\mu, L, M] \end{cases}$
Construction	$\mathcal{H}[\mu] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, M] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, N]$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+1-s)}{L^{1-s}\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s}\Gamma(M)} \frac{\Gamma(N+1-s)}{N^{1-s}\Gamma(N)}$
Moments	$\begin{cases} m_1 = \mu \frac{L}{L-1} \frac{M}{M-1} \frac{N}{N-1} & L > 1, M > 1, N > 1 \\ m_2 = \mu^2 \frac{L^2}{(L-1)(L-2)} \frac{M^2}{(M-1)(M-2)} \frac{N^2}{(N-1)(N-2)} & L > 2, M > 2, N > 2 \\ m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L-r)L^r}{\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M-r)M^r}{\Gamma(M)} \frac{\Gamma(N-r)N^r}{\Gamma(N)} & r < \min(L, M, N) \end{cases}$
Ecart type	
Coefficient de variation	
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \log \mu - (\Psi(L) - \log(L)) - (\Psi(M) - \log(M)) - (\Psi(N) - \log(N)) \\ \tilde{\kappa}_2 = \Psi(1, L) + \Psi(1, M) + \Psi(1, N) \\ \tilde{\kappa}_r = (-1)^r (\Psi(r-1, L) + \Psi(r-1, M) + \Psi(r-1, N)) \end{cases}$
Mode	
Formulation Meijer	$\frac{1}{LMN\mu} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)\Gamma(N)} \bar{G}_{3,0}^{0,3} \left(\frac{x}{LMN\mu} \mid \begin{array}{l} -L, -M, -N \\ \cdot \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right)$
Fonction de répartition	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)\Gamma(N)} \bar{G}_{4,1}^{0,4} \left(\frac{x}{LMN\mu} \mid \begin{array}{l} -L+1, -M+1, -N+1, 1 \\ \cdot \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{array} \right)$

4.4.3 Loi U

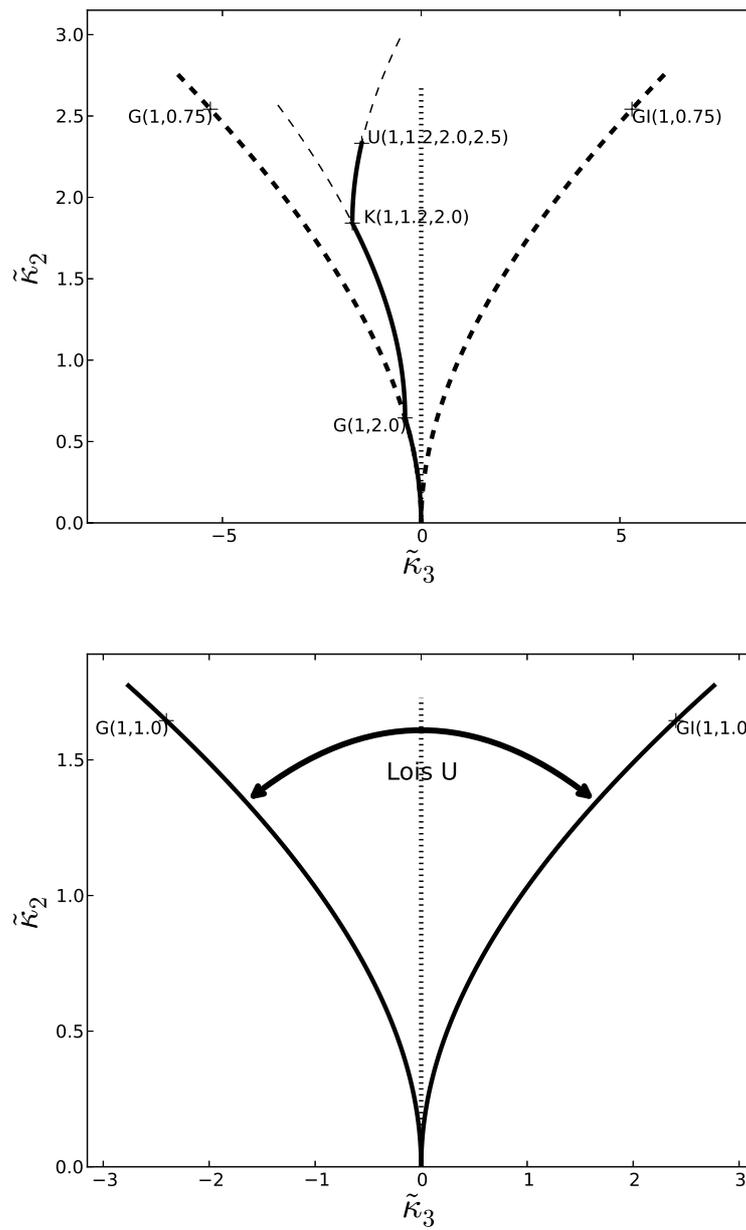


FIGURE 4.26 – Loi Q_U dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$.

Loi "U" : $\mathcal{Q}_U [\mu, L, M, N]$	
$\mathcal{Q}_U [\mu, L, M, N] (x)$	$\frac{LM}{N\mu} \frac{\Gamma(L+N)\Gamma(M+N)}{\Gamma(M)\Gamma(N)\Gamma(L)} \left(\frac{LMx}{N\mu}\right)^{\frac{L+M-3}{2}} e^{\frac{LMx}{2N\mu}} W_{\frac{1-L-M-2N}{2}, \frac{L-M}{2}} \left(\frac{LMx}{N\mu}\right)$ $L > 0, M > 0, N > 0$
Loi inverse	$\mathcal{Q}_{UI} [\mu, L, M, N] (x)$
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_U [\mu, L, M, N] & = \mathcal{F} [\mu, M, N] \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_U [\mu, L, M, N] & = \mathcal{F} [\mu, L, N] \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_U [\mu, L, M, N] & = \mathcal{K} [\mu, L, M] \end{cases}$
Construction	$\begin{cases} \mathcal{H}[\mu] \hat{\star} \mathcal{G} [1, L] \hat{\star} \mathcal{G} [1, M] \hat{\star} \mathcal{GI} [1, N] \\ \mathcal{K} [\mu, L, M] \hat{\star} \mathcal{GI} [1, N] \\ \mathcal{F} [\mu, M, N] \hat{\star} \mathcal{G} [1, L] \\ \mathcal{F} [\mu, L, N] \hat{\star} \mathcal{G} [1, M] \end{cases}$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+s-1)}{M^{s-1} \Gamma(M)} \frac{\Gamma(N+1-s)}{N^{1-s} \Gamma(N)}$
Moments	$\begin{cases} m_1 & = \mu \frac{N}{N-1} & N > 1 \\ m_2 & = \mu^2 \frac{L+1}{L} \frac{M+1}{M} \frac{N^2}{(N-1)(N-2)} & N > 2 \\ m_r & = \mu^r \frac{\Gamma(L+r)}{L^r \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+r)}{M^r \Gamma(M)} \frac{\Gamma(N-r)}{N^{-r} \Gamma(N)} & -\min(L, M) < r < N \end{cases}$
Ecart type	
Coefficient de variation	
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 & = \log \mu + (\Psi(L) - \log(L)) + (\Psi(M) - \log(M)) - (\Psi(N) - \log(N)) \\ \tilde{\kappa}_2 & = \Psi(1, L) + \Psi(1, M) + \Psi(1, N) \\ \tilde{\kappa}_r & = \Psi(r-1, L) + \Psi(r-1, M) + (-1)^r \Psi(r-1, N) \end{cases}$
Mode	
Formulation Meijer	$\frac{LM}{N\mu} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)\Gamma(N)} \bar{G}_{1,2}^{2,1} \left(\frac{LMx}{N\mu} \left \begin{array}{c} -N \\ L-1, M-1 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \right)$
Fonction de répartition	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)\Gamma(N)} \bar{G}_{2,3}^{2,2} \left(\frac{LMx}{N\mu} \left \begin{array}{c} 1, -N+1 \\ L, M \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ 0 \end{array} \right. \right)$

W est la fonction de Whittaker

4.4.4 Loi U Inverse

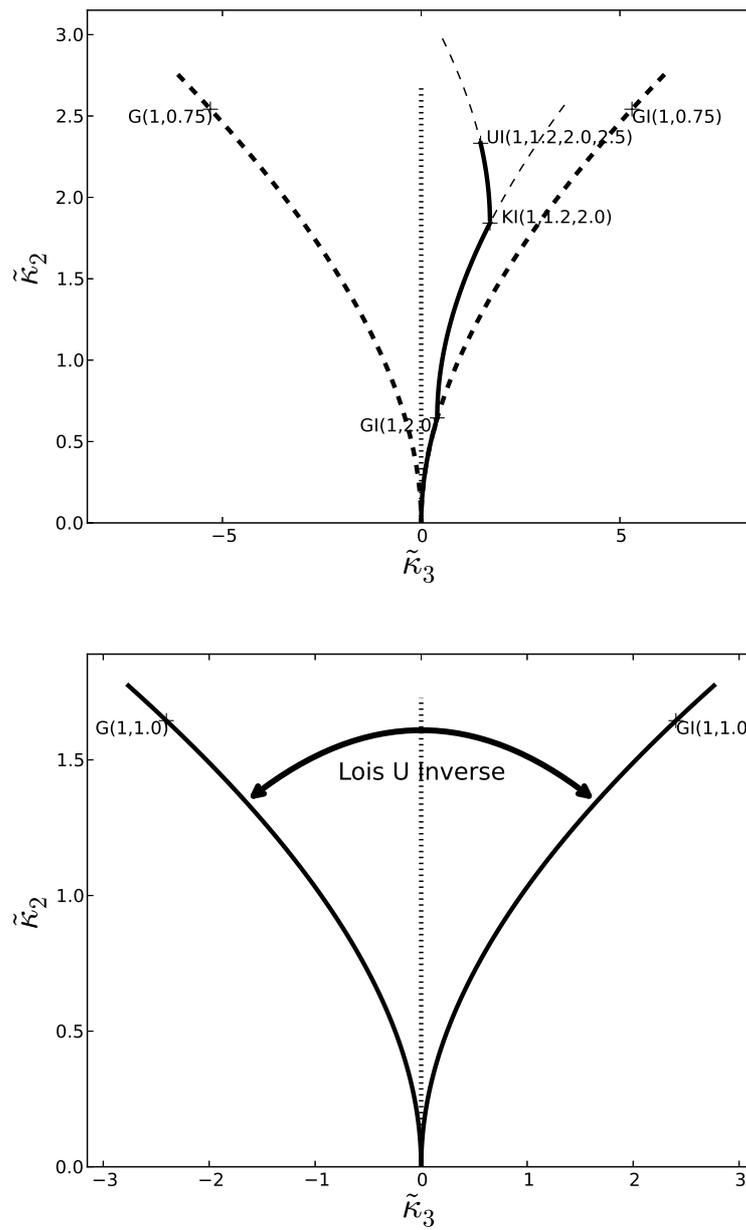


FIGURE 4.27 – Loi Q_U dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$.

Loi "U" Inverse : $Q_{UI}[\mu, L, M, N]$	
$Q_{UI}[\mu, L, M, N](x)$	$\frac{N}{LM\mu} \frac{\Gamma(L+N)\Gamma(M+N)}{\Gamma(M)\Gamma(N)\Gamma(L)} \left(\frac{LM\mu}{Nx}\right)^{\frac{L+M-3}{2}+2} e^{\frac{LM\mu}{2Nx}} W_{\frac{1-L-M-2N}{2}, \frac{L-M}{2}}\left(\frac{LM\mu}{Nx}\right)$ $L > 0, M > 0, N > 0$
Loi inverse	$Q_U[\mu, L, M, N](x)$
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow \infty} Q_U[\mu, L, M, N] = \mathcal{F}[\mu, N, M] \\ \lim_{M \rightarrow \infty} Q_U[\mu, L, M, N] = \mathcal{F}[\mu, N, L] \\ \lim_{N \rightarrow \infty} Q_U[\mu, L, M, N] = \mathcal{KI}[\mu, L, M] \end{cases}$ $L > 0, M > 0, N > 0$
Construction	$\begin{cases} \mathcal{H}[\mu] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, M] \hat{\star} \mathcal{G}[1, N] \\ \mathcal{KI}[\mu, L, M] \hat{\star} \mathcal{G}[1, N] \\ \mathcal{F}[\mu, N, M] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, L] \\ \mathcal{F}[\mu, N, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, M] \end{cases}$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+1-s)}{L^{1-s}\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s}\Gamma(M)} \frac{\Gamma(N+s-1)}{N^{s-1}\Gamma(N)}$
Moments	$\begin{cases} m_1 = \mu \frac{L}{L-1} \frac{M}{M-1} & \min(L, M) > 1 \\ m_2 = \mu^2 \frac{L^2}{(L-1)(L-2)} \frac{M^2}{(M-1)(M-2)} \frac{N+1}{N} & \min(L, M) > 2 \\ m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L-r)}{L^{-r}\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M-r)}{M^{-r}\Gamma(M)} \frac{\Gamma(N+r)}{N^r} & -N < r < \min(L, M) \end{cases}$
Ecart type	
Coefficient de variation	
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \log \mu - (\Psi(L) - \log(L)) - (\Psi(M) - \log(M)) + (\Psi(N) - \log(N)) \\ \tilde{\kappa}_2 = \Psi(1, L) + \Psi(1, M) + \Psi(1, N) \\ \tilde{\kappa}_r = (-1)^r \Psi(r-1, L) + (-1)^r \Psi(r-1, M) + \Psi(r-1, N) \end{cases}$
Mode	
Formulation Meijer	$\frac{N}{LM\mu} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)\Gamma(N)} \bar{G}_{2,1}^{1,2} \left(\frac{Nx}{LM\mu} \left \begin{matrix} -L, -M & ; & \cdot \\ N-1 & ; & \cdot \end{matrix} \right. \right)$
Fonction de répartition	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)\Gamma(N)} \bar{G}_{3,2}^{1,3} \left(\frac{Nx}{LM\mu} \left \begin{matrix} 1, -L+1, -M+1 & ; & \cdot \\ N & ; & 0 \end{matrix} \right. \right)$

W est la fonction de Whittaker

4.4.5 Loi W

Appliquée à la fonction de répartition, la condition B.43 impose :

$$L < N \text{ et } M < N \quad (4.5)$$

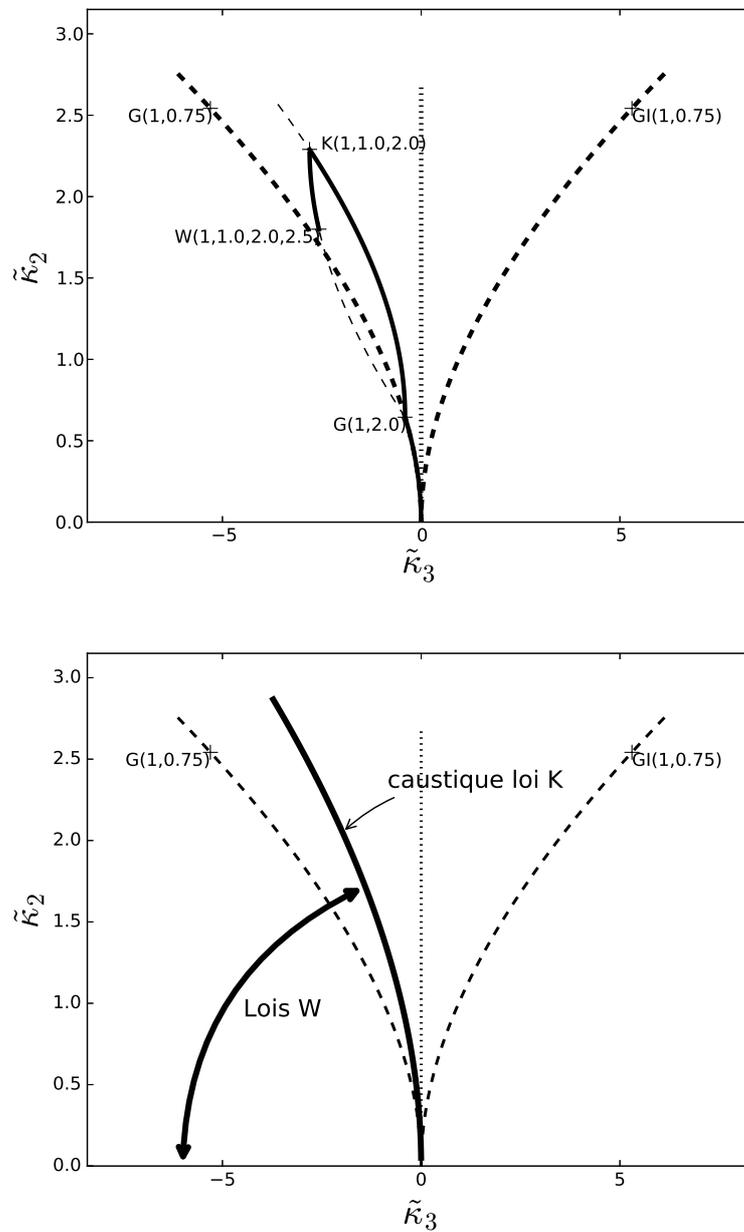


FIGURE 4.28 – Loi \mathcal{Q}_W dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$.

Loi "W" : $\mathcal{Q}_W[\mu, L, M, N]$	
$\mathcal{Q}_W[\mu, L, M, N](x)$	$\frac{LM}{N\mu} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \left(\frac{LMx}{N\mu}\right)^{\frac{L+M-3}{2}} e^{-\frac{LMx}{2N\mu}} W_{\frac{1+L+M-2N}{2}, \frac{L-M}{2}} \left(\frac{LMx}{N\mu}\right)$ $L > 0, M > 0, N > \min(L, M)$
Loi inverse	$\mathcal{Q}_{W\mathcal{I}}[\mu, L, M, N]$
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_W[\mu, L, M, N] & = \mathcal{B}[\mu, M, N] \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_W[\mu, L, M, N] & = \mathcal{B}[\mu, L, N] \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_W[\mu, L, M, N] & = \mathcal{K}[\mu, L, M] \\ \lim_{N \rightarrow L^+} \mathcal{Q}_W[\mu, L, M, N] & = \mathcal{G}[\mu, M] \\ \lim_{N \rightarrow M^+} \mathcal{Q}_W[\mu, L, M, N] & = \mathcal{G}[\mu, L] \end{cases}$
Construction	$\begin{cases} \mathcal{B}[\mu, L, N] \hat{\star} \mathcal{G}[\mu = 1, M] \\ \mathcal{B}[\mu, M, N] \hat{\star} \mathcal{G}[\mu = 1, L] \end{cases}$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1}\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+s-1)}{M^{s-1}\Gamma(M)} \frac{N^{s-1}\Gamma(N)}{\Gamma(N+s-1)}$
Moments	$\begin{cases} m_1 & = \mu \\ m_2 & = \mu^2 \frac{L+1}{L} \frac{M+1}{M} \frac{N}{N+1} \\ m_r & = \mu^r \frac{\Gamma(L+r)}{L^r\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+r)}{M^r\Gamma(M)} \frac{N^r\Gamma(N)}{\Gamma(N+r)} \quad r > -\min(L, M) \end{cases}$
Ecart type	
Coefficient de variation	
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 & = \log \mu + (\Psi(L) - \log L) + (\Psi(M) - \log M) - (\Psi(N) - \log N) \\ \tilde{\kappa}_2 & = \Psi(1, L) + \Psi(1, M) - \Psi(1, N) \\ \tilde{\kappa}_r & = \Psi(r-1, L) + \Psi(r-1, M) - \Psi(r-1, N) \end{cases}$
Mode	
Formulation Meijer	$\frac{LM}{N\mu} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(M)\Gamma(L)} \tilde{G}_{1,2}^{2,0} \left(\frac{LMx}{N\mu} \left \begin{matrix} \cdot & & ; & N-1 \\ L-1, M-1 & & ; & \cdot \end{matrix} \right. \right)$
Fonction de répartition	$\frac{\Gamma(N)}{\Gamma(M)\Gamma(L)} \tilde{G}_{2,3}^{2,1} \left(\frac{LMx}{N\mu} \left \begin{matrix} 1 & ; & N \\ L, M & ; & 0 \end{matrix} \right. \right)$

W est la fonction de Whittaker

4.4.6 Loi W Inverse

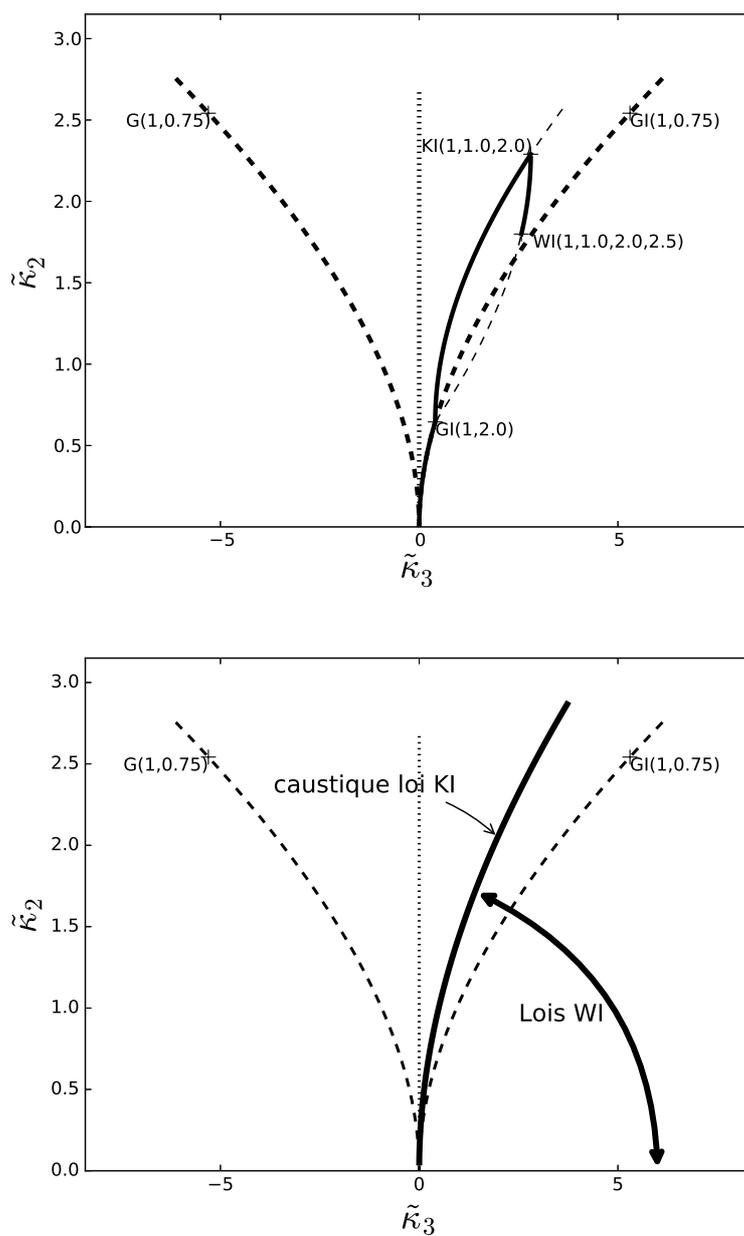


FIGURE 4.29 – Loi Q_{WZ} dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$.

Loi "W" Inverse : $\mathcal{Q}_{\mathcal{W}\mathcal{I}}[\mu, L, M, N]$	
$\mathcal{Q}_{\mathcal{W}\mathcal{I}}[\mu, L, M, N](x)$	$\frac{N}{LM\mu} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \left(\frac{LM\mu}{Nx}\right)^{\frac{L+M-3}{2}+2} e^{-\frac{LM\mu}{2Nx}} W_{\frac{1+L+M-2N}{2}, \frac{L-M}{2}}\left(\frac{LM\mu}{Nx}\right)$ $L > 0, M > 0, N > \min(L, M)$
Loi inverse	$\mathcal{Q}_{\mathcal{W}}[\mu, L, M, N]$
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{\mathcal{W}\mathcal{I}}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{B}\mathcal{I}[\mu, M, N] \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{\mathcal{W}\mathcal{I}}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{B}\mathcal{I}[\mu, L, N] \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{\mathcal{W}\mathcal{I}}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{K}\mathcal{I}[\mu, L, M] \\ \lim_{N \rightarrow L^+} \mathcal{Q}_{\mathcal{W}\mathcal{I}}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{G}\mathcal{I}[\mu, M] \\ \lim_{N \rightarrow M^+} \mathcal{Q}_{\mathcal{W}\mathcal{I}}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{G}\mathcal{I}[\mu, L] \end{cases}$
Construction	$\begin{cases} \mathcal{B}\mathcal{I}[\mu, L, N] \hat{\star} \mathcal{G}\mathcal{I}[\mu = 1, M] \\ \mathcal{B}\mathcal{I}[\mu, M, N] \hat{\star} \mathcal{G}\mathcal{I}[\mu = 1, L] \end{cases}$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+1-s)}{L^{1-s}\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s}\Gamma(M)} \frac{N^{1-s}\Gamma(N)}{\Gamma(N+1-s)}$
Moments	$\begin{cases} m_1 & = \mu \frac{L}{L-1} \frac{M}{M-1} \frac{N-1}{N} & L > 1, M > 1 \\ m_2 & = \mu^2 \frac{L^2}{(L-1)(L-2)} \frac{M^2}{(M-1)(M-2)} \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} & L > 2, M > 2 \\ m_r & = \mu^r \frac{\Gamma(L-r)}{L^{-r}\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M-r)}{M^{-r}\Gamma(M)} \frac{N^{-r}\Gamma(N)}{\Gamma(N-r)} & r < \min(L, M) \end{cases}$
Ecart type	
Coefficient de variation	
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 & = \log \mu - (\Psi(L) - \log(L)) - (\Psi(M) - \log(M)) + (\Psi(N) - \log(N)) \\ \tilde{\kappa}_2 & = \Psi(1, L) + \Psi(1, M) - \Psi(1, N) \\ \tilde{\kappa}_r & = (-1)^r (\Psi(r-1, L) + \Psi(r-1, M) - \Psi(r-1, N)) \end{cases}$
Mode	
Formulation Meijer	$\frac{N}{LM\mu} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(M)\Gamma(L)} \bar{G}_{2,1}^{0,2} \left(\frac{Nx}{LM\mu} \left \begin{array}{c} -L, -M \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ -N \end{array} \right. \right)$
Fonction de répartition	$\frac{\Gamma(N)}{\Gamma(M)\Gamma(L)} \bar{G}_{3,2}^{0,3} \left(\frac{Nx}{LM\mu} \left \begin{array}{c} 1, -L+1, -M+1 \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ -N+1, 0 \end{array} \right. \right)$

W est la fonction de Whittaker

4.4.7 Loi Y

Appliquée à la fonction de répartition, la condition B.43 impose :

$$L < N \tag{4.6}$$

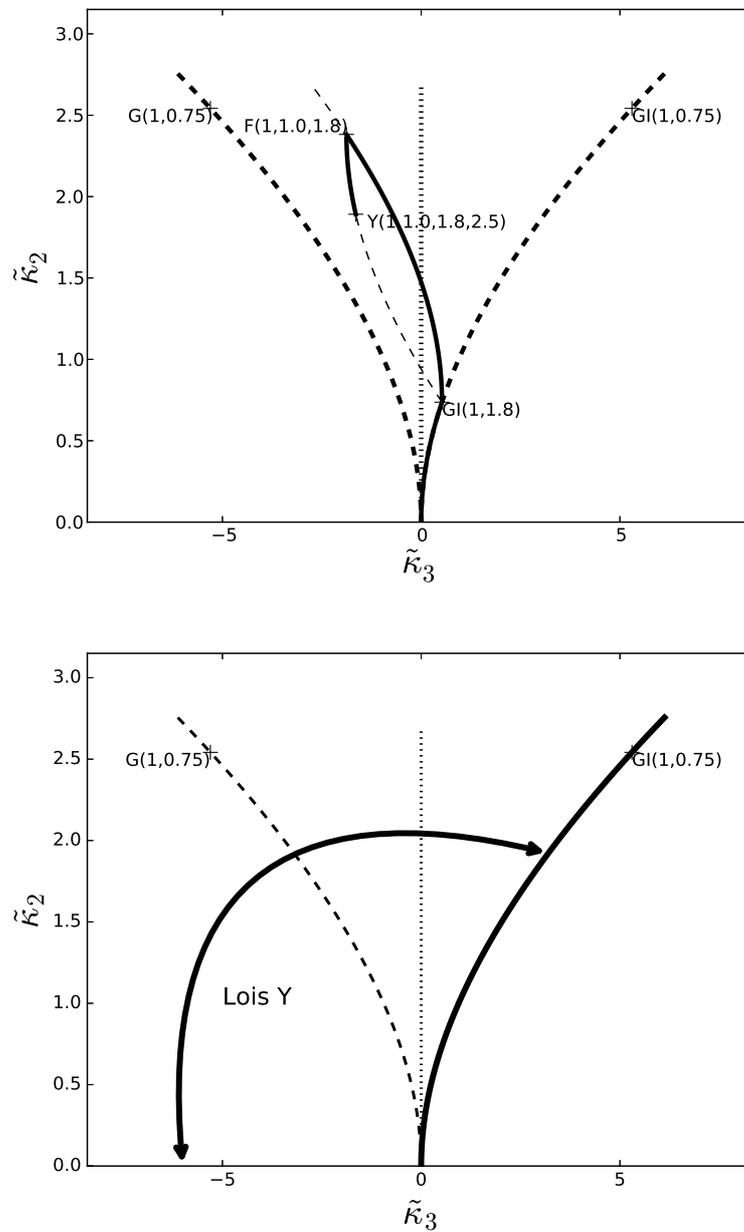


FIGURE 4.30 – Loi \mathcal{Q}_Y dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$.

Loi "Y" : $\mathcal{Q}_Y[\mu, L, M, N]$	
$\mathcal{Q}_Y[\mu, L, M, N](x)$	$\frac{L}{MN\mu} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(M)\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+L)}{\Gamma(M+N)} \left(\frac{Lx}{MN\mu}\right)^{-M-1} {}_1F_1\left(M+L; M+N; -\frac{MN\mu}{Lx}\right)$ $L > 0, M > 0, N > \max(L, M)$
Loi inverse	$\mathcal{Q}_{YT}[\mu, L, M, N](x)$
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_Y[\mu, L, M, N] & = \mathcal{GI}[\mu, M] \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_Y[\mu, L, M, N] & = \mathcal{B}[\mu, L, N] \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_Y[\mu, L, M, N] & = \mathcal{F}[\mu, L, M] \\ \lim_{N \rightarrow L^+} \mathcal{Q}_Y[\mu, L, M, N] & = \mathcal{GI}[\mu, M] \\ \lim_{N \rightarrow M^+} \mathcal{Q}_Y[\mu, L, M, N] & = \mathcal{G}[\mu, L] \end{cases}$
Construction	$\mathcal{B}[\mu, L, N] \hat{\star} \mathcal{GI}[\mu = 1, M]$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1}\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s}\Gamma(M)} \frac{N^{s-1}\Gamma(N)}{\Gamma(N+s-1)}$
Moments	$\begin{cases} m_1 & = \mu \frac{M}{M-1} & M > 1 \\ m_2 & = \mu^2 \frac{L+1}{L} \frac{M^2}{(M-1)(M-2)} \frac{N}{N+1} & M > 2 \\ m_r & = \mu^r \frac{\Gamma(L+r)}{L^r\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M-r)}{M^{-r}\Gamma(M)} \frac{N^r\Gamma(N)}{\Gamma(N+r)} & -L < r < M \end{cases}$
Ecart type	
Coefficient de variation	
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 & = \log \mu + (\Psi(L) - \log L) - (\Psi(M) - \log M) - (\Psi(N) - \log N) \\ \tilde{\kappa}_2 & = \Psi(1, L) + \Psi(1, M) - \Psi(1, N) \\ \tilde{\kappa}_r & = \Psi(r-1, L) + (-1)^r \Psi(r-1, M) - \Psi(r-1, N) \end{cases}$
Mode	
Formulation Meijer	$\frac{L}{MN\mu} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(M)\Gamma(L)} \bar{G}_{2,1}^{1,1} \left(\frac{Lx}{MN\mu} \left \begin{array}{c} -M & ; & N-1 \\ L-1 & ; & . \end{array} \right. \right)$
Fonction de répartition	$\frac{\Gamma(N)}{\Gamma(M)\Gamma(L)} \bar{G}_{3,2}^{1,2} \left(\frac{Lx}{MN\mu} \left \begin{array}{c} 1, -M+1 & ; & N \\ L & ; & 0 \end{array} \right. \right)$

${}_1F_1$ est la fonction hypergéométrique confluyente

4.4.8 Loi Y Inverse

Appliquée à la fonction de répartition, la condition B.43 impose :

$$L < N \tag{4.7}$$

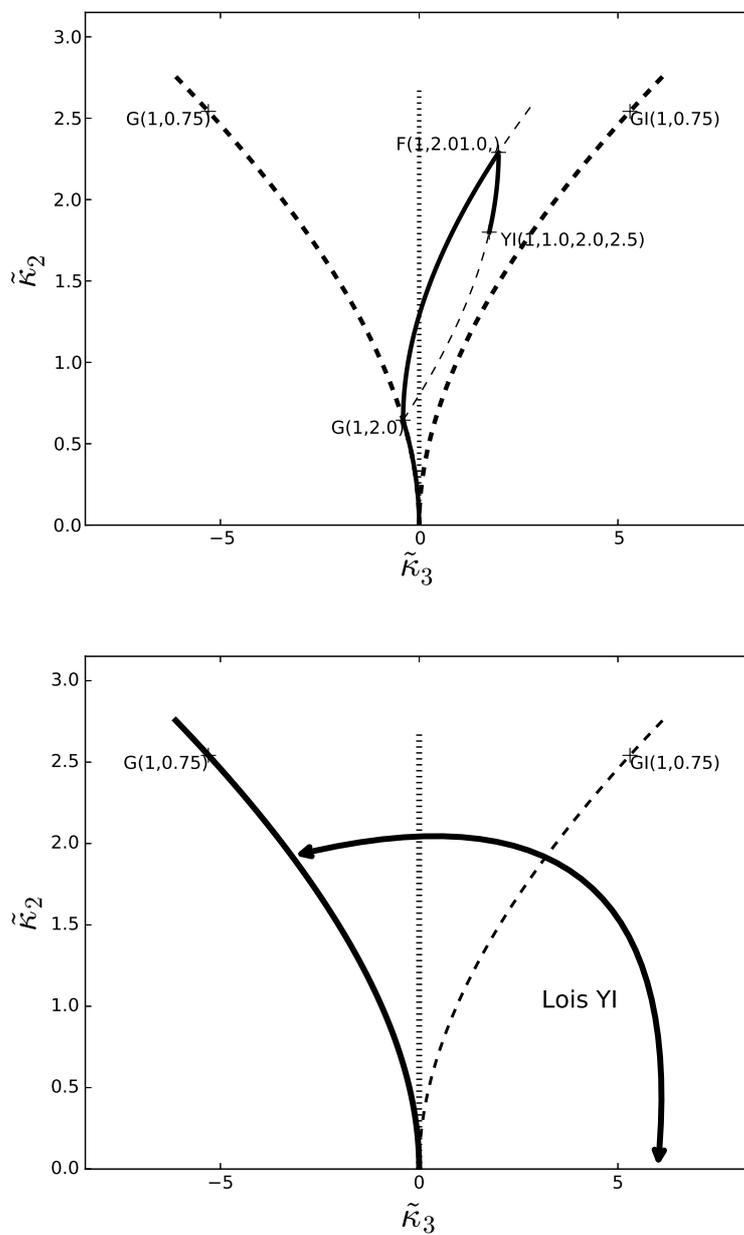


FIGURE 4.31 – Loi Q_{YI} dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$.

Loi "Y" Inverse $\mathcal{Q}_{\mathcal{Y}\mathcal{I}}[\mu, L, M, N]$	
$\mathcal{Q}_{\mathcal{Y}\mathcal{I}}[\mu, L, M, N](x)$	$\frac{MN}{L\mu} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(M)\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+L)}{\Gamma(M+N)} \left(\frac{MNx}{L\mu}\right)^{M-1} {}_1F_1\left(M+L; M+N; -\frac{MNx}{L\mu}\right)$ $L > 0, M > 0, N > \max(L, M)$
Loi inverse	$\mathcal{Q}_{\mathcal{Y}}[\mu, L, M, N](x)$
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{\mathcal{Y}\mathcal{I}}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{G}[\mu, M] \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{\mathcal{Y}\mathcal{I}}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{BI}[\mu, L, N] \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{\mathcal{Y}\mathcal{I}}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{F}[\mu, M, L] \\ \lim_{N \rightarrow L^+} \mathcal{Q}_{\mathcal{Y}\mathcal{I}}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{G}[\mu, M] \\ \lim_{N \rightarrow M^+} \mathcal{Q}_{\mathcal{Y}\mathcal{I}}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{GI}[\mu, L] \end{cases}$
Construction	$\mathcal{BI}[\mu, L, N] \hat{\star} \mathcal{G}[\mu = 1, M]$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+1-s)}{L^{1-s}\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+s-1)}{M^{s-1}\Gamma(M)} \frac{N^{1-s}\Gamma(N)}{\Gamma(N+1-s)}$
Moments	$\begin{cases} m_1 & = \mu \frac{L}{L-1} \frac{N-1}{N} & L > 1 \\ m_2 & = \mu^2 \frac{L^2}{(L-1)(L-2)} \frac{M+1}{M} \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} & L > 2 \\ m_r & = \mu^r \frac{\Gamma(M+r)}{M^r\Gamma(M)} \frac{\Gamma(L-r)}{L^{-r}\Gamma(L)} \frac{N^{-r}\Gamma(N)}{\Gamma(N-r)} & -M < r < L \end{cases}$
Ecart type	
Coefficient de variation	
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 & = \log \mu - (\Psi(L) - \log L) + (\Psi(M) - \log M) + (\Psi(N) - \log N) \\ \tilde{\kappa}_2 & = \Psi(1, L) + \Psi(1, M) - \Psi(1, N) \\ \tilde{\kappa}_r & = (-1)^r \Psi(r-1, L) + \Psi(r-1, M) - (-1)^r \Psi(r-1, N) \end{cases}$
Mode	
Formulation Meijer	$\frac{MN}{L\mu} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(M)\Gamma(L)} \tilde{G}_{1,2}^{1,1} \left(\frac{MNx}{L\mu} \left \begin{array}{c} -L \\ M-1 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ -N \end{array} \right. \right)$
Fonction de répartition	$\frac{\Gamma(N)}{\Gamma(M)\Gamma(L)} \tilde{G}_{2,3}^{1,2} \left(\frac{MNx}{L\mu} \left \begin{array}{c} 1, -L+1 \\ M \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ 0, -N+1 \end{array} \right. \right)$

${}_1F_1$ est la fonction hypergéométrique confluyente

Chapitre 5

Les lois généralisées usuelles définies sur \mathbb{R}^+

Pour passer d'une loi décrivant une variable aléatoire X , de densité de probabilité $p(x)$ et de log-fonction caractéristique $\phi(s)$, à une loi décrivant une variable aléatoire Y telle que $X = Y^\eta$, de densité de probabilité $p_\eta(x)$ et de log-fonction caractéristique $\phi_\eta(s)$, on utilise les relations 2.55 et 2.56 :

$$p_\eta(y) = |\eta| y^{(\eta-1)} p(y^\eta)$$

$$\phi_\eta(s) = \phi\left(1 + \frac{s-1}{\eta}\right)$$

Les log-cumulants ($r > 1$) s'obtiennent de façon simplissime (relation 2.57) :

$$\tilde{\kappa}_{\eta,r} = \frac{1}{\eta^r} \tilde{\kappa}_r$$

Dans ce catalogue de lois généralisées, seule la loi exponentielle décroissante généralisée porte un nom spécifique qui est "loi de Weibull", les autres étant tout simplement dénommées en rajoutant "généralisée" à leur nom initial.

5.1 Lois à deux paramètres

5.1.1 Loi de Weibull $\mathcal{W}[\mu, \eta]$

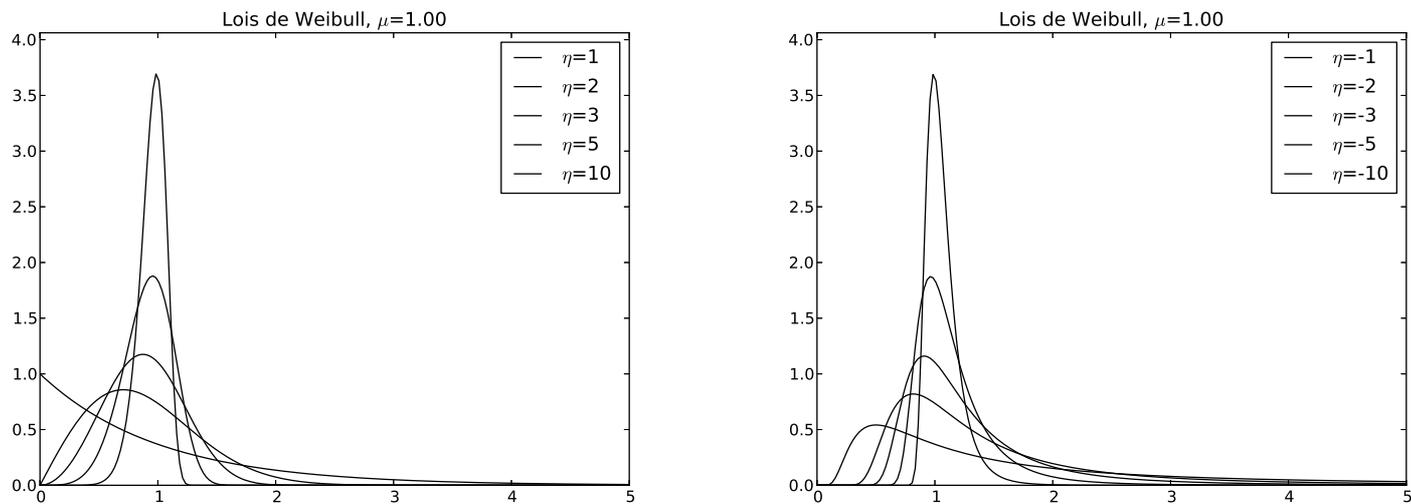


FIGURE 5.1 – Loi de Weibull

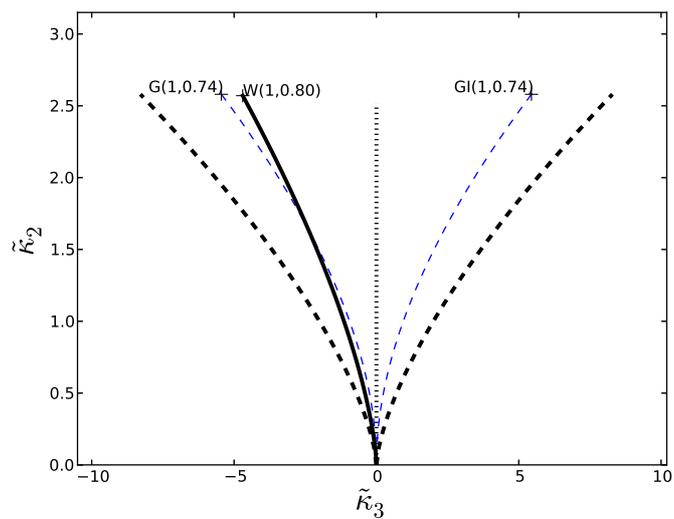


FIGURE 5.2 – Loi de Weibull dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$

Loi de Weibull : $\mathcal{W}[\mu, \eta]$	
$\mathcal{W}[\mu, \eta](x)$	$\frac{ \eta }{\mu} \left(\frac{x}{\mu}\right)^{\eta-1} e^{-\left(\frac{x}{\mu}\right)^\eta}$
Loi inverse	$\mathcal{W}[\mu, -\eta](x)$
Cas $\eta = 1$ Cas $\eta = 2$ Cas limite $\eta \rightarrow \infty$	$\mathcal{G}[\mu, L = 1](x)$ $\mathcal{RN}[\mu, L = 1](x)$ $\mathcal{H}[\mu]$
Construction	Généralisation de la loi exponentielle décroissante
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \Gamma\left(1 + \frac{s-1}{\eta}\right)$
Moments	$\begin{cases} m_1 = \mu \Gamma\left(1 + \frac{1}{\eta}\right) & \eta > 0 \text{ ou } \eta < -1 \\ m_2 = \mu^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\eta}\right) & \eta > 0 \text{ ou } \eta < -2 \\ m_r = \mu^r \Gamma\left(1 + \frac{r}{\eta}\right) & \begin{cases} r > -\eta & \text{si } \eta > 0 \\ r < -\eta & \text{si } \eta < 0 \end{cases} \end{cases}$
Ecart type	$\mu \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\eta}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{\eta}\right)^2} \quad \eta > 0 \text{ ou } \eta < -2$
Coefficient de variation	$\sqrt{\frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\eta}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\eta}\right)^2} - 1} \quad \eta > 0 \text{ ou } \eta < -2$
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \log \mu + \frac{\Psi(1)}{\eta} \\ \tilde{\kappa}_2 = \frac{1}{\eta^2} \Psi(1, 1) \\ \tilde{\kappa}_r = \frac{\Psi(r-1, 1)}{\eta^r} \end{cases}$
Mode	$\begin{cases} \left(\frac{\eta-1}{\eta}\right)^{\frac{1}{\eta}} \mu & \text{si } \eta > 1 \text{ ou } \eta < 0 \\ 0 & \text{si } \eta \in]0, 1] \end{cases}$
Formulation Meijer	$\frac{ \eta }{\mu} \bar{G}_{0,1}^{1,0} \left(\left(\frac{x}{\mu}\right)^\eta \middle \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 - \frac{1}{\eta} & \cdot & \cdot \end{matrix} \right)$
Fonction de répartition	$\begin{cases} \bar{G}_{1,2}^{1,1} \left(\left(\frac{x}{\mu}\right)^\eta \middle \begin{matrix} 1 & \cdot \\ 1 & 0 \end{matrix} \right) & \eta > 0 \\ 1 - \bar{G}_{1,2}^{1,1} \left(\left(\frac{x}{\mu}\right)^\eta \middle \begin{matrix} 1 & \cdot \\ 1 & 0 \end{matrix} \right) & \eta < 0 \end{cases}$

5.1.2 Loi Gaussienne Généralisée $\mathcal{NG}^+[\sigma, \eta]$

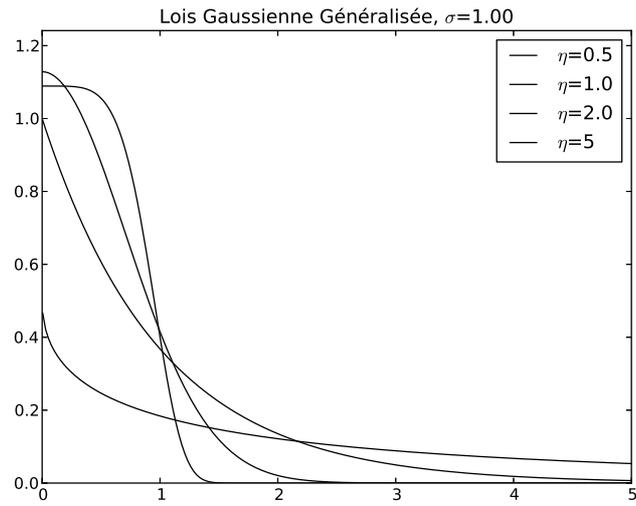


FIGURE 5.3 – Loi Gaussienne Généralisée

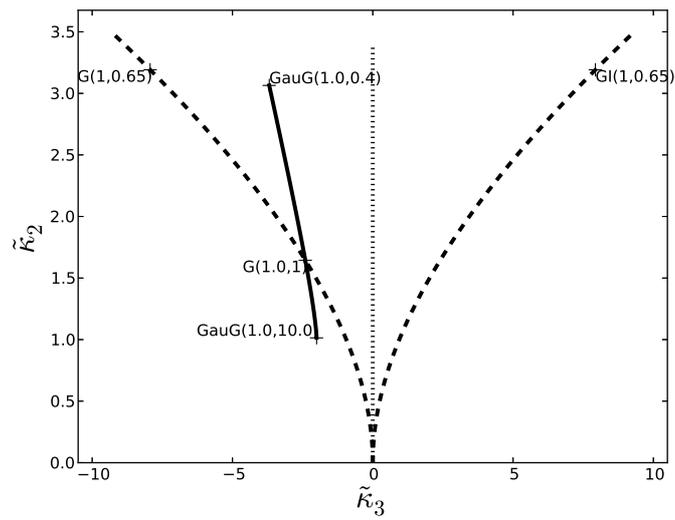


FIGURE 5.4 – Loi Gaussienne Généralisée dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$

Loi Gaussienne Généralisée : $\mathcal{NG}^+[\sigma, \eta]$	
$\mathcal{NG}^+[\sigma, \eta](x)$	$\frac{\eta}{\sigma \Gamma(\frac{1}{\eta})} e^{-(\frac{x}{\sigma})^\eta} \quad \eta > 0$
Loi inverse	sans
Cas limite	$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \mathcal{NG}^+[\sigma, \eta] = \mathcal{U}[\sigma]$
Construction	
Log-fonction caractéristique	$\frac{\sigma^{s-1}}{\Gamma(\frac{1}{\eta})} \Gamma\left(\frac{s}{\eta}\right)$
Moments	$\begin{cases} m_1 = \frac{\sigma}{\Gamma(\frac{1}{\eta})} \Gamma\left(\frac{2}{\eta}\right) \\ m_2 = \frac{\sigma^2}{\Gamma(\frac{1}{\eta})} \Gamma\left(\frac{3}{\eta}\right) \\ m_r = \frac{\sigma^r}{\Gamma(\frac{1}{\eta})} \Gamma\left(\frac{1+r}{\eta}\right) \quad r > -\eta \end{cases}$
Ecart type	$\frac{\sigma}{\Gamma(\frac{1}{\eta})} \sqrt{\Gamma\left(\frac{3}{\eta}\right) \Gamma\left(\frac{1}{\eta}\right) - \left(\Gamma\left(\frac{2}{\eta}\right)\right)^2}$
Coefficient de variation	$\sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{3}{\eta}\right) \Gamma\left(\frac{1}{\eta}\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{2}{\eta}\right)\right)^2} - 1}$
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \log \sigma + \frac{\Psi\left(\frac{1}{\eta}\right)}{\eta} \\ \tilde{\kappa}_2 = \frac{\Psi\left(1, \frac{1}{\eta}\right)}{\eta^2} \\ \tilde{\kappa}_r = \frac{\Psi\left(r-1, \frac{1}{\eta}\right)}{\eta^r} \end{cases}$
Mode	0
Formulation Meijer	$\frac{\eta}{\sigma \Gamma(\frac{1}{\eta})} \bar{G}_{0,1}^{1,0} \left(\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\eta \middle \begin{matrix} \cdot & ; & \cdot \\ 0 & ; & \cdot \end{matrix} \right)$
Fonction de répartition	$\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{\eta})} \bar{G}_{1,2}^{1,1} \left(\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\eta \middle \begin{matrix} 1 & ; & \cdot \\ \frac{1}{\eta} & ; & 0 \end{matrix} \right)$

5.2 Lois à trois paramètres

5.2.1 Loi Gamma Généralisée $\mathcal{GG}[\mu, L, \eta]$

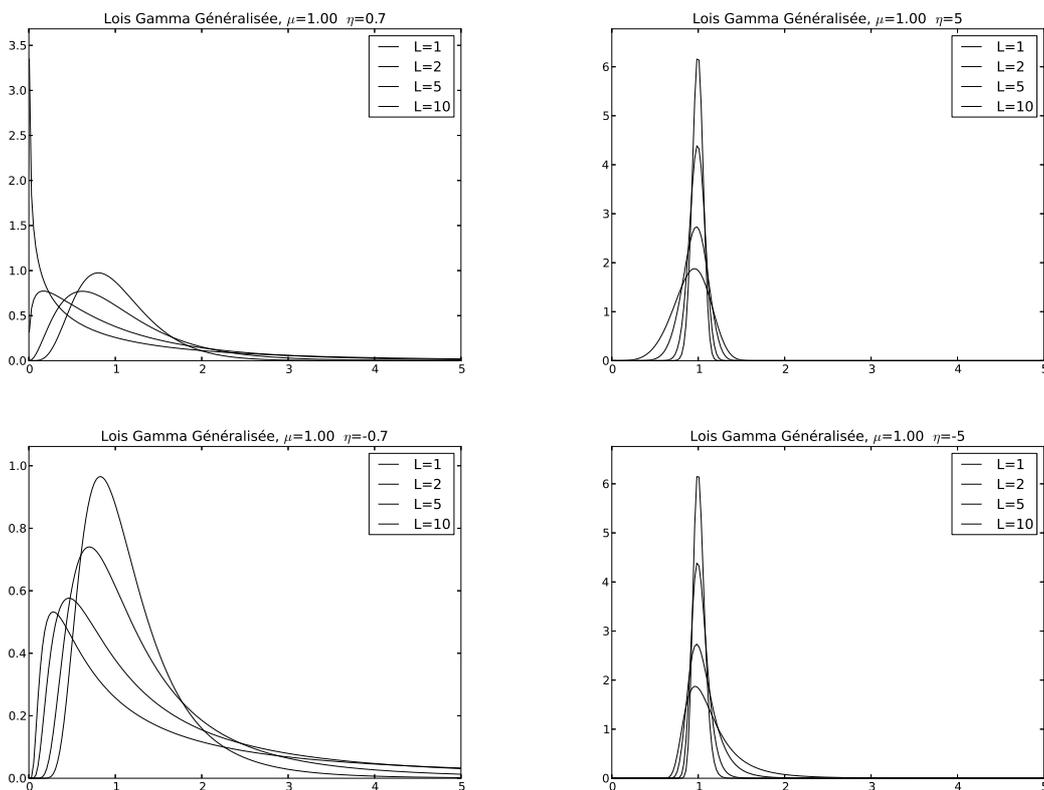


FIGURE 5.5 – Divers exemples de lois \mathcal{GG}

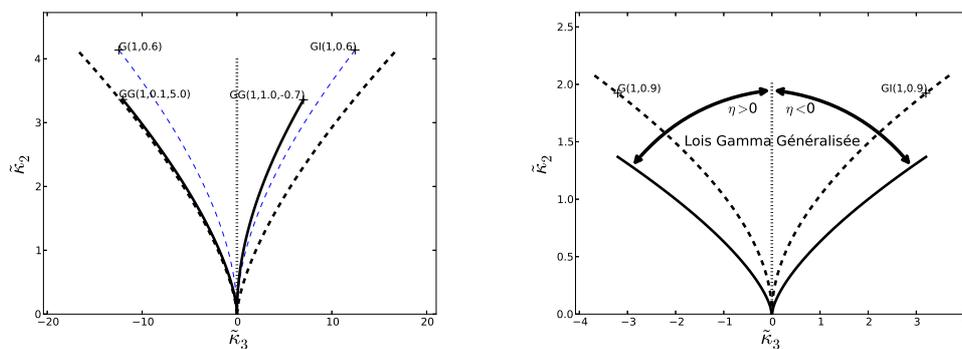


FIGURE 5.6 – Loi \mathcal{GG} dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$

Loi Gamma Généralisée : $\mathcal{GG}[\mu, L, \eta]$	
$\mathcal{GG}[\mu, L, \eta](x)$	$\frac{ \eta }{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{\Gamma(L)} \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu}\right)^{\eta L - 1} e^{-\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu}\right)^{\eta}} \quad L > 0$
Loi inverse	$\mathcal{GG}[\mu, L, -\eta](x)$
Cas limites	$\begin{cases} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \mathcal{GG}[\mu, L, \eta] & = \mathcal{H}[\mu] \\ \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{GG}[\mu, L, \eta] & = \mathcal{H}[\mu] \\ \lim_{\eta \rightarrow 0} \mathcal{GG}\left[\mu, \frac{1}{\eta^2 \sigma^2}, \eta\right] & = \mathcal{L}[\mu, \sigma] \end{cases}$
Construction	Généralisation de la loi Gamma $\mathcal{G}_\eta[\mu, L](x)$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L + \frac{s-1}{\eta})}{L^{\frac{s-1}{\eta}} \Gamma(L)}$
Moments	$\begin{cases} m_1 & = \mu \frac{\Gamma(L + \frac{1}{\eta})}{L^{\frac{1}{\eta}} \Gamma(L)} \quad \eta > 0 \text{ ou } L > -\frac{1}{\eta} \\ m_2 & = \mu^2 \frac{\Gamma(L + \frac{2}{\eta})}{L^{\frac{2}{\eta}} \Gamma(L)} \quad \eta > 0 \text{ ou } L > -\frac{2}{\eta} \\ m_r & = \mu^r \frac{\Gamma(L + \frac{r}{\eta})}{L^{\frac{r}{\eta}} \Gamma(L)} \quad \begin{cases} r > -\eta L & \text{si } \eta > 0 \\ r < -\eta L & \text{si } \eta < 0 \end{cases} \end{cases}$
Ecart type	$\mu \sqrt{\frac{\Gamma(L) \Gamma(L + \frac{2}{\eta}) - \Gamma(L + \frac{1}{\eta})^2}{L^{\frac{2}{\eta}} \Gamma(L)^2}} \quad \eta > 0 \text{ ou } L > -\frac{2}{\eta}$
Coefficient de variation	$\sqrt{\frac{\Gamma(L + \frac{2}{\eta}) \Gamma(L)}{\Gamma(L + \frac{1}{\eta})^2}} - 1 \quad \eta > 0 \text{ ou } L > -\frac{2}{\eta}$
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 & = \log \mu + \frac{\Psi(L) - \log(L)}{\eta} \\ \tilde{\kappa}_2 & = \frac{\Psi(1, L)}{\eta^2} \\ \tilde{\kappa}_r & = \frac{\Psi(r-1, L)}{\eta^r} \end{cases}$
Mode	$\begin{cases} \left(\frac{\eta L - 1}{\eta L}\right)^{\frac{1}{\eta}} \mu & \text{si } \frac{\eta L - 1}{\eta L} > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Formulation Meijer	$\frac{ \eta }{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{\Gamma(L)} \bar{G}_{0,1}^{1,0} \left(\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu} \right)^{\eta} \mid L - \frac{1}{\eta} \ ; \ \cdot \right)$
Fonction de répartition	$\begin{cases} \frac{1}{\Gamma(L)} \bar{G}_{1,2}^{1,1} \left(\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu} \right)^{\eta} \mid \begin{matrix} 1 & ; & \cdot \\ L & ; & 0 \end{matrix} \right) & \eta > 0 \\ 1 - \frac{1}{\Gamma(L)} \bar{G}_{1,2}^{1,1} \left(\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu} \right)^{\eta} \mid \begin{matrix} 1 & ; & \cdot \\ L & ; & 0 \end{matrix} \right) & \eta < 0 \end{cases}$

5.3 Lois à quatre paramètres

5.3.1 Loi \mathcal{K} généralisée $\mathcal{KG}[\mu, L, M, \eta]$

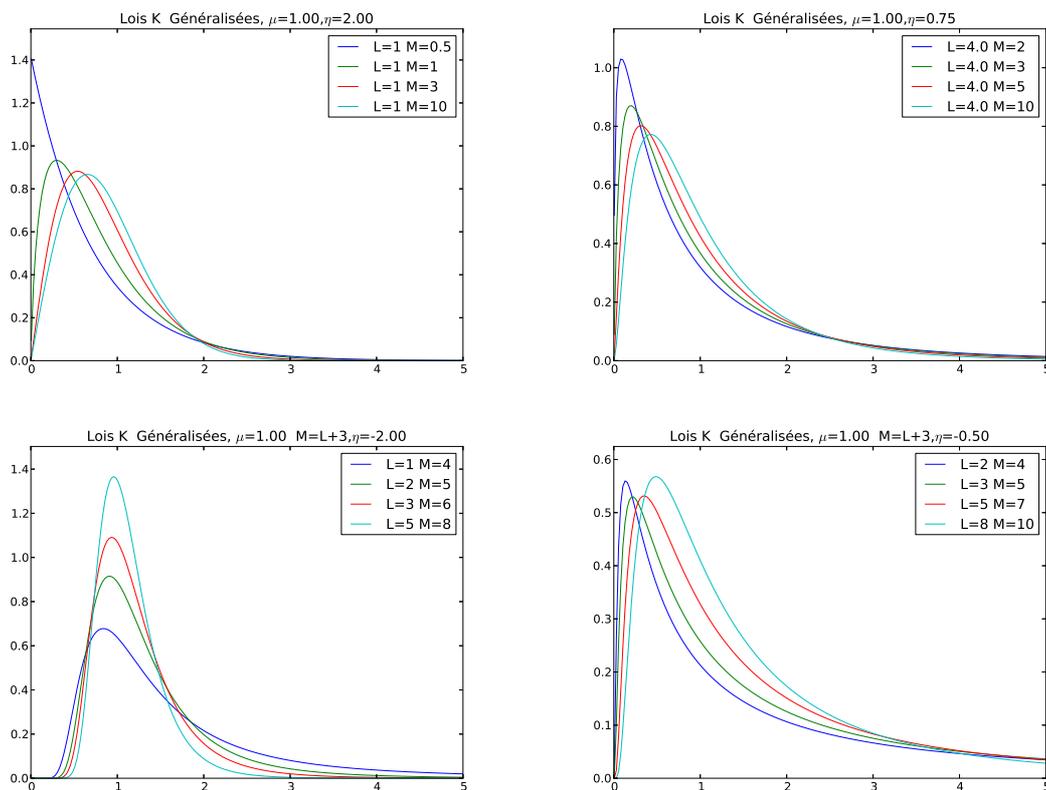


FIGURE 5.7 – Loi $\mathcal{K}\mathcal{G}$

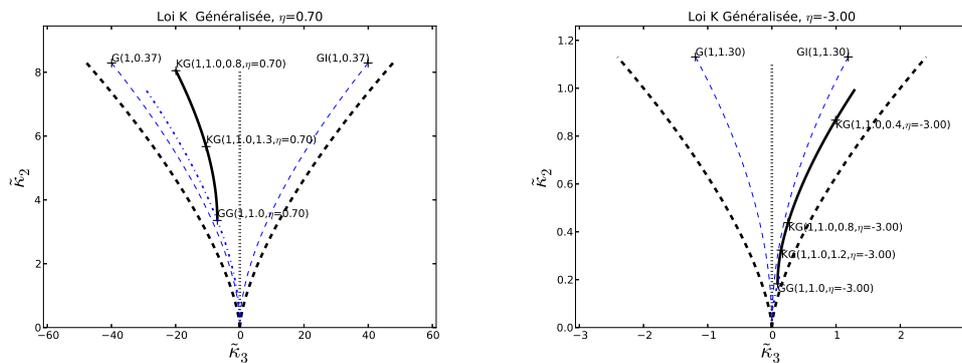


FIGURE 5.8 – Loi $\mathcal{K}\mathcal{G}$ dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$

Loi K généralisée $\mathcal{KG} [\mu, L, \eta]$	
$\mathcal{KG} [\mu, L, \eta] (x)$	$\frac{2 \eta }{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{L^{\frac{1}{\eta}} M^{\frac{1}{\eta}}}{\mu} \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} M^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu} \right)^{\eta \frac{M+L}{2} - 1} K_{M-L} \left[2 \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} M^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu} \right)^{\frac{\eta}{2}} \right]$
Loi inverse	$\mathcal{KG} [\mu, L, -\eta] (x)$
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{KG} [\mu, L, M, \eta] & = \mathcal{GG} [\mu, M, \eta] \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{KG} [\mu, L, M, \eta] & = \mathcal{GG} [\mu, L, \eta] \end{cases}$
Construction	Généralisation de la loi \mathcal{K} $\mathcal{H}[\mu] \hat{\star} \mathcal{GG} [1, L, \eta] \hat{\star} \mathcal{GG} [1, M, \eta]$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L + \frac{s-1}{\eta})}{L^{\frac{s-1}{\eta}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M + \frac{s-1}{\eta})}{M^{\frac{s-1}{\eta}} \Gamma(M)}$
Moments	$\begin{cases} m_1 & = \mu \frac{\Gamma(L + \frac{1}{\eta})}{L^{\frac{1}{\eta}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M + \frac{1}{\eta})}{M^{\frac{1}{\eta}} \Gamma(M)} & \eta > 0 \text{ ou } \min(L, M) > -\frac{1}{\eta} \\ m_2 & = \mu^2 \frac{\Gamma(L + \frac{2}{\eta})}{L^{\frac{2}{\eta}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M + \frac{2}{\eta})}{M^{\frac{2}{\eta}} \Gamma(M)} & \eta > 0 \text{ ou } \min(L, M) > -\frac{2}{\eta} \\ m_r & = \mu^r \frac{\Gamma(L + \frac{r}{\eta})}{L^{\frac{r}{\eta}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M + \frac{r}{\eta})}{M^{\frac{r}{\eta}} \Gamma(M)} & \eta > 0 \text{ ou } \min(L, M) > -\frac{r}{\eta} \end{cases}$
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 & = \log \mu + \frac{1}{\eta} (\Psi(L) - \log L + \Psi(M) - \log M) \\ \tilde{\kappa}_2 & = \frac{1}{\eta^2} (\Psi(1, L) + \Psi(1, M)) \\ \tilde{\kappa}_r & = \frac{1}{\eta^r} (\Psi(r-1, L) + \Psi(r-1, M)) \end{cases}$
Mode	pas d'expression analytique
Formulation Meijer	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{ \eta }{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}} M^{\frac{1}{\eta}}}{\mu} \bar{G}_{0,2}^{2,0} \left(\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} M^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu} \right)^\eta \middle L - \frac{1}{\eta}, M - \frac{1}{\eta} \ ; \cdot \right)$
Fonction de répartition	$\begin{cases} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \bar{G}_{1,3}^{2,1} \left(\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} M^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu} \right)^\eta \middle 1 \ ; \cdot \right) & \eta > 0 \\ 1 - \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \bar{G}_{1,3}^{2,1} \left(\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} M^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu} \right)^\eta \middle 1 \ ; \cdot \right) & \eta < 0 \end{cases}$

5.3.2 Loi de Fisher Généralisée $\mathcal{FG}[\mu, L, M, \eta]$

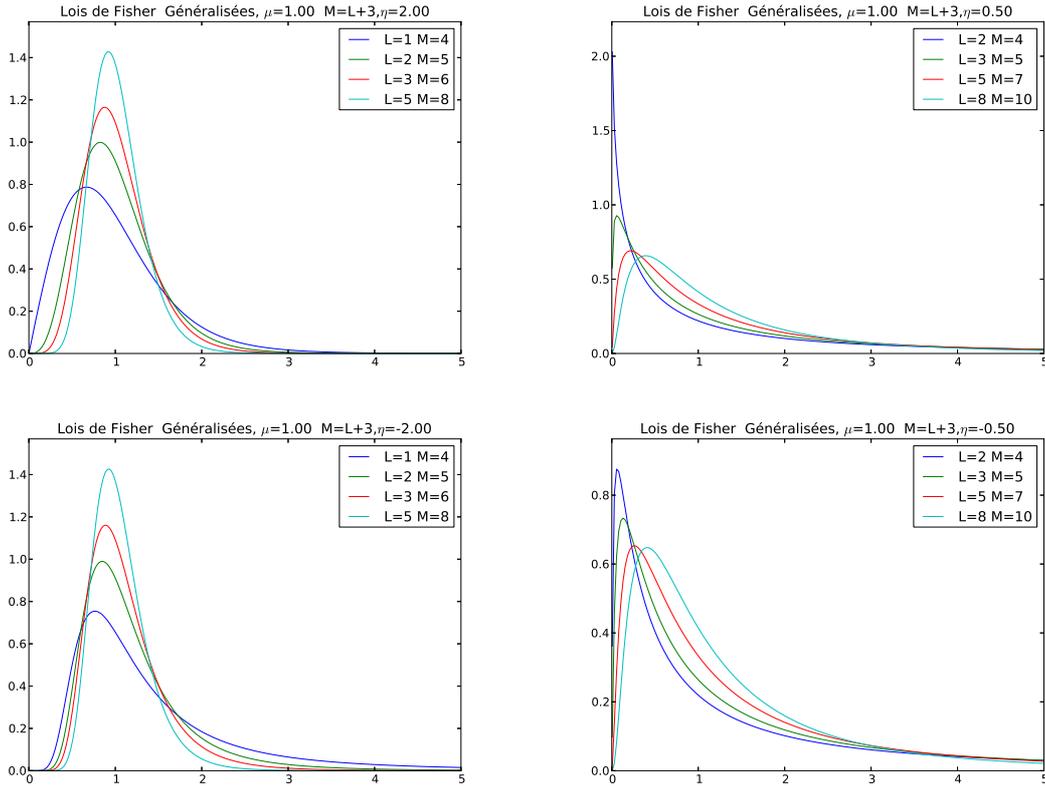


FIGURE 5.9 – Loi \mathcal{FG}

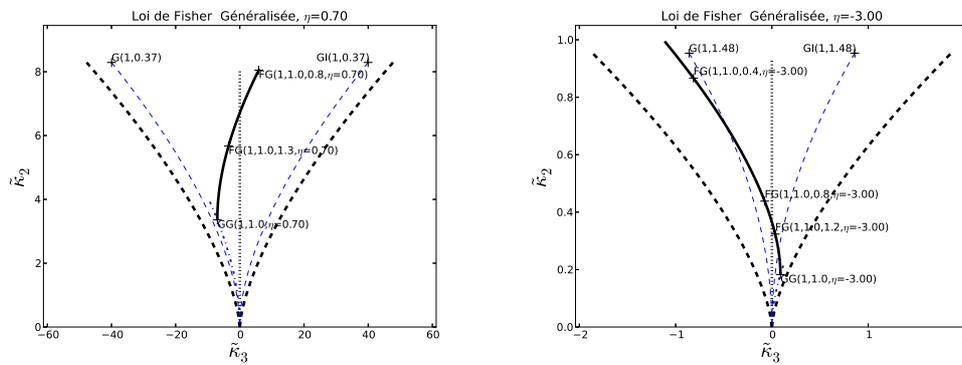


FIGURE 5.10 – Loi \mathcal{FG} dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$

Loi de Fisher Généralisée $\mathcal{FG}[\mu, L, M, \eta]$	
$\mathcal{FG}[\mu, L, M, \eta](x)$	$\frac{ \eta }{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{M^{\frac{1}{\eta}}} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{\left(\frac{\frac{1}{L^{\frac{1}{\eta}}} x}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu}\right)^{\eta L-1}}{\left(1 + \left(\frac{\frac{1}{L^{\frac{1}{\eta}}} x}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu}\right)^{\eta}\right)^{L+M}}$
Loi inverse	$\begin{cases} \mathcal{FG}[\mu, M, L, \eta] \\ \mathcal{FG}[\mu, L, M, -\eta] \end{cases}$
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{FG}[\mu, L, M, \eta] = \mathcal{GG}[\mu, L, \eta] \\ \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{FG}[\mu, L, M, \eta] = \mathcal{GG}[\mu, M, -\eta] \end{cases}$
Construction	Généralisation de la loi de Fisher $\mathcal{H}[\mu] \hat{\star} \mathcal{GG}[1, L, \eta] \hat{\star} \mathcal{GG}[1, M, -\eta]$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L + \frac{s-1}{\eta})}{L^{\frac{s-1}{\eta}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M + \frac{1-s}{\eta})}{M^{\frac{1-s}{\eta}} \Gamma(M)}$
Moments	$\begin{cases} m_1 = \mu \frac{\Gamma(L + \frac{1}{\eta})}{L^{\frac{1}{\eta}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M - \frac{1}{\eta})}{M^{-\frac{1}{\eta}} \Gamma(M)} & \begin{cases} M > \frac{1}{\eta} & \text{si } \eta > 0 \\ L > -\frac{1}{\eta} & \text{si } \eta < 0 \end{cases} \\ m_2 = \mu^2 \frac{\Gamma(L + \frac{2}{\eta})}{L^{\frac{2}{\eta}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M - \frac{2}{\eta})}{M^{-\frac{2}{\eta}} \Gamma(M)} & \begin{cases} M > \frac{2}{\eta} & \text{si } \eta > 0 \\ L > -\frac{2}{\eta} & \text{si } \eta < 0 \end{cases} \\ m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L + \frac{r}{\eta})}{L^{\frac{r}{\eta}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M - \frac{r}{\eta})}{M^{-\frac{r}{\eta}} \Gamma(M)} & \begin{cases} -\eta L < r < \eta M & \text{si } \eta > 0 \\ \eta M < r < -\eta L & \text{si } \eta < 0 \end{cases} \end{cases}$
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \log \mu + \frac{1}{\eta} (\Psi(L) - \log L - (\Psi(M) - \log M)) \\ \tilde{\kappa}_2 = \frac{1}{\eta^2} (\Psi(1, L) + \Psi(1, M)) \\ \tilde{\kappa}_r = \frac{1}{\eta^r} (\Psi(r-1, L) + (-1)^r \Psi(r-1, M)) \end{cases}$
Mode	$\begin{cases} \frac{\mu}{L^{\frac{1}{\eta}}} \left(\frac{(\eta L - 1)M}{L(\eta M + 1)}\right)^{\frac{1}{\eta}} & \text{si } \frac{(\eta L - 1)M}{L(\eta M + 1)} > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Formulation Meijer	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{ \eta }{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{M^{\frac{1}{\eta}}} \bar{G}_{1,1}^{1,1} \left(\left(\frac{\frac{1}{L^{\frac{1}{\eta}}} x}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu} \right)^{\eta} \middle \begin{array}{c} -M + 1 - \frac{1}{\eta} \\ L - \frac{1}{\eta} \end{array} ; \cdot \right)$
Fonction de répartition	$\begin{cases} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \bar{G}_{2,2}^{1,2} \left(\left(\frac{\frac{1}{L^{\frac{1}{\eta}}} x}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu} \right)^{\eta} \middle \begin{array}{c} 1, -M + 1 \\ L \end{array} ; \cdot \right) & \eta > 0 \\ 1 - \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \bar{G}_{2,2}^{1,2} \left(\left(\frac{\frac{1}{L^{\frac{1}{\eta}}} x}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu} \right)^{\eta} \middle \begin{array}{c} 1, -M + 1 \\ L \end{array} ; \cdot \right) & \eta < 0 \end{cases}$

5.3.3 Loi Beta Généralisée $\mathcal{BG}[\mu, L, M, \eta]$

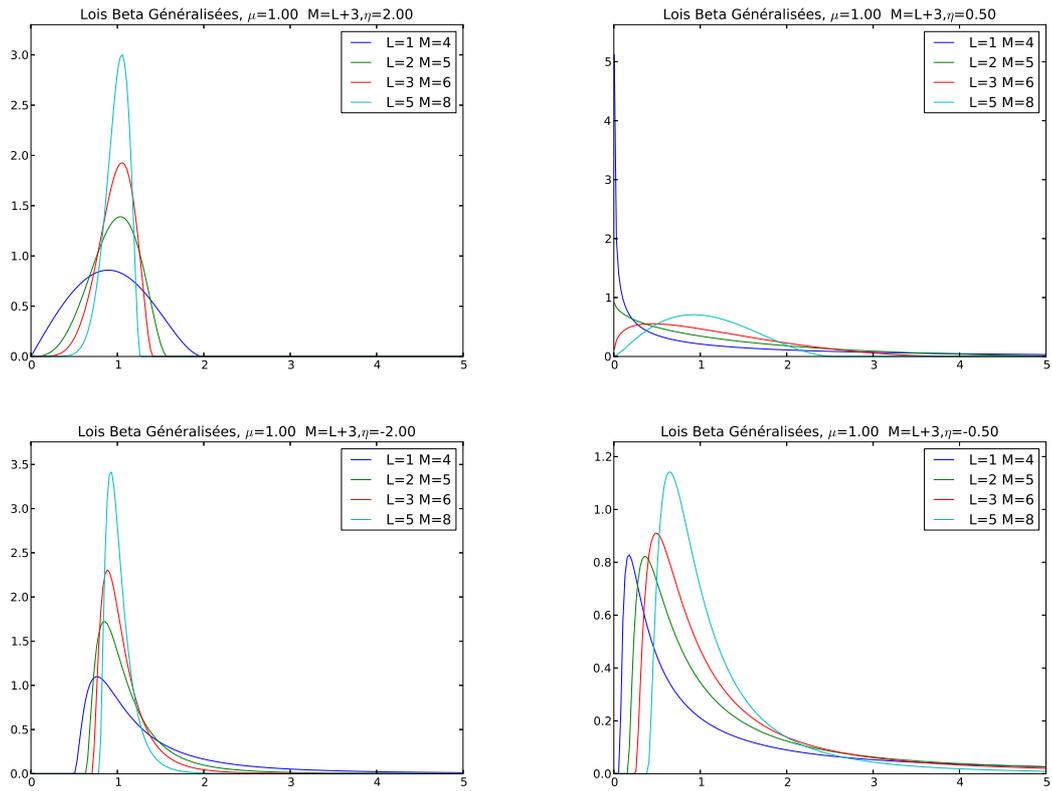


FIGURE 5.11 – Loi \mathcal{BG}

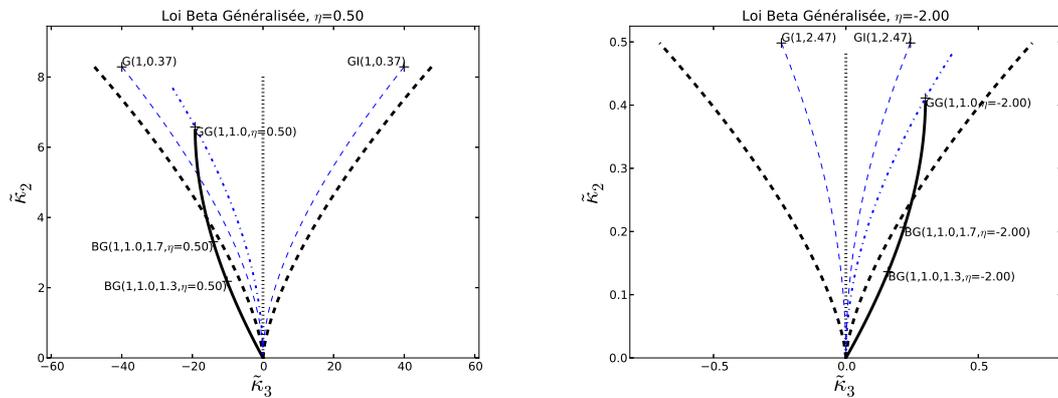


FIGURE 5.12 – Loi \mathcal{BG} dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$

Loi Beta Généralisée $\mathcal{BG}[\mu, L, M, \eta]$	
$\mathcal{BG}[\mu, L, M, \eta](x)$	$\frac{ \eta }{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{M^{\frac{1}{\eta}}} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu}\right)^{\eta L-1} \left(1 - \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu}\right)^{\eta}\right)^{M-L-1} \begin{cases} x \in \left[0; \frac{M^{\frac{1}{\eta}} \mu}{L^{\frac{1}{\eta}}}\right] & \text{si } \eta > 0 \\ x \in \left[\frac{L^{\frac{1}{\eta}} \mu}{M^{\frac{1}{\eta}}}; \infty\right] & \text{si } \eta < 0 \end{cases}$
Loi inverse	$\mathcal{BG}[\mu, L, M, -\eta]$
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{BG}[\mu, L, M, \eta] = \mathcal{GG}[\mu, L, \eta] \\ \lim_{M \rightarrow L^+} \mathcal{BG}[\mu, L, M, \eta] = \mathcal{H}[\mu] \end{cases}$
Construction	Généralisation de la loi Beta $\mathcal{BG}[\mu, L, M, \eta] \hat{\star} \mathcal{GG}[\mu = 1, M, \eta] = \mathcal{GG}[\mu, L, \eta]$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L + \frac{s-1}{\eta})}{L^{\frac{s-1}{\eta}}} \frac{M^{\frac{s-1}{\eta}} \Gamma(M)}{\Gamma(M + \frac{s-1}{\eta})}$
Moments	$\begin{cases} m_1 = \mu \frac{\Gamma(L + \frac{1}{\eta})}{L^{\frac{1}{\eta}}} \frac{M^{\frac{1}{\eta}} \Gamma(M)}{\Gamma(M + \frac{1}{\eta})} \begin{cases} \forall(L, M) & \text{si } \eta > 0 \\ \min(L, M) > -\frac{1}{\eta} & \text{si } \eta < 0 \end{cases} \\ m_2 = \mu^2 \frac{\Gamma(L + \frac{2}{\eta})}{L^{\frac{2}{\eta}}} \frac{M^{\frac{2}{\eta}} \Gamma(M)}{\Gamma(M + \frac{2}{\eta})} \begin{cases} \forall(L, M) & \text{si } \eta > 0 \\ \min(L, M) > -\frac{2}{\eta} & \text{si } \eta < 0 \end{cases} \\ m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L + \frac{r}{\eta})}{L^{\frac{r}{\eta}}} \frac{M^{\frac{r}{\eta}} \Gamma(M)}{\Gamma(M + \frac{r}{\eta})} \begin{cases} \forall(L, M) & \text{si } \eta > 0 \\ r < -\eta \min(L, M) & \text{si } \eta < 0 \end{cases} \end{cases}$
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \log \mu + \frac{1}{\eta} (\Psi(L) - \log L - (\Psi(M) - \log M)) \\ \tilde{\kappa}_2 = \frac{1}{\eta^2} (\Psi(1, L) - \Psi(1, M)) \\ \tilde{\kappa}_r = \frac{1}{\eta^r} (\Psi(r-1, L) - \Psi(r-1, M)) \end{cases}$
Mode	$\begin{aligned} \eta > 0 & \begin{cases} \frac{\mu}{L^{\frac{1}{\eta}}} \frac{M^{\frac{1}{\eta}}}{\left(\frac{\eta L - 1}{\eta(M-1) - 1}\right)^{\frac{1}{\eta}}} & \text{si } L > \frac{1}{\eta} \text{ et } M > L + 1 \\ \frac{\mu}{L^{\frac{1}{\eta}}} \frac{M^{\frac{1}{\eta}}}{\eta} & \text{si } L > \frac{1}{\eta} \text{ et } M \leq L + 1 \\ 0 & \text{si } L \leq \frac{1}{\eta} \text{ et } M > L + 1 \\ \text{bimode} & \text{si } L \leq \frac{1}{\eta} \text{ et } M \leq L + 1 \end{cases} \\ \eta < 0 & \begin{cases} \frac{\mu}{L^{\frac{1}{\eta}}} \frac{M^{\frac{1}{\eta}}}{\left(\frac{\eta L - 1}{\eta(M-1) - 1}\right)^{\frac{1}{\eta}}} & \text{si } M > L + 1 \\ \frac{\mu}{L^{\frac{1}{\eta}}} \frac{M^{\frac{1}{\eta}}}{\eta} & \text{si } M \leq L + 1 \end{cases} \end{aligned}$
Formulation Meijer	$\frac{ \eta }{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{M^{\frac{1}{\eta}}} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)} \bar{G}_{1,1}^{1,0} \left(\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu} \right)^{\eta} \middle \begin{matrix} \cdot & ; & M - \frac{1}{\eta} \\ L - \frac{1}{\eta} & ; & \cdot \end{matrix} \right)$
Fonction de répartition	$\begin{cases} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)} \bar{G}_{2,2}^{1,1} \left(\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu} \right)^{\eta} \middle \begin{matrix} 1 & ; & M \\ L & ; & 0 \end{matrix} \right) & \eta > 0 \\ 1 - \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)} \bar{G}_{2,2}^{1,1} \left(\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu} \right)^{\eta} \middle \begin{matrix} 1 & ; & M \\ L & ; & 0 \end{matrix} \right) & \eta < 0 \end{cases}$

Chapitre 6

Les lois usuelles en imagerie cohérente (lois en amplitude)

Bien que pouvant être considérées comme des cas particuliers des lois généralisées, les lois dites “en amplitude” et particulièrement bien adaptées au traitement en imagerie cohérente¹ méritent un chapitre dédié permettant aux utilisateurs de trouver les grandeurs souhaitées pour leurs données.

Comme dans le cas des lois généralisées, on sait que pour passer d’une loi décrivant une variable aléatoire X , de densité de probabilité $p(x)$ et de log-fonction caractéristique $\phi(s)$, à une loi décrivant une variable aléatoire Y telle que $X = Y^2$, de densité de probabilité $p_A(x)$ et de log-fonction caractéristique $\phi_A(s)$ (ce qui signifie que l’on traite l’amplitude y et l’intensité $x = y^2$), on utilise les relations 2.58 et 2.59 :

$$p_A(y) = 2 y p(y^2)$$

$$\phi_A(s) = \phi\left(1 + \frac{s-1}{2}\right)$$

Les log-cumulants ($r > 1$) s’obtiennent de façon simplissime (relation 2.60) :

$$\tilde{\kappa}_{A,r} = \frac{1}{2^r} \tilde{\kappa}_r$$

Dans ce catalogue de lois en amplitude, seules la loi exponentielle décroissante et la loi Gamma portent un nom spécifique (loi de Rayleigh et loi de Nakagami), les autres étant tout simplement dénommées en rajoutant “en amplitude” à leur nom initial². Une loi un peu à part, la loi de Rice (dans sa formulation traditionnelle et dans une nouvelle formulation qui s’avèrera judicieuse lorsque l’on voudra estimer cette loi) entre aussi dans cette catégorie puisqu’elle est caractéristique des images en amplitude (voir le paragraphe 1.3.3).

1. La quasi totalité des agences spatiales fournissent des données en amplitude, très rarement en échelle logarithmique.

2. A noter que dans ce document on parle de “loi xxx en amplitude inverse” plutôt que de “loi xxx inverse en amplitude”.

6.1 Lois en amplitude à un paramètre

6.1.1 Loi de Rayleigh $\mathcal{R}[\mu]$

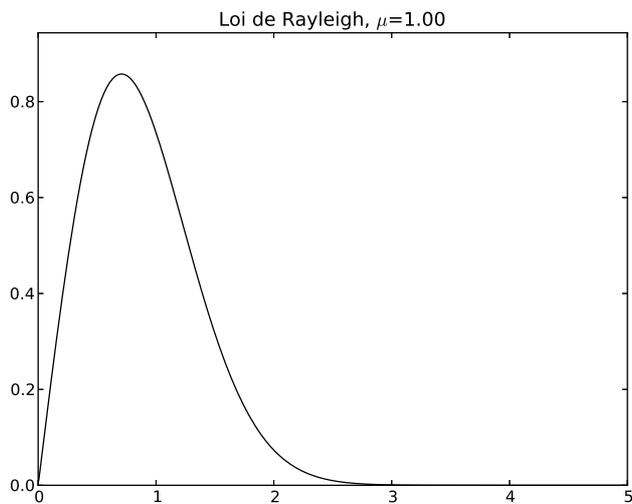


FIGURE 6.1 – Loi de Rayleigh

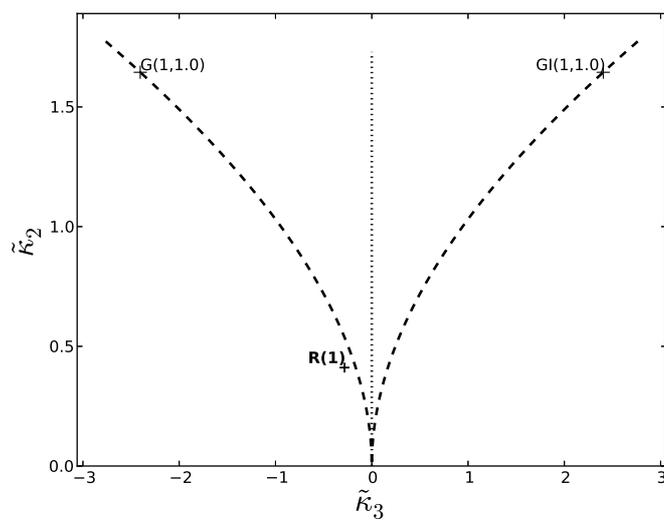


FIGURE 6.2 – Loi de Rayleigh

Loi de Rayleigh	
$\mathcal{R}[\mu](x)$	$\frac{2}{\mu} \left(\frac{x}{\mu}\right) e^{-\left(\frac{x}{\mu}\right)^2}$
Loi inverse	$\mathcal{RI}[\mu](x)$
Construction	
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$
Moments	$\begin{cases} m_1 = \mu \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sim 0.886 \mu \\ m_2 = \mu^2 \\ m_r = \mu^r \Gamma\left(1 + \frac{r}{2}\right) \quad r > -2 \end{cases}$
Ecart type	$\mu \frac{\sqrt{4-\pi}}{2} \sim 0.463 \mu$
Coefficient de variation	$\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}} \sim 0.523$
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \log \mu + \frac{1}{2} \Psi(1) \\ \tilde{\kappa}_2 = \frac{1}{4} \Psi(1, 1) \\ \tilde{\kappa}_r = \left(\frac{1}{2}\right)^r \Psi(r-1, 1) \end{cases}$
Mode	$\sqrt{\frac{1}{2}} \mu \sim 0.707 \mu$
Formulation Meijer	$\frac{2}{\mu} \bar{G}_{0,1}^{1,0} \left(\left(\frac{x}{\mu}\right)^2 \middle \begin{matrix} \cdot & ; & \cdot \\ \frac{1}{2} & ; & \cdot \end{matrix} \right)$
Fonction de répartition	$\bar{G}_{1,2}^{1,0} \left(\left(\frac{x}{\mu}\right)^2 \middle \begin{matrix} 1 & ; & \cdot \\ 1 & ; & 0 \end{matrix} \right)$

6.1.2 Loi de Rayleigh Inverse $\mathcal{RI}[\mu]$

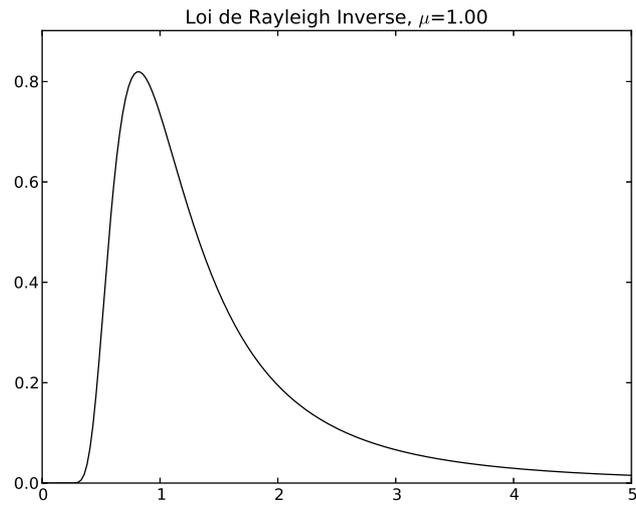


FIGURE 6.3 – Loi de Rayleigh Inverse

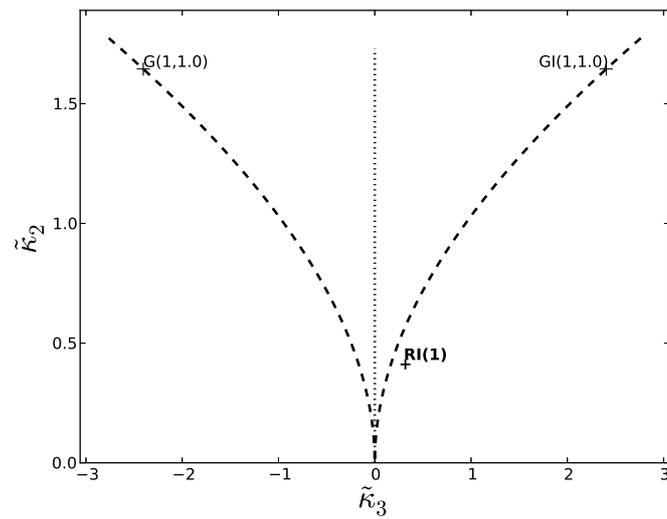


FIGURE 6.4 – Loi de Rayleigh Inverse

Loi de Rayleigh Inverse	
$\mathcal{RI}[\mu](x)$	$\frac{2}{\mu} \left(\frac{x}{\mu}\right)^3 e^{-\left(\frac{x}{\mu}\right)^2}$
Loi inverse	$\mathcal{R}[\mu](x)$
Cas limite	
Construction	
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \Gamma\left(1 + \frac{1-s}{2}\right)$
Moments	$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = \mu \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \mu \sqrt{\pi} \\ m_2 = \text{sans} \\ m_r = \mu^r \Gamma\left(1 - \frac{r}{2}\right) \quad r < 2 \end{array} \right.$
Ecart type	sans
Coefficient de variation	sans
Log-Cumulants	$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\kappa}_1 = \log \mu - \frac{1}{2} \Psi(1) \\ \tilde{\kappa}_2 = \frac{1}{4} \Psi(1, 1) \\ \tilde{\kappa}_r = \left(-\frac{1}{2}\right)^r \Psi(r-1, 1) \end{array} \right.$
Mode	$\sqrt{\frac{2}{3}} \mu$
Formulation Meijer	$\frac{2}{\mu} \bar{G}_{1,0}^{0,1} \left(\left(\frac{x}{\mu}\right)^2 \middle \begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right)$
Fonction de répartition	$\bar{G}_{2,1}^{0,2} \left(\left(\frac{x}{\mu}\right)^2 \middle \begin{array}{c} 1, 0 \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ 0 \end{array} \right)$

6.2 Lois en amplitude à deux paramètres

6.2.1 Loi de Rayleigh-Nakagami $\mathcal{RN}[\mu, L]$

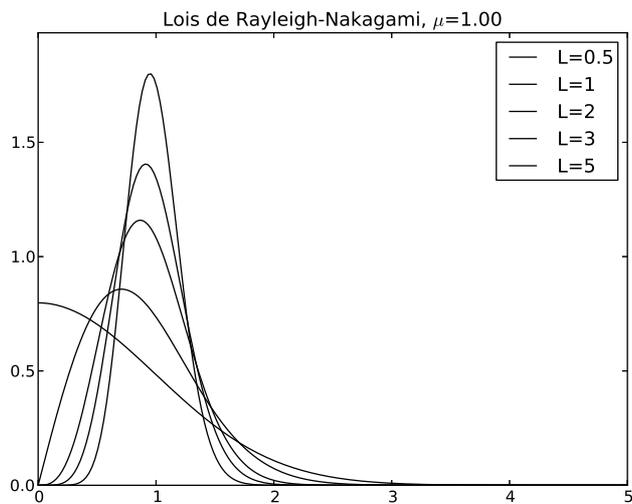


FIGURE 6.5 – Loi de Rayleigh-Nakagami

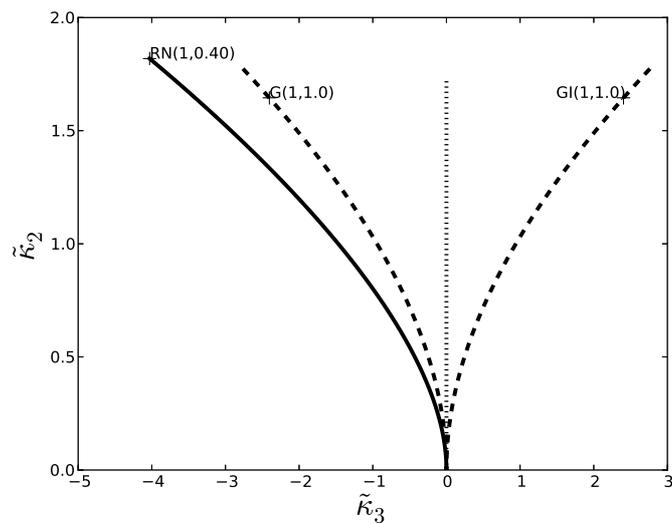


FIGURE 6.6 – Loi de Rayleigh-Nakagami

Loi de Rayleigh-Nakagami	
$\mathcal{RN}[\mu, L](x)$	$\frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{L}}{\Gamma(L)} \left(\frac{\sqrt{L}x}{\mu}\right)^{2L-1} e^{-\left(\frac{\sqrt{L}x}{\mu}\right)^2}$
Loi inverse	$\mathcal{RN}\mathcal{I}[\mu, L](x)$
Cas limite $L \rightarrow \infty$	$\mathcal{H}[\mu]$
Construction	
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L + \frac{s-1}{2})}{L^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(L)}$
Moments	$\begin{cases} m_1 = \mu \frac{\Gamma(L + \frac{1}{2})}{\sqrt{L} \Gamma(L)} \\ m_2 = \mu^2 \\ m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L + \frac{r}{2})}{L^{\frac{r}{2}} \Gamma(L)} \quad r > -2L \end{cases}$
Ecart type	$\mu \sqrt{\frac{\Gamma(L)\Gamma(L+1) - (\Gamma(L + \frac{1}{2}))^2}{\Gamma(L)\Gamma(L+1)}}$
Coefficient de variation	$\sqrt{\frac{\Gamma(L)\Gamma(L+1)}{(\Gamma(L + \frac{1}{2}))^2}} - 1 \sim \frac{1}{2\sqrt{L}}$
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \log \mu + \frac{1}{2} (\Psi(L) - \log(L)) \\ \tilde{\kappa}_2 = \frac{1}{4} \Psi(1, L) \\ \tilde{\kappa}_r = \left(\frac{1}{2}\right)^r \Psi(r-1, L) \end{cases}$
Mode	$\begin{cases} \sqrt{\frac{2L-1}{2L}} \mu & L > \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Formulation Meijer	$\frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{L}}{\Gamma(L)} \bar{G}_{0,1}^{1,0} \left(\left(\frac{\sqrt{L}x}{\mu}\right)^2 \middle \begin{matrix} \cdot & ; & \cdot \\ L - \frac{1}{2} & ; & \cdot \end{matrix} \right)$
Fonction de répartition	$\frac{1}{\Gamma(L)} \bar{G}_{1,2}^{1,1} \left(\left(\frac{\sqrt{L}x}{\mu}\right)^2 \middle \begin{matrix} 1 & ; & \cdot \\ L & ; & 0 \end{matrix} \right)$

6.2.2 Loi de Rayleigh-Nakagami Inverse $\mathcal{RN}\mathcal{I}[\mu, M]$

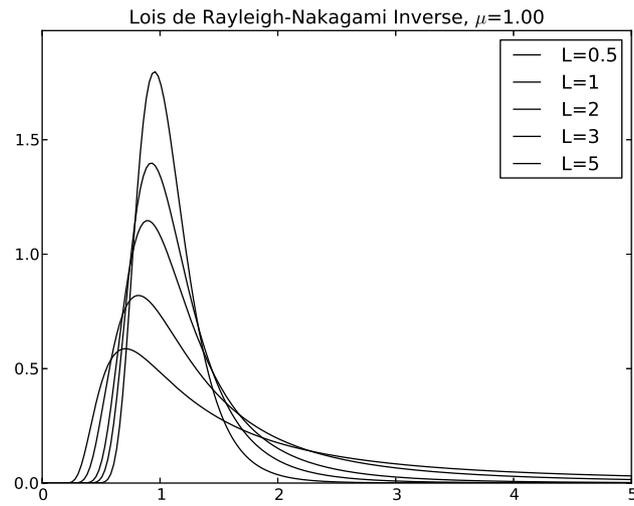


FIGURE 6.7 – Loi de Rayleigh-Nakagami Inverse

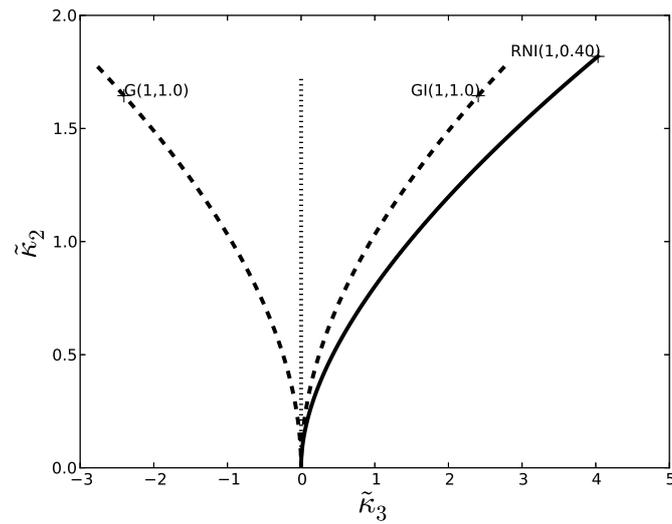


FIGURE 6.8 – Loi de Rayleigh-Nakagami Inverse

Loi de Rayleigh-Nakagami Inverse	
$\mathcal{RN}\mathcal{I}[\mu, M](x)$	$\frac{2}{\mu} \frac{1}{\sqrt{M}\Gamma(M)} \left(\frac{\sqrt{M}\mu}{x}\right)^{2M+1} e^{-\left(\frac{\sqrt{M}\mu}{x}\right)^2}$
Loi inverse	$\mathcal{RN}[\mu, M](x)$
Cas limite $M \rightarrow \infty$	$\mathcal{H}[\mu]$
Construction	
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(M + \frac{1-s}{2})}{M^{\frac{1-s}{2}} \Gamma(M)}$
Moments	$\begin{cases} m_1 = \mu \frac{\sqrt{M}\Gamma(M - \frac{1}{2})}{\Gamma(M)} & M > \frac{1}{2} \\ m_2 = \mu^2 \frac{M}{M-1} & M > 1 \\ m_r = \mu^r \frac{M^{\frac{r}{2}} \Gamma(M - \frac{r}{2})}{\Gamma(M)} & r < 2M \end{cases}$
Ecart type	$\mu\sqrt{M} \sqrt{\frac{\Gamma(M)\Gamma(M-1) - (\Gamma(M - \frac{1}{2}))^2}{\Gamma(M)^2}} \quad M > 1$
Coefficient de variation	$\sqrt{\frac{\Gamma(M)\Gamma(M-1)}{\Gamma(M - \frac{1}{2})^2} - 1} \quad M > 1$
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \log \mu - \frac{1}{2}(\Psi(M) - \log(M)) \\ \tilde{\kappa}_2 = \frac{1}{4} \Psi(1, M) \\ \tilde{\kappa}_r = \left(-\frac{1}{2}\right)^r \Psi(r-1, M) \end{cases}$
Mode	$\sqrt{\frac{2M}{2M+1}} \mu$
Formulation Meijer	$\frac{2}{\mu} \frac{1}{\sqrt{M}\Gamma(M)} \tilde{G}_{1,0}^{0,1} \left(\left(\frac{x}{\sqrt{M}\mu}\right)^2 \middle \begin{matrix} -M + \frac{1}{2} & ; & \cdot \\ \cdot & ; & \cdot \end{matrix} \right)$
Fonction de répartition	$\frac{1}{\Gamma(M)} \tilde{G}_{2,1}^{0,2} \left(\left(\frac{x}{\sqrt{M}\mu}\right)^2 \middle \begin{matrix} 1, -M + 1 & ; & \cdot \\ \cdot & ; & 0 \end{matrix} \right)$

6.2.3 Loi de Rice $\mathcal{RC}[\mu, \mu_C]$

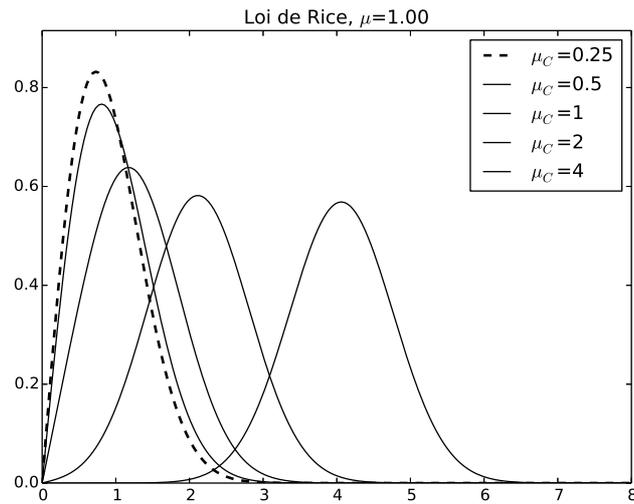


FIGURE 6.9 – Loi de Rice. Pour $\mu_C \rightarrow 0$, la loi de Rice tend vers une loi de Rayleigh.

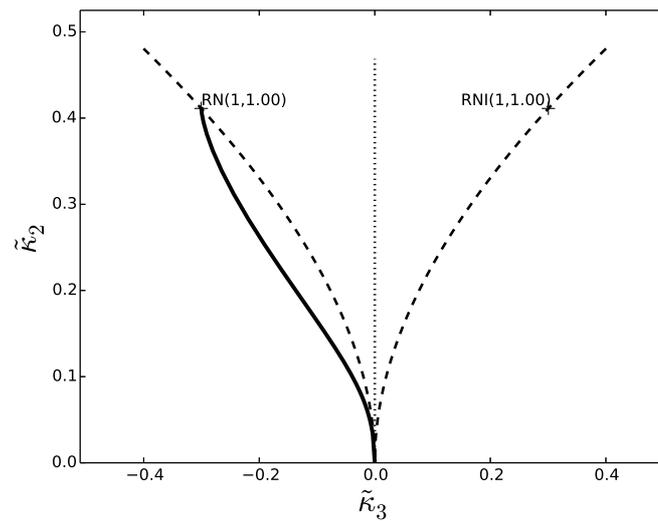


FIGURE 6.10 – Loi de Rice. Pour $\mu_C \rightarrow 0$, la loi de Rice tend vers une loi de Rayleigh. Pour $\mu_C \rightarrow \infty$, la loi de Rice tend vers une loi homothétique.

Loi de Rice	
$\mathcal{RC}[\mu, \mu_C](x)$	$\frac{2x}{\mu^2} e^{-\frac{x^2 + \mu_C^2}{\mu^2}} I_0\left(\frac{2\mu_C x}{\mu^2}\right)$
Loi inverse	
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{\mu \rightarrow 0} \mathcal{RC}[\mu, \mu_C] = \mathcal{H}[\mu] \\ \lim_{\mu_C \rightarrow 0} \mathcal{RC}[\mu, \mu_C] = \mathcal{R}[\mu] \end{cases}$
Construction	
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} e^{-\frac{\mu_C^2}{\mu^2}} \Gamma\left(1 + \frac{s-1}{2}\right) {}_1F_1\left(1 + \frac{s-1}{2}; 1; \frac{\mu_C^2}{\mu^2}\right)$
Moments	$\begin{cases} m_1 = \mu e^{-\frac{\mu_C^2}{\mu^2}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) {}_1F_1\left(1 + \frac{1}{2}; 1; \frac{\mu_C^2}{\mu^2}\right) \\ m_2 = \mu^2 e^{-\frac{\mu_C^2}{\mu^2}} {}_1F_1\left(2; 1; \frac{\mu_C^2}{\mu^2}\right) \\ m_r = \mu^r e^{-\frac{\mu_C^2}{\mu^2}} \Gamma\left(1 + \frac{r}{2}\right) {}_1F_1\left(1 + \frac{r}{2}; 1; \frac{\mu_C^2}{\mu^2}\right) \end{cases}$
Ecart type	
Coefficient de variation	$\sqrt{\frac{4 e^{\frac{\mu_C^2}{\mu^2}} \left(1 + \frac{\mu_C^2}{\mu^2}\right)}{\pi \left(\left(1 + \frac{\mu_C^2}{\mu^2}\right) I_0\left(\frac{\mu_C^2}{2\mu^2}\right) + \frac{\mu_C^2}{\mu^2} I_1\left(\frac{\mu_C^2}{2\mu^2}\right)\right)^2} - 1}$
Log-Cumulants	
Mode	
Formulation Meijer	
Fonction de répartition	

I_0 est la fonction de Bessel modifiée de première espèce

6.2.4 Loi de Rice $\mathcal{RC}_2[\mu, \lambda]$

Une caractéristique parfois dérangerante de la loi de Rice sous son formalisme traditionnel est d'avoir un coefficient de variation dépendant des deux paramètres μ (le paramètre du chatoïement) et de μ_C (la valeur de la cible déterministe). Au vu de cette observation, il est aisé de proposer un nouveau formalisme pour la loi de Rice faisant intervenir le paramètre du chatoïement μ et un nouveau paramètre λ tel que :

$$\lambda = \frac{\mu_C}{\mu}$$

et qui permet de retrouver l'amplitude de la cible puisque l'on peut écrire : $\mu_C = \lambda\mu$.

Avec ce choix de paramètres, la loi de Rice s'écrit alors :

$$\mathcal{RC}_2[\mu, \lambda](x) = \frac{2x}{\mu^2} e^{-\left(\frac{x^2}{\mu^2} + \lambda^2\right)} I_0\left(2\lambda\frac{x}{\mu}\right) \quad (6.1)$$

La fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit alors :

$$\mu^{s-1} e^{-\lambda^2} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) {}_1F_1\left(1 + \frac{s-1}{2}; 1; \lambda^2\right) \quad (6.2)$$

On remarque alors qu'elle s'exprime comme le produit de deux termes :

- un terme qui ne dépend que de μ : $\mu^{s-1} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$ et que l'on identifie comme une loi de Rayleigh : c'est la loi de Rayleigh du chatoïement pleinement développé de notre modèle ;
- un second terme qui ne dépend que de λ : $e^{-\lambda^2} {}_1F_1\left(1 + \frac{s-1}{2}; 1; \lambda^2\right)$

Sous cette forme multiplicative, on peut dire que la loi de Rice est la convolution de Mellin d'une loi de Rayleigh ne dépendant que de μ et d'une loi ne dépendant que de λ , notée ici $\mathcal{D}[\lambda](x)$, et décrite uniquement par sa log-fonction caractéristique, donc sous forme de transformée de Mellin inverse :

$$\mathcal{D}[\lambda](x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} x^{-s} e^{-\lambda^2} {}_1F_1\left(1 + \frac{s-1}{2}; 1; \lambda^2\right) ds$$

et dont malheureusement on ne connaît pas la forme analytique.

Dans ce nouveau formalisme, les premiers moments de la loi de Rice sont donnés par les relations suivantes³ :

$$\begin{cases} m_1 &= \mu e^{-\lambda^2} \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) {}_1F_1\left(1 + \frac{1}{2}; 1; \lambda^2\right) \\ m_2 &= \mu^2 e^{-\lambda^2} {}_1F_1(2; 1; \lambda^2) \\ m_r &= \mu^r e^{-\lambda^2} \Gamma\left(1 + \frac{r}{2}\right) {}_1F_1\left(1 + \frac{r}{2}; 1; \lambda^2\right) \end{cases} \quad (6.3)$$

et on remarque que le moment d'ordre r est proportionnel à μ^r : μ peut alors s'assimiler à un facteur d'échelle. Cette constatation va avoir une grande conséquence sur le coefficient de variation puisque l'on a alors :

$$\gamma = \sqrt{\frac{e^{\lambda^2} {}_1F_1(2; 1; \lambda^2)}{\left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) {}_1F_1\left(1 + \frac{1}{2}; 1; \lambda^2\right)\right)^2}} - 1 \quad (6.4)$$

que l'on peut aussi réécrire à l'aide de fonctions de Bessel modifiées de première espèce (voir [38]) :

$$\gamma = \sqrt{\frac{4 e^{\lambda^2} (1 + \lambda^2)}{\pi \left((1 + \lambda^2) I_0\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) + \lambda^2 I_1\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\right)^2}} - 1 \quad (6.5)$$

On note que le coefficient de variation ne dépend que du paramètre de forme λ .

3. Les moments pairs ont aussi une expression polynomiale en λ , voir [38]

Loi de Rice $\mathcal{RC}_2 [\mu, \lambda]$	
$\mathcal{RC}_2 [\mu, \lambda] (x)$	$\frac{2x}{\mu^2} e^{-\left(\frac{x^2}{\mu^2} + \lambda^2\right)} I_0 \left(2\lambda \frac{x}{\mu}\right)$
Loi inverse	
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{RC}_2 [\mu, \lambda] = \mathcal{R} [\mu] \\ \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{RC}_2 [\mu, \lambda] = \mathcal{N} \left[\lambda \mu, \frac{\mu}{\sqrt{2}} \right] \end{cases}$
Construction	
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} e^{-\lambda^2} \Gamma \left(1 + \frac{s-1}{2}\right) {}_1F_1 \left(1 + \frac{s-1}{2}; 1; \lambda^2\right)$
Moments	$\begin{cases} m_1 = \mu e^{-\lambda^2} \Gamma \left(1 + \frac{1}{2}\right) {}_1F_1 \left(1 + \frac{1}{2}; 1; \lambda^2\right) \\ m_2 = \mu^2 e^{-\lambda^2} {}_1F_1 (2; 1; \lambda^2) = \mu^2 (1 + \lambda^2) \\ m_r = \mu^r e^{-\lambda^2} \Gamma \left(1 + \frac{r}{2}\right) {}_1F_1 \left(1 + \frac{r}{2}; 1; \lambda^2\right) \end{cases}$
Ecart type	
Coefficient de variation	$\begin{cases} \sqrt{\frac{4 e^{\lambda^2} (1 + \lambda^2)}{\pi \left((1 + \lambda^2) I_0 \left(\frac{\lambda^2}{2}\right) + \lambda^2 I_1 \left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \right)^2} - 1} \\ \sqrt{\frac{e^{\lambda^2} {}_1F_1 (2; 1; \lambda^2)}{\left(\Gamma \left(1 + \frac{1}{2}\right) {}_1F_1 \left(1 + \frac{1}{2}; 1; \lambda^2\right) \right)^2} - 1} \end{cases}$
Log-Cumulants	
Mode	
Formulation Meijer	
Fonction de répartition	

6.3 Lois en amplitude à trois paramètres

6.3.1 Loi \mathcal{K} en amplitude

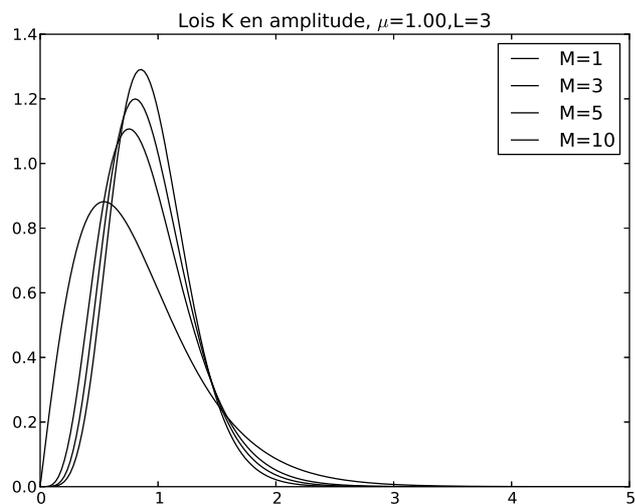
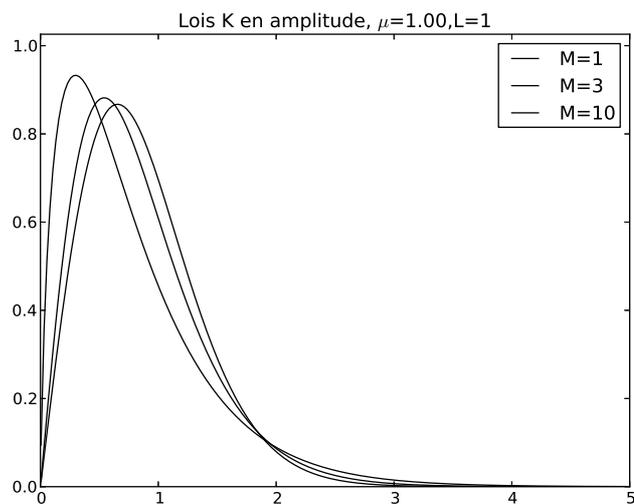


FIGURE 6.11 – Loi $\mathcal{K}\mathcal{A}$

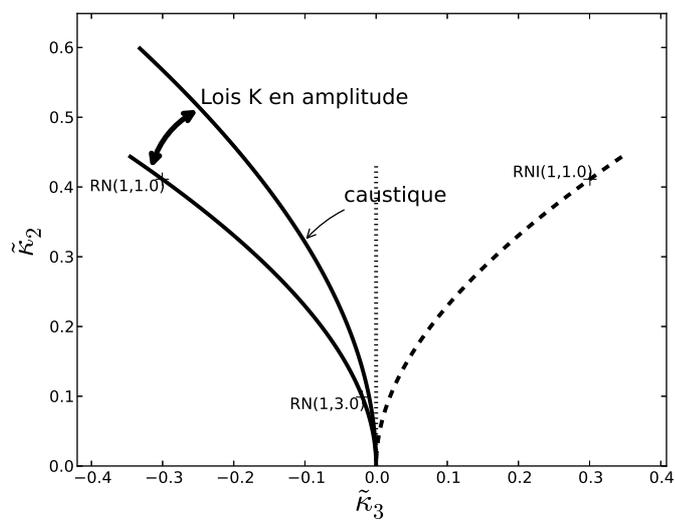
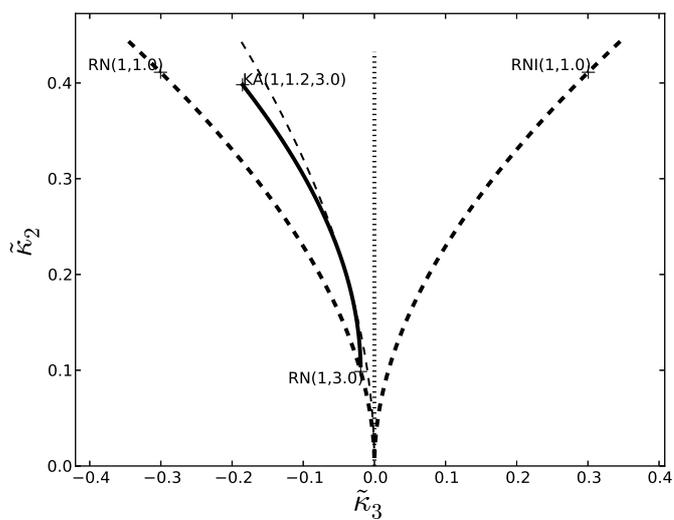


FIGURE 6.12 – Loi $\mathcal{K}\mathcal{A}$

Loi K en amplitude $\mathcal{KA}[\mu, L, M]$	
$\mathcal{KA}[\mu, L, M](x)$	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{4\sqrt{LM}}{\mu} \left(\frac{\sqrt{LM}x}{\mu}\right)^{M+L-1} K_{M-L} \left[2\frac{\sqrt{LM}x}{\mu}\right]$
Loi inverse	$\mathcal{KAZ}[\mu, L, M](x)$
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{KA}[\mu, L, M] = \mathcal{RN}[\mu, M] \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{KA}[\mu, L, M] = \mathcal{RN}[\mu, L] \end{cases}$
Construction	$\mathcal{H}[\mu] \hat{\star} \mathcal{RN}[1, L] \hat{\star} \mathcal{RN}[1, M]$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+\frac{s-1}{2})}{L^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+\frac{s-1}{2})}{M^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(M)}$
Moments	$\begin{cases} m_1 = \mu \frac{\Gamma(L+\frac{1}{2})}{\sqrt{L} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+\frac{1}{2})}{\sqrt{M} \Gamma(M)} \\ m_2 = \mu^2 \\ m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L+\frac{r}{2})}{L^{\frac{r}{2}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+\frac{r}{2})}{M^{\frac{r}{2}} \Gamma(M)} \quad r > -2 \min(L, M) \end{cases}$
Ecart type	$\mu \sqrt{1 - \frac{(\Gamma(L+\frac{1}{2}))^2}{\Gamma(L)\Gamma(L+1)} \frac{(\Gamma(M+\frac{1}{2}))^2}{\Gamma(M)\Gamma(M+1)}}$
Coefficient de variation	$\sqrt{\frac{\Gamma(L)\Gamma(L+1)}{(\Gamma(L+\frac{1}{2}))^2} \frac{\Gamma(M)\Gamma(M+1)}{(\Gamma(M+\frac{1}{2}))^2} - 1}$
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \log(\mu) + \frac{1}{2}(\Psi(L) - \log(L)) + \frac{1}{2}(\Psi(M) - \log(M)) \\ \tilde{\kappa}_2 = \frac{1}{4}(\Psi(1, L) + \Psi(1, M)) \\ \tilde{\kappa}_r = \left(\frac{1}{2}\right)^r (\Psi(r-1, L) + \Psi(r-1, M)) \end{cases}$
Mode	pas d'expression analytique
Formulation Meijer	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{\sqrt{LM}}{\mu} \tilde{G}_{0,2}^{2,0} \left(\left(\frac{\sqrt{LM}x}{\mu}\right)^2 \middle \begin{matrix} L - \frac{1}{2}, M - \frac{1}{2} \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \right)$
Fonction de répartition	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \tilde{G}_{1,3}^{2,1} \left(\left(\frac{\sqrt{LM}x}{\mu}\right)^2 \middle \begin{matrix} 1 \\ L, M \\ \cdot \\ 0 \end{matrix} \right)$

6.3.2 Loi \mathcal{K} en amplitude Inverse

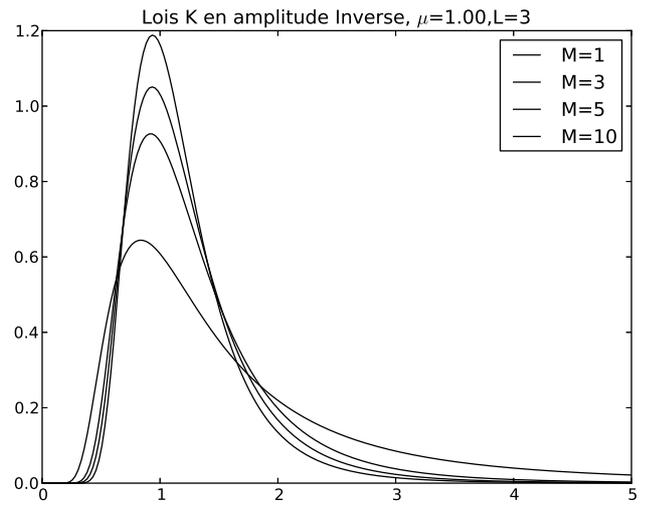
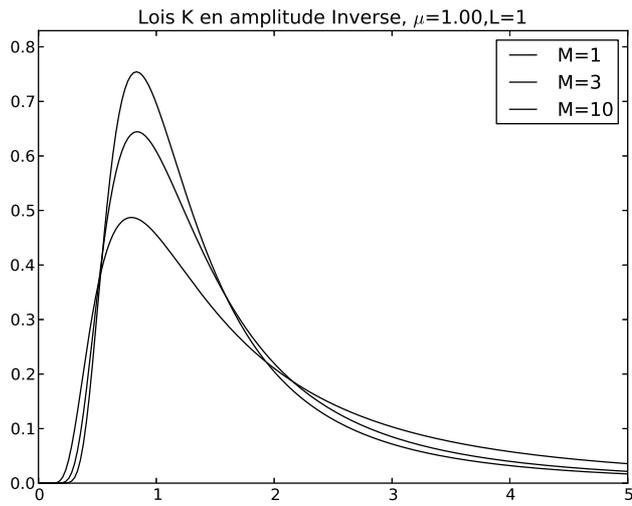


FIGURE 6.13 – Loi $\mathcal{K}AI$

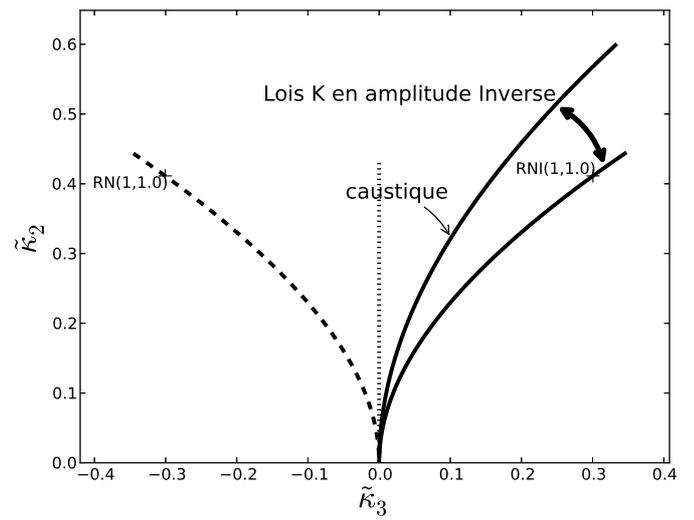
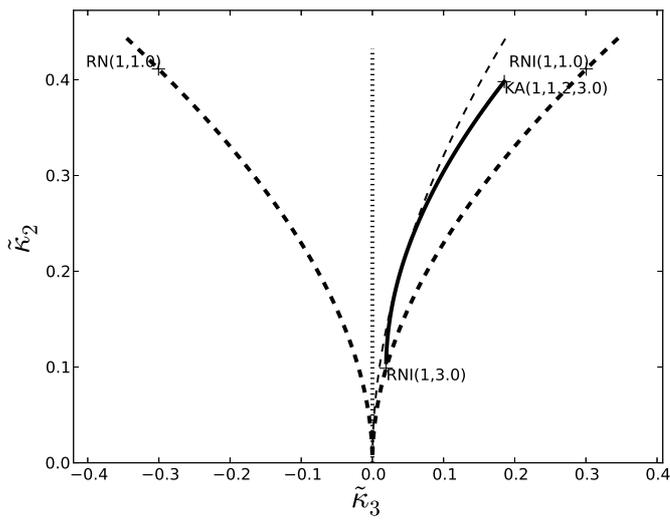


FIGURE 6.14 – Loi $\mathcal{K}AI$

Loi K en amplitude Inverse $\mathcal{KAI} [\mu, L, M]$	
$\mathcal{KAI} [\mu, L, M] (x)$	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{4}{\sqrt{LM}\mu} \left(\frac{\sqrt{LM}\mu}{x} \right)^{M+L+1} K_{M-L} \left[2 \frac{\sqrt{LM}\mu}{x} \right]$
Loi inverse	$\mathcal{KA} [\mu, L, M] (x)$
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{KAI} [\mu, L, M] &= \mathcal{RNI} [\mu, M] \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{KAI} [\mu, L, M] &= \mathcal{RNI} [\mu, L] \end{cases}$
Construction	$\mathcal{H}[\mu] \hat{\star} \mathcal{RNI} [1, L] \hat{\star} \mathcal{RNI} [1, M]$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{L^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(L - \frac{s-1}{2})}{\Gamma(L)} \frac{M^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(M - \frac{s-1}{2})}{\Gamma(M)}$
Moments	$\begin{cases} m_1 &= \mu \frac{\sqrt{L} \Gamma(L - \frac{1}{2})}{\Gamma(L)} \frac{\sqrt{M} \Gamma(M - \frac{1}{2})}{\Gamma(M)} & \min(L, M) > \frac{1}{2} \\ m_2 &= \mu^2 \frac{L}{L-1} \frac{M}{M-1} & \min(L, M) > 1 \\ m_r &= \mu^r \frac{L^{\frac{r}{2}} \Gamma(L - \frac{r}{2})}{\Gamma(L)} \frac{M^{\frac{r}{2}} \Gamma(M - \frac{r}{2})}{\Gamma(M)} & r < 2 \min(L, M) \end{cases}$
Ecart type	$\mu \sqrt{LM} \sqrt{\frac{\Gamma(L-1) \Gamma(M-1)}{\Gamma(L) \Gamma(M)} - \left(\frac{\Gamma(L-\frac{1}{2}) \Gamma(M-\frac{1}{2})}{\Gamma(L) \Gamma(M)} \right)^2} \quad \min(L, M) > 1$
Coefficient de variation	$\sqrt{\frac{\Gamma(L) \Gamma(L-1)}{(\Gamma(L-\frac{1}{2}))^2} \frac{\Gamma(M) \Gamma(M-1)}{(\Gamma(M-\frac{1}{2}))^2} - 1} \quad \min(L, M) > 1$
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 &= \log(\mu) - \frac{1}{2} (\Psi(L) - \log(L)) - \frac{1}{2} (\Psi(M) - \log(M)) \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{1}{4} (\Psi(1, L) + \Psi(1, M)) \\ \tilde{\kappa}_r &= \left(-\frac{1}{2}\right)^r (\Psi(r-1, L) + \Psi(r-1, M)) \end{cases}$
Mode	pas d'expression analytique
Formulation Meijer	$\frac{2}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{1}{\sqrt{LM}\mu} \bar{G}_{2,0}^{0,2} \left(\left(\frac{x}{\sqrt{LM}\mu} \right)^2 \middle \begin{matrix} -L + \frac{1}{2}, -M + \frac{1}{2} & ; \cdot \\ \cdot & ; \cdot \end{matrix} \right)$
Fonction de répartition	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \bar{G}_{3,1}^{0,3} \left(\left(\frac{x}{\sqrt{LM}\mu} \right)^2 \middle \begin{matrix} -L + 1, -M + 1, 1 & ; \cdot \\ \cdot & ; 0 \end{matrix} \right)$

6.3.3 Loi de Fisher en amplitude

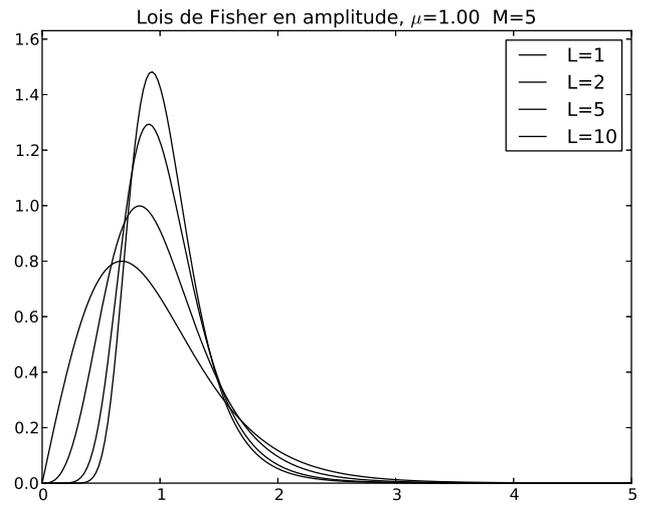
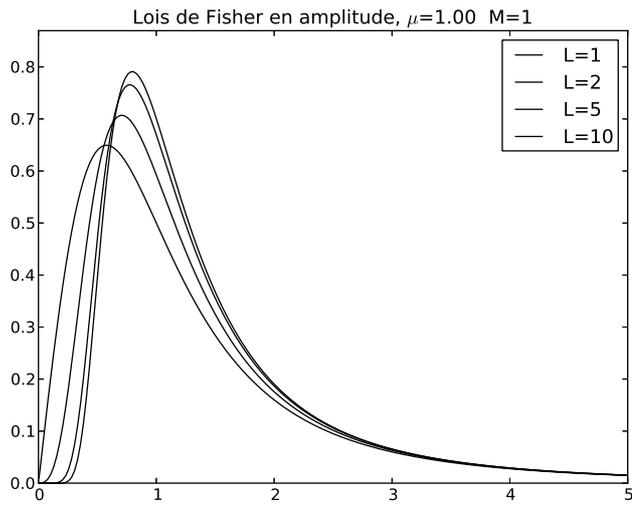


FIGURE 6.15 – Loi \mathcal{FA}

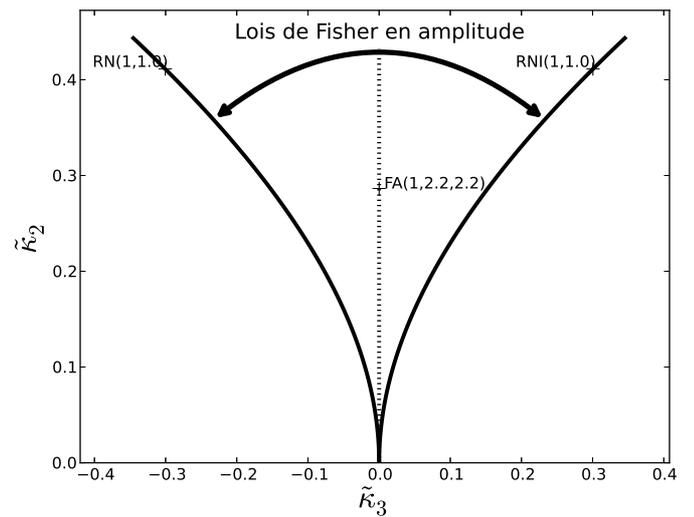
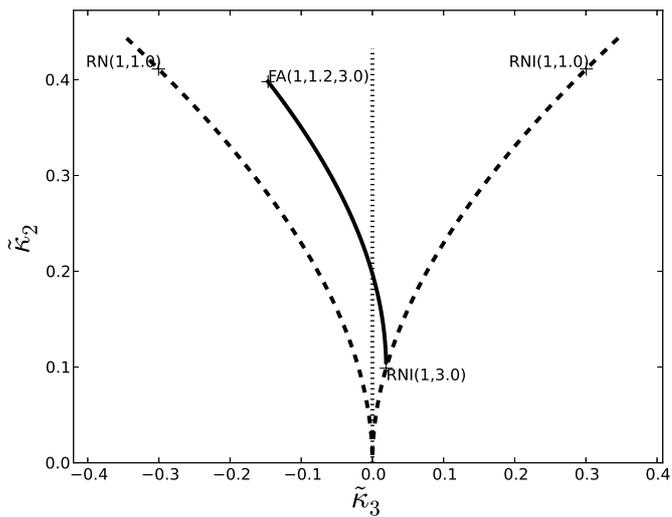


FIGURE 6.16 – Loi \mathcal{FA}

Loi de Fisher en amplitude $\mathcal{FA}[\mu, L, M]$	
$\mathcal{FA}[\mu, L, M](x)$	$\frac{2}{\mu} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \sqrt{\frac{L}{M}} \frac{\left(\sqrt{\frac{L}{M}} \frac{x}{\mu}\right)^{2L-1}}{\left(1+\left(\sqrt{\frac{L}{M}} \frac{x}{\mu}\right)^2\right)^{L+M}}$
Loi inverse	$\mathcal{FA}[\mu, M, L](x)$
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{FA}[\mu, L, M] = \mathcal{RN}\mathcal{I}[\mu, M] \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{FA}[\mu, L, M] = \mathcal{RN}[\mu, L] \end{cases}$
Construction	$\mathcal{H}[\mu] \hat{\star} \mathcal{RN}[1, L] \hat{\star} \mathcal{RN}\mathcal{I}[1, M]$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+\frac{s-1}{2})}{L^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+\frac{1-s}{2})}{M^{\frac{1-s}{2}} \Gamma(M)}$
Moments	$\begin{cases} m_1 = \mu \frac{\Gamma(L+\frac{1}{2})}{\sqrt{L} \Gamma(L)} \frac{\sqrt{M} \Gamma(M-\frac{1}{2})}{\Gamma(M)} & M > \frac{1}{2} \\ m_2 = \mu^2 \frac{M}{M-1} & M > 1 \\ m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L+\frac{r}{2})}{L^{\frac{r}{2}} \Gamma(L)} \frac{M^{\frac{r}{2}} \Gamma(M-\frac{r}{2})}{\Gamma(M)} & -2L < r < 2M \end{cases}$
Ecart type	$\mu \sqrt{\frac{M}{M-1}} \sqrt{1 - \frac{(\Gamma(L+\frac{1}{2}))^2 (\Gamma(M-\frac{1}{2}))^2}{\Gamma(L)\Gamma(L+1) \Gamma(M)\Gamma(M-1)}} \quad M > 1$
Coefficient de variation	$\sqrt{\frac{\Gamma(L)\Gamma(L+1) \Gamma(M)\Gamma(M-1)}{(\Gamma(L+\frac{1}{2}))^2 (\Gamma(M-\frac{1}{2}))^2}} - 1 \quad M > 1$
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \log(\mu) + \frac{1}{2}(\Psi(L) - \log(L)) - \frac{1}{2}(\Psi(M) - \log(M)) \\ \tilde{\kappa}_2 = \frac{1}{4}(\Psi(1, L) + \Psi(1, M)) \\ \tilde{\kappa}_r = \left(\frac{1}{2}\right)^r (\Psi(1, L) + (-1)^r \Psi(1, M)) \end{cases}$
Mode	$\sqrt{\frac{(2L-1)M}{L(2M+1)}} \mu \quad L > \frac{1}{2}$
Formulation Meijer	$\frac{2}{\mu} \sqrt{\frac{L}{M}} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \bar{G}_{1,1}^{1,1} \left(\left(\sqrt{\frac{L}{M}} \frac{x}{\mu} \right)^2 \middle \begin{array}{l} -M + \frac{1}{2} \quad ; \quad \cdot \\ L - \frac{1}{2} \quad ; \quad \cdot \end{array} \right)$
Fonction de répartition	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \bar{G}_{2,2}^{1,2} \left(\left(\sqrt{\frac{L}{M}} \frac{x}{\mu} \right)^2 \middle \begin{array}{l} 1, -M + 1 \quad ; \quad \cdot \\ L \quad ; \quad 0 \end{array} \right)$

6.3.4 Loi Beta en amplitude

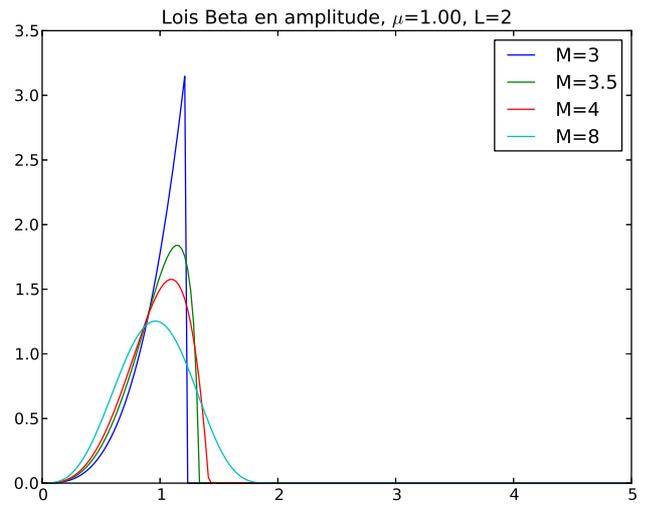
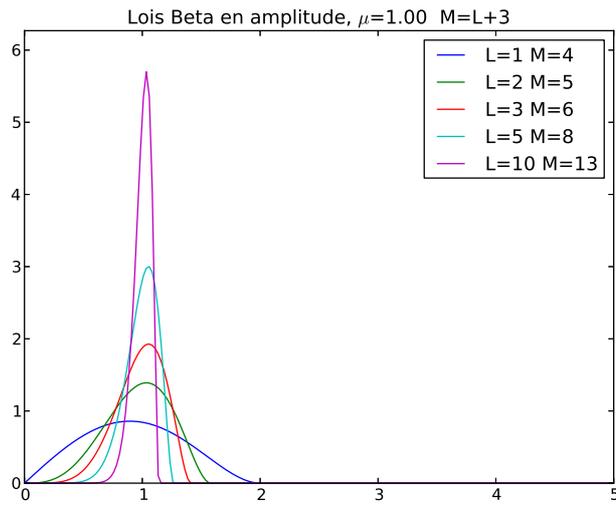


FIGURE 6.17 – Loi \mathcal{BA}

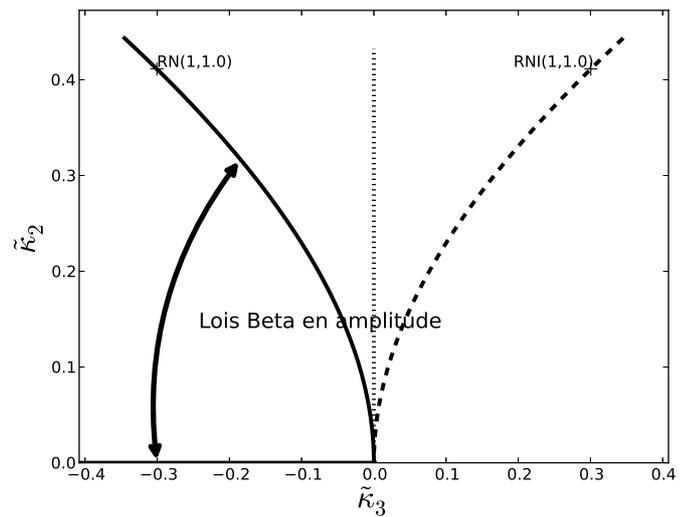
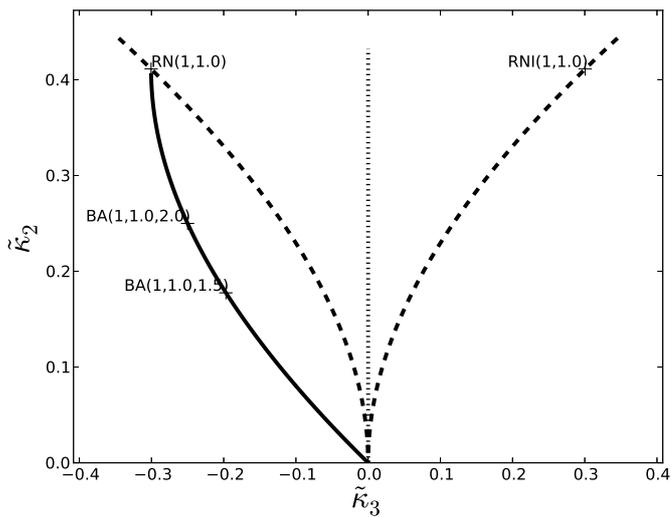


FIGURE 6.18 – Loi \mathcal{BA}

Loi Beta en amplitude $\mathcal{BA}[\mu, L, M]$	
$\mathcal{BA}[\mu, L, M](x)$	$\frac{2}{\mu} \sqrt{\frac{L}{M}} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \left(\frac{\sqrt{Lx}}{\sqrt{M\mu}}\right)^{2L-1} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{Lx}}{\sqrt{M\mu}}\right)^2\right)^{M-L-1} \quad x \in \left[0; \frac{\sqrt{M\mu}}{\sqrt{L}}\right]$ $L < M$
Loi inverse	$\mathcal{BAI}[\mu, L, M]$
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{BA}[\mu, L, M] & = \mathcal{RN}[\mu, L] \\ \lim_{M \rightarrow L^+} \mathcal{BA}[\mu, L, M] & = \mathcal{H}[\mu] \end{cases}$
Construction	$\mathcal{BA}[\mu, L, M] \hat{\star} \mathcal{RN}[\mu = 1, M] = \mathcal{RN}[\mu, L]$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L + \frac{s-1}{2})}{L^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(L)} \frac{M^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(M)}{\Gamma(M + \frac{s-1}{2})}$
Moments	$\begin{cases} m_1 & = \mu \frac{\Gamma(L + \frac{1}{2})}{\sqrt{L} \Gamma(L)} \frac{\sqrt{M} \Gamma(M)}{\Gamma(M + \frac{1}{2})} \\ m_2 & = \mu^2 \\ m_r & = \mu^r \frac{\Gamma(L + \frac{r}{2})}{L^{\frac{r}{2}} \Gamma(L)} \frac{M^{\frac{r}{2}} \Gamma(M)}{\Gamma(M + \frac{r}{2})} \quad r > -2 \min(L, M) \end{cases}$
Ecart type	$\mu \sqrt{1 - \frac{(\Gamma(L + \frac{1}{2}))^2 \Gamma(M) \Gamma(M+1)}{\Gamma(L) \Gamma(L+1) (\Gamma(M + \frac{1}{2}))^2}}$
Coefficient de variation	$\sqrt{\frac{\Gamma(L) \Gamma(L+1) (\Gamma(M + \frac{1}{2}))^2}{(\Gamma(L + \frac{1}{2}))^2 \Gamma(M) \Gamma(M+1)} - 1}$
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 & = \log \mu + \frac{1}{2} (\Psi(L) - \log L) - \frac{1}{2} (\Psi(M) - \log M) \\ \tilde{\kappa}_2 & = \frac{1}{4} (\Psi(1, L) - \Psi(1, M)) \\ \tilde{\kappa}_r & = \left(\frac{1}{2}\right)^r (\Psi(r-1, L) - \Psi(r-1, M)) \end{cases}$
Mode	$\begin{cases} \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{L}} \sqrt{\frac{2L-1}{2M-3}} \mu & L > \frac{1}{2}, M > \frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{L}} \mu & L > \frac{1}{2}, M \leq \frac{3}{2} \\ 0 & L < \frac{1}{2}, M > \frac{3}{2} \\ \text{bimode} & L < \frac{1}{2}, M \leq \frac{3}{2} \end{cases} \in \left]0; \frac{\sqrt{M\mu}}{\sqrt{L}}\right[$
Formulation Meijer	$\frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{M}} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)} \bar{G}_{1,1}^{1,0} \left(\left(\frac{\sqrt{Lx}}{\sqrt{M\mu}}\right)^2 \middle \begin{matrix} \cdot & ; & M - \frac{1}{2} \\ L - \frac{1}{2} & ; & \cdot \end{matrix} \right)$
Fonction de répartition	$\frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)} \bar{G}_{2,2}^{1,1} \left(\left(\frac{\sqrt{Lx}}{\sqrt{M\mu}}\right)^2 \middle \begin{matrix} 1 & ; & M \\ L & ; & 0 \end{matrix} \right)$

6.3.5 Loi Beta en amplitude Inverse $\mathcal{BAI}[\mu, L, M]$

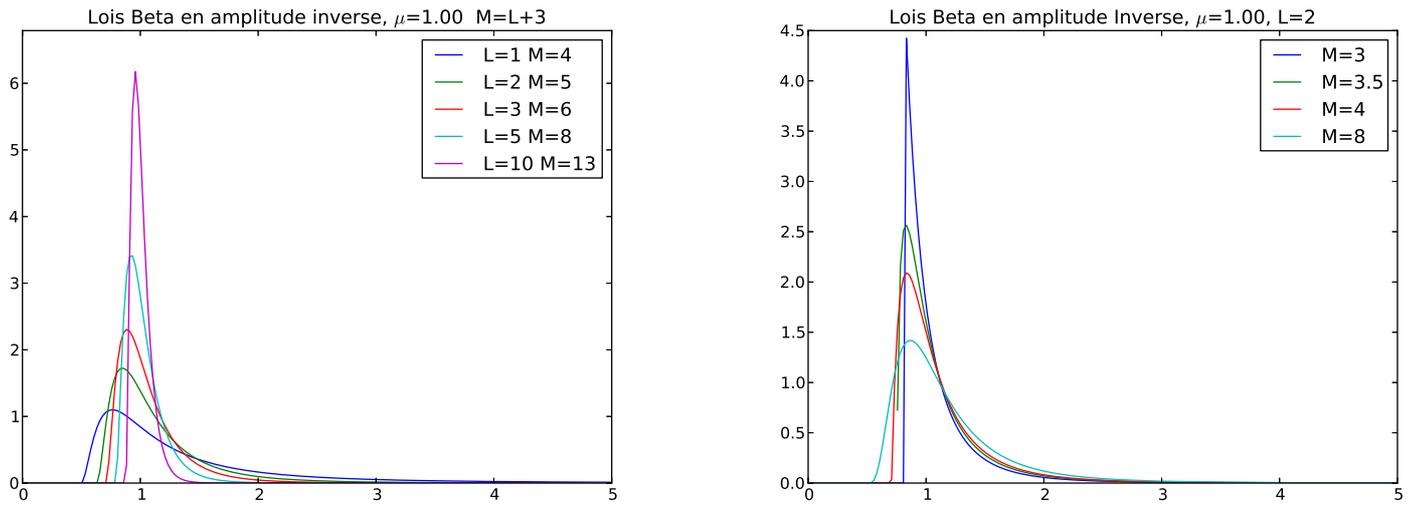


FIGURE 6.19 – Loi \mathcal{BAI}

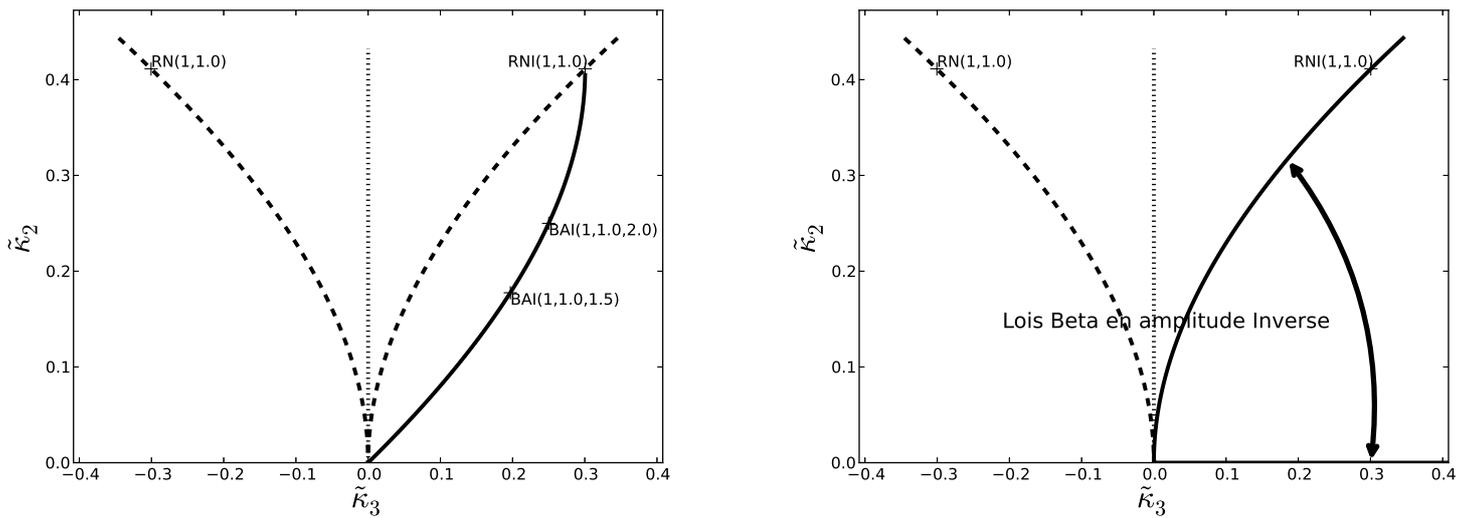


FIGURE 6.20 – Loi \mathcal{BAI}

Loi Beta en amplitude Inverse $\mathcal{BAI}[\mu, L, M]$	
$\mathcal{BAI}[\mu, L, M](x)$	$\frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{L}} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \frac{\left(\left(\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{L}\mu}x\right)^2 - 1\right)^{M-L-1}}{\left(\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{L}\mu}x\right)^{2M-1}} \quad x \in \left[\frac{\sqrt{L}\mu}{\sqrt{M}}; \infty\right[$ $L < M$
Loi inverse	$\mathcal{BA}[\mu, L, M]$
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{BAI}[\mu, L, M] &= \mathcal{RN}\mathcal{I}[\mu, L] \\ \lim_{M \rightarrow L^+} \mathcal{BAI}[\mu, L, M] &= \mathcal{H}[\mu] \end{cases}$
Construction	$\mathcal{BAI}[\mu, L, M, \eta] \hat{\star} \mathcal{RN}\mathcal{I}[\mu = 1, M] = \mathcal{RN}\mathcal{I}[\mu, L]$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L + \frac{1-s}{2})}{L^{\frac{1-s}{2}} \Gamma(L)} \frac{M^{\frac{1-s}{2}} \Gamma(M)}{\Gamma(M + \frac{1-s}{2})}$
Moments	$\begin{cases} m_1 &= \mu \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{M}} \frac{\Gamma(L - \frac{1}{2})}{\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(M - \frac{1}{2})} & L > \frac{1}{2}, M > \frac{1}{2} \\ m_2 &= \mu^2 \frac{L}{M} \frac{M-1}{L-1} & L > 1, M > 1 \\ m_r &= \mu^r \frac{L^{\frac{r}{2}} \Gamma(L - \frac{r}{2})}{\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M)}{M^{\frac{r}{2}} \Gamma(M - \frac{r}{2})} & r < 2 \min(L, M) \end{cases}$
Ecart type	$\mu \sqrt{\frac{L}{M} \left(\frac{M-1}{L-1} - \left(\frac{\Gamma(L - \frac{1}{2})}{\Gamma(L)} \right)^2 \left(\frac{\Gamma(M)}{\Gamma(M - \frac{1}{2})} \right)^2 \right)} \quad M > 1, L > 1$
Coefficient de variation	$\sqrt{\frac{M-1}{L-1} \left(\frac{\Gamma(L)}{\Gamma(L - \frac{1}{2})} \right)^2 \left(\frac{\Gamma(M - \frac{1}{2})}{\Gamma(M)} \right)^2} - 1. \quad M > 1, L > 1$
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 &= \log \mu - \frac{1}{2} (\Psi(L) - \log L) + \frac{1}{2} (\Psi(M) - \log M) \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{1}{4} (\Psi(1, L) - \Psi(1, M)) \\ \tilde{\kappa}_r &= \left(-\frac{1}{2}\right)^r (\Psi(r-1, L) - \Psi(r-1, M)) \end{cases}$
Mode	$\begin{cases} \mu \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{M}} \sqrt{\frac{2M-1}{2L+1}} & \text{si } M > L + 1 \\ \mu \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{M}} & \text{si } M \leq L + 1 \end{cases}$
Formulation Meijer	$\frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{L}} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)} \bar{G}_{1,1}^{0,1} \left(\left(\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{L}\mu} x \right)^2 \middle \begin{matrix} -L - \frac{1}{2} & ; & \cdot \\ \cdot & ; & M - \frac{1}{2} \end{matrix} \right)$
Fonction de répartition	$\frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)} \bar{G}_{2,2}^{0,2} \left(\left(\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{L}\mu} x \right)^2 \middle \begin{matrix} -L + 1, 1 & ; & \cdot \\ \cdot & ; & -M + 1, 0 \end{matrix} \right)$

6.3.6 Loi de Halphen modifiée en amplitude

A partir de l'expression de la loi de Halphen (relation 4.2), on peut directement exprimer la loi de Halphen en amplitude :

$$HA[\alpha, \beta, \varepsilon](x) = \frac{1}{\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{2}} K_{\alpha}(2\sqrt{\beta\varepsilon})} x^{2\alpha+1} e^{-\beta x^2 - \varepsilon x^{-2}} \quad (6.6)$$

dont la fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit :

$$\phi_{HA}(s) = \frac{1}{K_{\alpha}(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{s-1}{4}} K_{\alpha+\frac{s-1}{2}}(2\sqrt{\beta\varepsilon}) \quad (6.7)$$

Notons que l'analyse des cas limites permet d'écrire ([37]) :

$$\lim_{\varepsilon=0} \mathcal{HMA}[\alpha, \beta, \varepsilon, L](x) = \mathcal{RN} \left[\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \alpha \right] \quad (6.8)$$

$$\lim_{\beta=0} \mathcal{HMA}[\alpha, \beta, \varepsilon, L](x) = \mathcal{RN}\mathcal{I} \left[\sqrt{\frac{\varepsilon}{-\alpha}}, -\alpha \right] \quad (6.9)$$

De même, connaissant la loi de Halphen en amplitude, on obtient la loi de Halphen modifiée en amplitude :

$$\mathcal{HMA}[\mu, \beta, \varepsilon](x) = \frac{1}{\mu \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{\beta-\varepsilon}{2}} K_{\beta-\varepsilon}(\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{x}{\mu}\right)^{2(\beta-\varepsilon)-1} e^{-\beta \frac{x^2}{\mu^2} - \varepsilon \frac{\mu^2}{x^2}} \quad (6.10)$$

ainsi que

$$\phi_{\mathcal{HMA}}(s) = \mu^{\frac{s-1}{2}} \frac{1}{K_{\beta-\varepsilon}(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{s-1}{4}} K_{\beta-\varepsilon+\frac{s-1}{2}}(2\sqrt{\beta\varepsilon}) \quad (6.11)$$

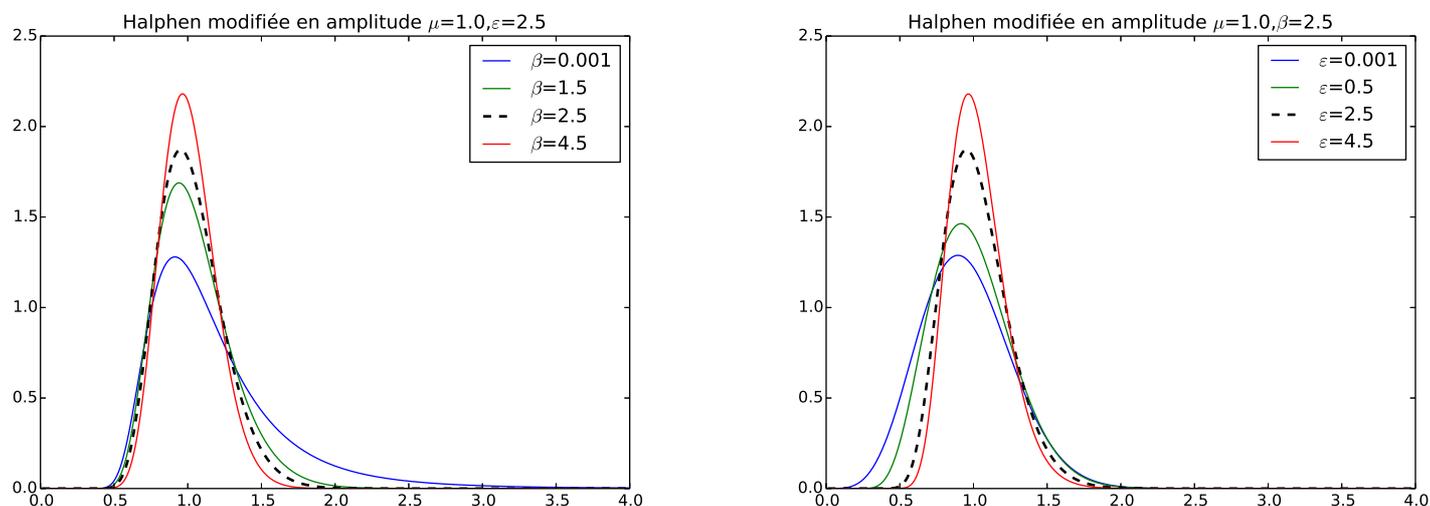


FIGURE 6.21 – Lois de Halphen modifiée en amplitude. A gauche : pour $\beta \rightarrow 0$, on retrouve une loi de Nakagami Inverse. A droite : pour $\varepsilon \rightarrow 0$, on retrouve une loi de Nakagami.

Loi Halphen modifiée en amplitude $\mathcal{HMA}[\mu, \beta, \varepsilon]$	
$\mathcal{HMA}[\mu, \beta, \varepsilon](x)$	$\frac{1}{\mu \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{\beta-\varepsilon}{2}} K_{\beta-\varepsilon}(\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{x}{\mu}\right)^{2(\beta-\varepsilon)-1} e^{-\beta\frac{x^2}{\mu^2} - \varepsilon\frac{\mu^2}{x^2}}$
Loi inverse	
Cas limite	
Construction	
Log-fonction caractéristique	$\mu^{\frac{s-1}{2}} \frac{1}{K_{\beta-\varepsilon}(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{s-1}{4}} K_{\beta-\varepsilon+\frac{s-1}{2}}(2\sqrt{\beta\varepsilon})$
Moments	$\begin{cases} m_1 = \\ m_2 = \\ m_r = \end{cases}$
Ecart type	
Coefficient de variation	
Log-Cumulants	pas de forme analytique connue
Mode	
Formulation Meijer	
Fonction de répartition	

6.4 Lois en amplitude à quatre paramètres

6.4.1 Loi “super K” en amplitude

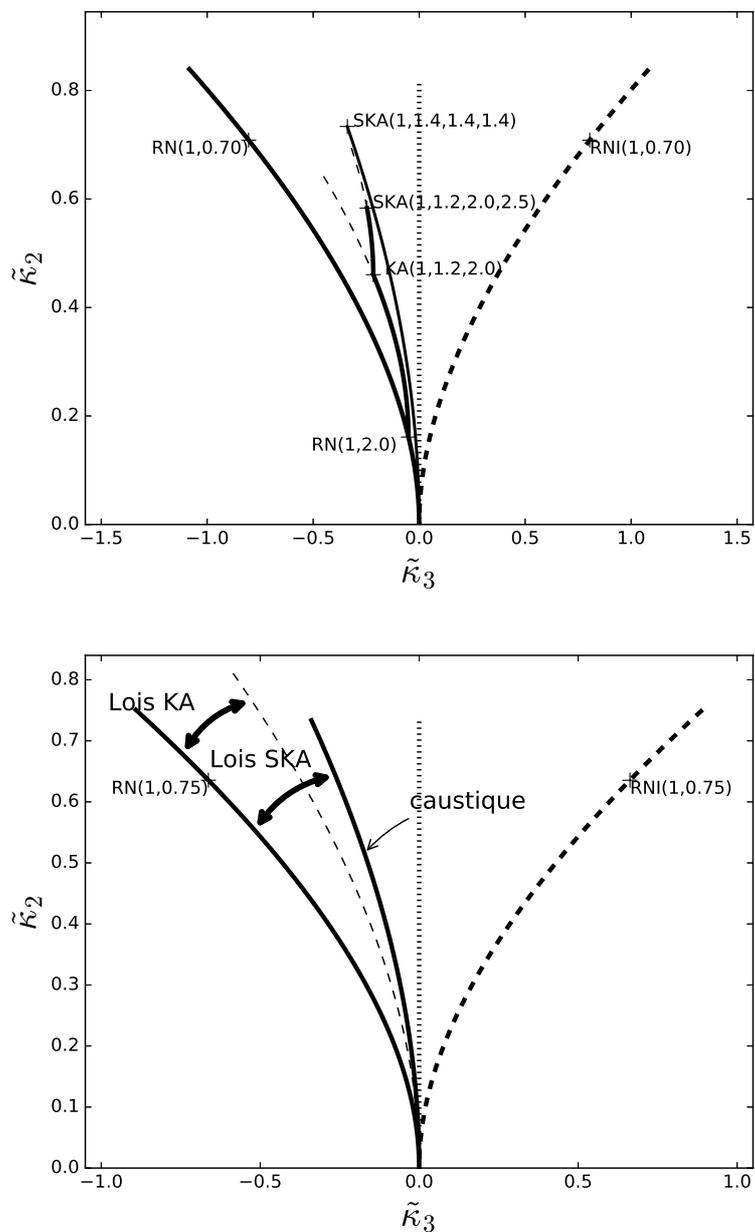


FIGURE 6.22 – Loi Q_{SKA} (loi Q_{SK} en amplitude)

Loi "Super K" en amplitude $\mathcal{Q}_{SKA}[\mu, L, M, N]$	
$\mathcal{Q}_{SKA}[\mu, L, M, N](x)$	$\frac{2\sqrt{LMN}}{\mu} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)\Gamma(N)} \bar{G}_{0,3}^{3,0} \left(\left(\frac{\sqrt{LMN}x}{\mu} \right)^2 \middle L-1, M-1, N-1 \ ; \ ; \right)$ $L > 0, M > 0, N > 0$
Loi inverse	$\mathcal{Q}_{SKAI}[\mu, L, M, N]$
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{SKA}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{KA}[\mu, M, N] \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{SKA}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{KA}[\mu, L, N] \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{SKA}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{KA}[\mu, L, M] \end{cases}$
Construction	$\mathcal{H}[\mu] \hat{\star} \mathcal{RN}[1, L] \hat{\star} \mathcal{RN}[1, M] \hat{\star} \mathcal{RN}[1, N]$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+\frac{s-1}{2})}{L^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+\frac{s-1}{2})}{M^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(M)} \frac{\Gamma(N+\frac{s-1}{2})}{N^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(N)}$
Moments	$\begin{cases} m_1 & = \mu \frac{\Gamma(L+\frac{1}{2})}{\sqrt{L} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+\frac{1}{2})}{\sqrt{M} \Gamma(M)} \frac{\Gamma(N+\frac{1}{2})}{\sqrt{N} \Gamma(N)} \\ m_2 & = \mu^2 \\ m_r & = \mu^r \frac{\Gamma(L+\frac{r}{2})}{L^{\frac{r}{2}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+\frac{r}{2})}{M^{\frac{r}{2}} \Gamma(M)} \frac{\Gamma(N+\frac{r}{2})}{N^{\frac{r}{2}} \Gamma(N)} \quad r > -2 \min(L, M, N) \end{cases}$
Ecart type	
Coefficient de variation	
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 & = \log \mu + \frac{1}{2} ((\Psi(L) - \log(L)) + (\Psi(M) - \log(M)) + (\Psi(N) - \log(N))) \\ \tilde{\kappa}_2 & = \frac{1}{4} (\Psi(1, L) + \Psi(1, M) + \Psi(1, N)) \\ \tilde{\kappa}_r & = \frac{1}{2^r} (\Psi(r-1, L) + \Psi(r-1, M) + \Psi(r-1, N)) \end{cases}$
Mode	
Formulation Meijer	$\frac{\sqrt{LMN}}{\mu} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)\Gamma(N)} \bar{G}_{0,3}^{3,0} \left(\left(\frac{\sqrt{LMN}x}{\mu} \right)^2 \middle L-\frac{1}{2}, M-\frac{1}{2}, N-\frac{1}{2} \ ; \ ; \right)$
Fonction de répartition	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)\Gamma(N)} \bar{G}_{1,4}^{3,1} \left(\left(\frac{\sqrt{LMN}x}{\mu} \right)^2 \middle \begin{matrix} 1 & ; \cdot \\ L, M, N & ; 0 \end{matrix} \right)$

6.4.2 Loi “super K” en amplitude inverse

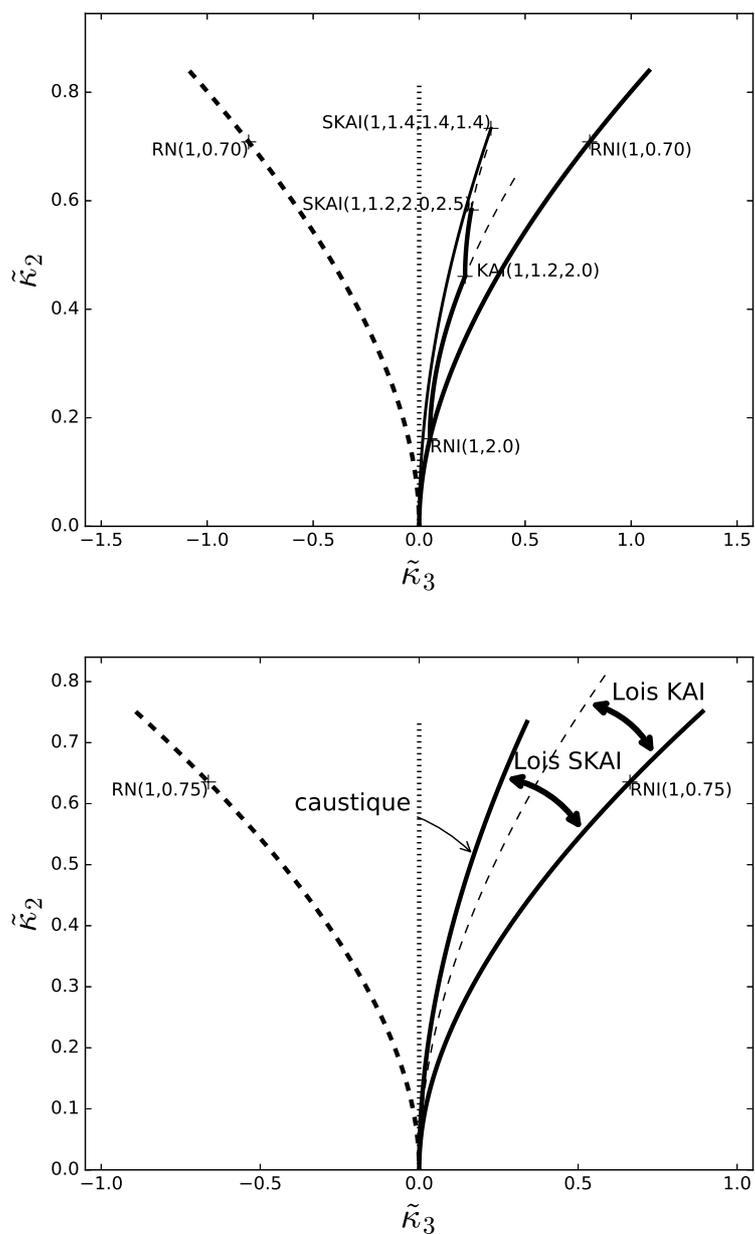


FIGURE 6.23 – Loi Q_{SKAI} (loi Q_{SK} en amplitude inverse)

Loi "Super K" en amplitude inverse $\mathcal{Q}_{SKAI}[\mu, L, M, N]$	
$\mathcal{Q}_{SKAI}[\mu, L, M, N](x)$	$\frac{2}{\sqrt{LMN}\mu} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)\Gamma(N)} \bar{G}_{3,0}^{0,3} \left(\left(\frac{x}{\sqrt{LMN}\mu} \right)^2 \middle \begin{matrix} -L + \frac{1}{2}, -M + \frac{1}{2}, -N + \frac{1}{2} & ; & \cdot \\ & & \cdot \\ & & \cdot \end{matrix} \right)$ $L > 0, M > 0, N > 0$
Loi inverse	$\mathcal{Q}_{SKA}[\mu, L, M, N]$
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{SKAI}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{KAI}[\mu, M, N] \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{SKAI}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{KAI}[\mu, L, N] \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{SKAI}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{KAI}[\mu, L, M] \end{cases}$
Construction	$\mathcal{H}[\mu] \hat{\star} \mathcal{RNI}[1, L] \hat{\star} \mathcal{RNI}[1, M] \hat{\star} \mathcal{RNI}[1, N]$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L + \frac{1-s}{2})}{L^{\frac{1-s}{2}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M + \frac{1-s}{2})}{M^{\frac{1-s}{2}} \Gamma(M)} \frac{\Gamma(N + \frac{1-s}{2})}{N^{\frac{1-s}{2}} \Gamma(N)}$
Moments	$\begin{cases} m_1 & = \mu \frac{\sqrt{L} \Gamma(L - \frac{1}{2})}{\Gamma(L)} \frac{\sqrt{M} \Gamma(M - \frac{1}{2})}{\Gamma(M)} \frac{\sqrt{N} \Gamma(N - \frac{1}{2})}{\Gamma(N)} \\ m_2 & = \mu^2 \frac{L}{L-1} \frac{M}{M-1} \frac{N}{N-1} \\ m_r & = \mu^r \frac{L^{\frac{r}{2}} \Gamma(L - \frac{r}{2})}{\Gamma(L)} \frac{M^{\frac{r}{2}} \Gamma(M - \frac{r}{2})}{\Gamma(M)} \frac{N^{\frac{r}{2}} \Gamma(N - \frac{r}{2})}{\Gamma(N)} \quad r < 2 \min(L, M, N) \end{cases}$
Ecart type	
Coefficient de variation	
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 & = \log \mu - \frac{1}{2} ((\Psi(L) - \log(L)) + (\Psi(M) - \log(M)) + (\Psi(N) - \log(N))) \\ \tilde{\kappa}_2 & = \frac{1}{4} (\Psi(1, L) + \Psi(1, M) + \Psi(1, N)) \\ \tilde{\kappa}_r & = \left(-\frac{1}{2}\right)^r (\Psi(r-1, L) + \Psi(r-1, M) + \Psi(r-1, N)) \end{cases}$
Mode	
Formulation Meijer	$\frac{2}{\sqrt{LMN}\mu} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)\Gamma(N)} \bar{G}_{3,0}^{0,3} \left(\left(\frac{x}{\sqrt{LMN}\mu} \right)^2 \middle \begin{matrix} -L + \frac{1}{2}, -M + \frac{1}{2}, -N + \frac{1}{2} & ; & \cdot \\ & & \cdot \\ & & \cdot \end{matrix} \right)$
Fonction de répartition	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)\Gamma(N)} \bar{G}_{4,1}^{0,4} \left(\left(\frac{x}{\sqrt{LMN}\mu} \right)^2 \middle \begin{matrix} -L + 1, -M + 1, -N + 1, 1 & ; & \cdot \\ & & \cdot \\ & & \cdot \end{matrix} \right)$

6.4.3 Loi U en amplitude

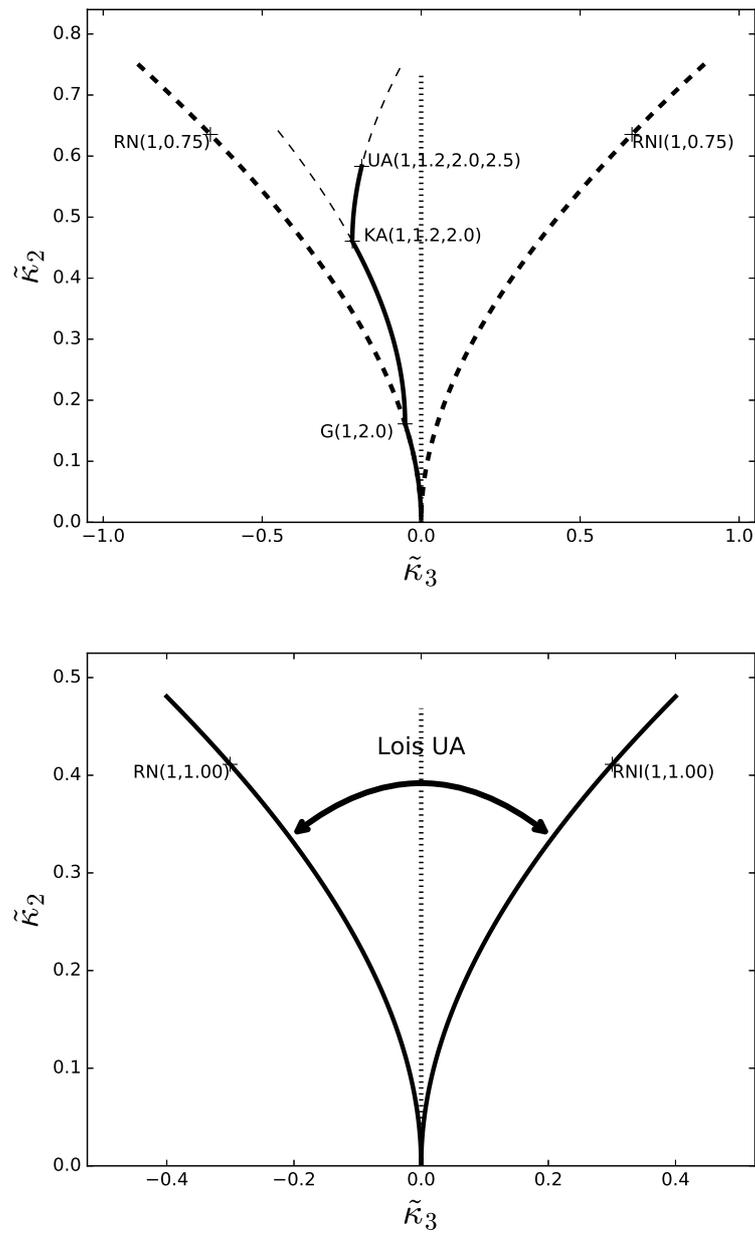


FIGURE 6.24 – Loi $Q_{U,A}$ (loi Q_U en amplitude)

Loi U en amplitude $Q_{UA}[\mu, L, M, N]$	
$Q_{UA}[\mu, L, M, N](x)$	$\frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{LM}}{\sqrt{N}} \frac{\Gamma(L+N) \Gamma(M+N)}{\Gamma(M) \Gamma(N) \Gamma(L)} \left(\frac{\sqrt{LMx}}{\sqrt{N}\mu} \right)^{L+M-2} e^{\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{LMx}}{\sqrt{N}\mu} \right)^2} W_{\frac{1-L-M-2N}{2}, \frac{L-M}{2}} \left(\left(\frac{\sqrt{LMx}}{\sqrt{N}\mu} \right)^2 \right)$ $L > 0, M > 0, N > 0$
Loi inverse	$Q_{UA\mathcal{I}}[\mu, L, M, N](x)$
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow \infty} Q_{UA}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{FA}[\mu, M, N] \\ \lim_{M \rightarrow \infty} Q_{UA}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{FA}[\mu, L, N] \\ \lim_{N \rightarrow \infty} Q_{UA}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{KA}[\mu, L, M] \end{cases}$
Construction	$\begin{cases} \mathcal{H}[\mu] \hat{\star} \mathcal{RN}[1, L] \hat{\star} \mathcal{RN}[1, M] \hat{\star} \mathcal{RN\mathcal{I}}[1, N] \\ \mathcal{KA}[\mu, L, M] \hat{\star} \mathcal{RN\mathcal{I}}[1, N] \\ \mathcal{FA}[\mu, M, N] \hat{\star} \mathcal{RN}[1, L] \\ \mathcal{FA}[\mu, L, N] \hat{\star} \mathcal{RN}[1, M] \end{cases}$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+\frac{s-1}{2})}{L^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+\frac{s-1}{2})}{M^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(M)} \frac{\Gamma(N+\frac{1-s}{2})}{N^{\frac{1-s}{2}} \Gamma(N)}$
Moments	$\begin{cases} m_1 & = \mu \frac{\Gamma(L+\frac{1}{2})}{\sqrt{L} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+\frac{1}{2})}{\sqrt{M} \Gamma(M)} \frac{\sqrt{N} \Gamma(N-\frac{1}{2})}{\Gamma(N)} & N > \frac{1}{2} \\ m_2 & = \mu^2 \frac{N}{N-1} & N > 1 \\ m_r & = \mu^r \frac{\Gamma(L+\frac{r}{2})}{L^{\frac{r}{2}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+\frac{r}{2})}{M^{\frac{r}{2}} \Gamma(M)} \frac{N^{\frac{r}{2}} \Gamma(N-\frac{r}{2})}{\Gamma(N)} & -2 \min(L, M) < r < 2N \end{cases}$
Ecart type	
Coefficient de variation	
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 & = \log \mu + \frac{1}{2} ((\Psi(L) - \log(L)) + (\Psi(M) - \log(M)) - (\Psi(N) - \log(N))) \\ \tilde{\kappa}_2 & = \frac{1}{4} (\Psi(1, L) + \Psi(1, M) + \Psi(1, N)) \\ \tilde{\kappa}_r & = \frac{1}{2^r} (\Psi(r-1, L) + \Psi(r-1, M) + (-1)^r \Psi(r-1, N)) \end{cases}$
Mode	
Formulation Meijer	$\frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{LM}}{\sqrt{N}} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)\Gamma(N)} \bar{G}_{1,2}^{2,1} \left(\left(\frac{\sqrt{LMx}}{\sqrt{N}\mu} \right)^2 \middle \begin{matrix} N - \frac{1}{2} & ; & \cdot \\ L - \frac{1}{2}, M - \frac{1}{2} & ; & \cdot \end{matrix} \right)$
Fonction de répartition	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)\Gamma(N)} \bar{G}_{2,3}^{2,2} \left(\left(\frac{\sqrt{Nx}}{\sqrt{LM}\mu} \right)^2 \middle \begin{matrix} 1, -N+1 & ; & \cdot \\ L, M & ; & 0 \end{matrix} \right)$

W est la fonction de Whittaker

6.4.4 Loi U en amplitude inverse

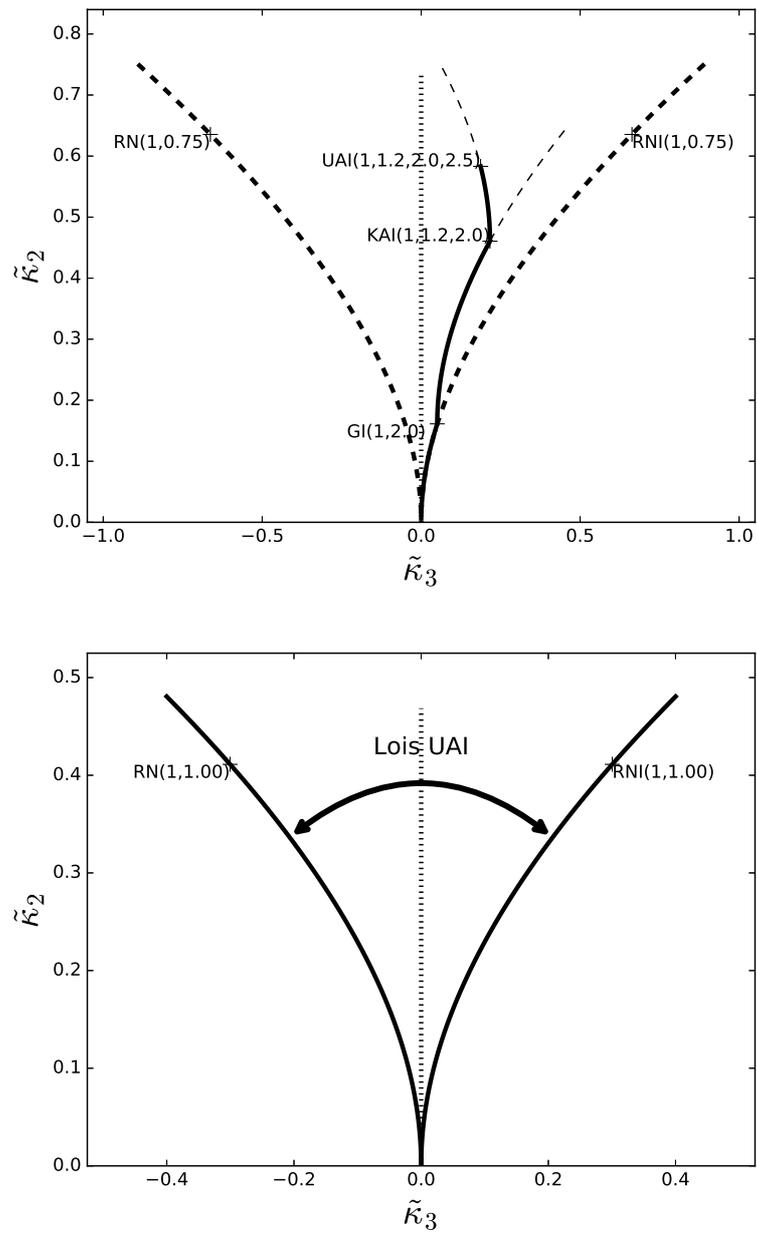


FIGURE 6.25 – Loi Q_{UAI} (loi Q_U en amplitude inverse)

Loi U en amplitude inverse $Q_{UAI}[\mu, L, M, N]$	
$Q_{UAI}[\mu, L, M, N](x)$	$\frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{LM}} \frac{\Gamma(L+N)\Gamma(M+N)}{\Gamma(M)\Gamma(N)\Gamma(L)} \left(\frac{\sqrt{LM}\mu}{\sqrt{Nx}}\right)^{L+M+1} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{LM}\mu}{\sqrt{Nx}}\right)^2} W_{\frac{1-L-M-2N}{2}, \frac{L-M}{2}} \left(\left(\frac{\sqrt{LM}\mu}{\sqrt{Nx}}\right)^2\right)$ $L > 0, M > 0, N > 0$
Loi inverse	$Q_{UA}[\mu, L, M, N](x)$
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow \infty} Q_{UAI}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{FA}[\mu, N, M] \\ \lim_{M \rightarrow \infty} Q_{UAI}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{FA}[\mu, N, L] \\ \lim_{N \rightarrow \infty} Q_{UAI}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{KAI}[\mu, L, M] \end{cases}$
Construction	$\begin{cases} \mathcal{H}[\mu] \hat{\star} \mathcal{RNI}[1, L] \hat{\star} \mathcal{RNI}[1, M] \hat{\star} \mathcal{RN}[1, N] \\ \mathcal{KAI}[\mu, L, M] \hat{\star} \mathcal{RN}[1, N] \\ \mathcal{FA}[\mu, N, M] \hat{\star} \mathcal{RNI}[1, L] \\ \mathcal{FA}[\mu, N, L] \hat{\star} \mathcal{RNI}[1, M] \end{cases}$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+\frac{1-s}{2})}{L^{\frac{1-s}{2}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+\frac{1-s}{2})}{M^{\frac{1-s}{2}} \Gamma(M)} \frac{\Gamma(N+\frac{s-1}{2})}{N^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(N)}$
Moments	$\begin{cases} m_1 & = \mu \frac{\sqrt{L}\Gamma(L-\frac{1}{2})}{\Gamma(L)} \frac{\sqrt{M}\Gamma(M-\frac{1}{2})}{\Gamma(M)} \frac{\Gamma(N+\frac{1}{2})}{\sqrt{N}\Gamma(N)} & \min(L, M) > \frac{1}{2} \\ m_2 & = \mu^2 \frac{L}{L-1} \frac{M}{M-1} & \min(L, M) > 1 \\ m_r & = \mu^r \frac{L^{\frac{r}{2}} \Gamma(L-\frac{r}{2})}{\Gamma(L)} \frac{M^{\frac{r}{2}} \Gamma(M-\frac{r}{2})}{\Gamma(M)} \frac{\Gamma(N+\frac{r}{2})}{N^{\frac{r}{2}} \Gamma(N)} & -2N < r < 2 \min(L, M) \end{cases}$
Ecart type	
Coefficient de variation	
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 & = \log \mu - \frac{1}{2}((\Psi(L) - \log(L)) + (\Psi(M) - \log(M)) - (\Psi(N) - \log(N))) \\ \tilde{\kappa}_2 & = \frac{1}{4}(\Psi(1, L) + \Psi(1, M) + \Psi(1, N)) \\ \tilde{\kappa}_r & = \left(-\frac{1}{2}\right)^r (\Psi(r-1, L) + \Psi(r-1, M) + (-1)^r \Psi(r-1, N)) \end{cases}$
Mode	
Formulation Meijer	$\frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{LM}}{\sqrt{N}} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)\Gamma(N)} \bar{G}_{2,1}^{1,2} \left(\left(\frac{\sqrt{LM}x}{\sqrt{N}\mu}\right)^2 \middle \begin{matrix} -L + \frac{1}{2}, -M + \frac{1}{2} & ; & \cdot \\ N - \frac{1}{2} & ; & \cdot \end{matrix} \right)$
Fonction de répartition	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)\Gamma(N)} \bar{G}_{3,2}^{1,3} \left(\left(\frac{\sqrt{LM}x}{\sqrt{N}\mu}\right)^2 \middle \begin{matrix} 1, -L + 1, -M + 1 & ; & \cdot \\ N & ; & 0 \end{matrix} \right)$

W est la fonction de Whittaker

6.4.5 Loi W en amplitude

Appliquée à la fonction de répartition, la condition B.43 impose :

$$L < N \text{ et } M < N \tag{6.12}$$

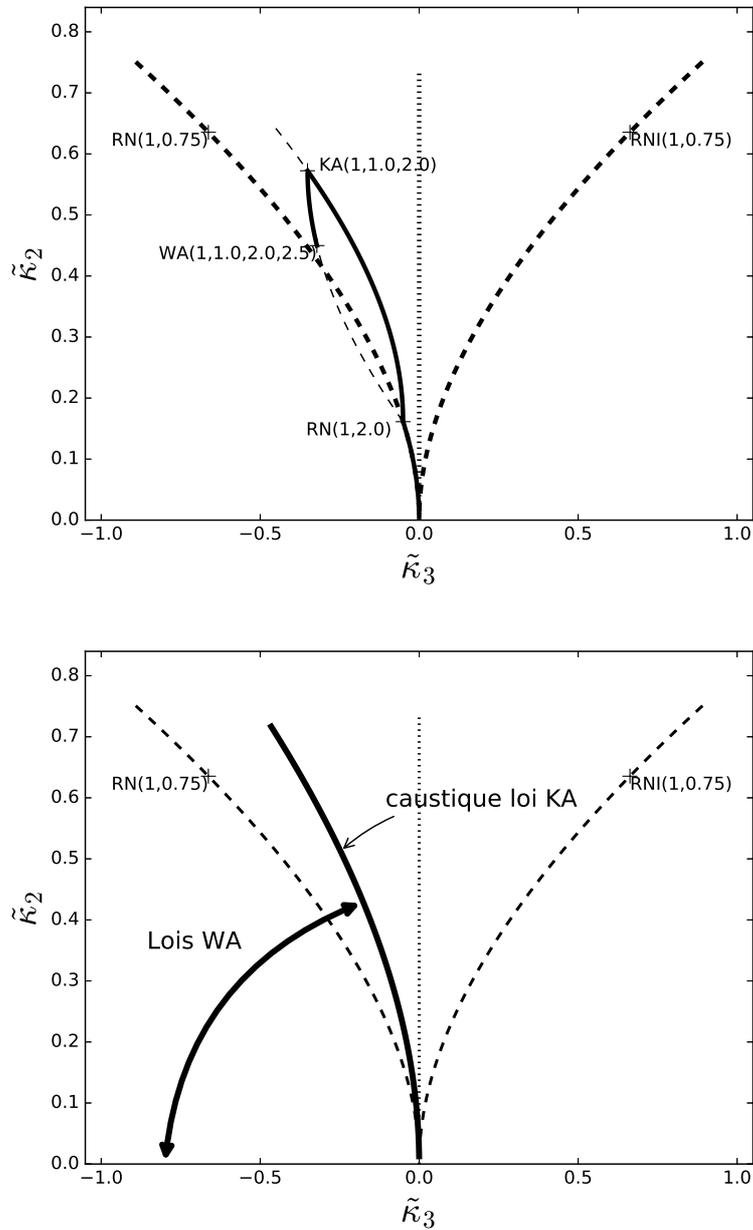


FIGURE 6.26 – Loi \mathcal{Q}_{WA} (loi \mathcal{Q}_W en amplitude)

Loi W en amplitude $\mathcal{Q}_{WA}[\mu, L, M, N]$	
$\mathcal{Q}_{WA}[\mu, L, M, N](x)$	$\frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{LM}}{\sqrt{N}} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \left(\sqrt{\frac{LMx}{N\mu}} \right)^{L+M-2} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{LMx}}{\sqrt{N\mu}} \right)^2} W_{\frac{1+L+M-2N}{2}, \frac{L-M}{2}} \left(\left(\frac{\sqrt{LMx}}{\sqrt{N\mu}} \right)^2 \right)$ $L > 0, M > 0, N > \min(L, M)$
Loi inverse	$\mathcal{Q}_{WAI}[\mu, L, M, N]$
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{WA}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{BA}[\mu, M, N] \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{WA}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{BA}[\mu, L, N] \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{WA}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{KA}[\mu, L, M] \\ \lim_{N \rightarrow L^+} \mathcal{Q}_{WA}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{RN}[\mu, M] \\ \lim_{N \rightarrow M^+} \mathcal{Q}_{WA}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{RN}[\mu, L] \end{cases}$
Construction	$\begin{cases} \mathcal{BA}[\mu, L, N] & \hat{\star} \mathcal{RN}[\mu = 1, M] \\ \mathcal{BA}[\mu, M, N] & \hat{\star} \mathcal{RN}[\mu = 1, L] \end{cases}$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L + \frac{s-1}{2})}{L^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M + \frac{s-1}{2})}{M^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(M)} \frac{N^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(N)}{\Gamma(N + \frac{s-1}{2})}$
Moments	$\begin{cases} m_1 & = \mu \frac{\Gamma(L + \frac{1}{2})}{\sqrt{L} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M + \frac{1}{2})}{\sqrt{M} \Gamma(M)} \frac{\sqrt{N} \Gamma(N)}{\Gamma(N + \frac{1}{2})} \\ m_2 & = \mu^2 \\ m_r & = \mu^r \frac{\Gamma(L + \frac{r}{2})}{L^{\frac{r}{2}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M + \frac{r}{2})}{M^{\frac{r}{2}} \Gamma(M)} \frac{N^{\frac{r}{2}} \Gamma(N)}{\Gamma(N + \frac{r}{2})} \quad r > -2 \min(L, M) \end{cases}$
Ecart type	
Coefficient de variation	
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 & = \log \mu + \frac{1}{2} ((\Psi(L) - \log L) + (\Psi(M) - \log M) - (\Psi(N) - \log N)) \\ \tilde{\kappa}_2 & = \frac{1}{4} (\Psi(1, L) + \Psi(1, M) - \Psi(1, N)) \\ \tilde{\kappa}_r & = \frac{1}{2^r} (\Psi(r-1, L) + \Psi(r-1, M) - \Psi(r-1, N)) \end{cases}$
Mode	
Formulation Meijer	$\frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{LM}}{\sqrt{N}} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(M)\Gamma(L)} \bar{G}_{1,2}^{2,0} \left(\left(\frac{\sqrt{LMx}}{\sqrt{N\mu}} \right)^2 \middle \begin{matrix} L - \frac{1}{2}, M - \frac{1}{2} \\ N - \frac{1}{2} \end{matrix} \right)$
Fonction de répartition	$\frac{\Gamma(N)}{\Gamma(M)\Gamma(L)} \bar{G}_{2,3}^{2,1} \left(\left(\frac{\sqrt{LMx}}{\sqrt{N\mu}} \right)^2 \middle \begin{matrix} 1 & ; & N \\ L, M & ; & 0 \end{matrix} \right)$

W est la fonction de Whittaker

6.4.6 Loi W en amplitude inverse

Appliquée à la fonction de répartition, la condition B.43 impose :

$$L < N \text{ et } M < N \tag{6.13}$$

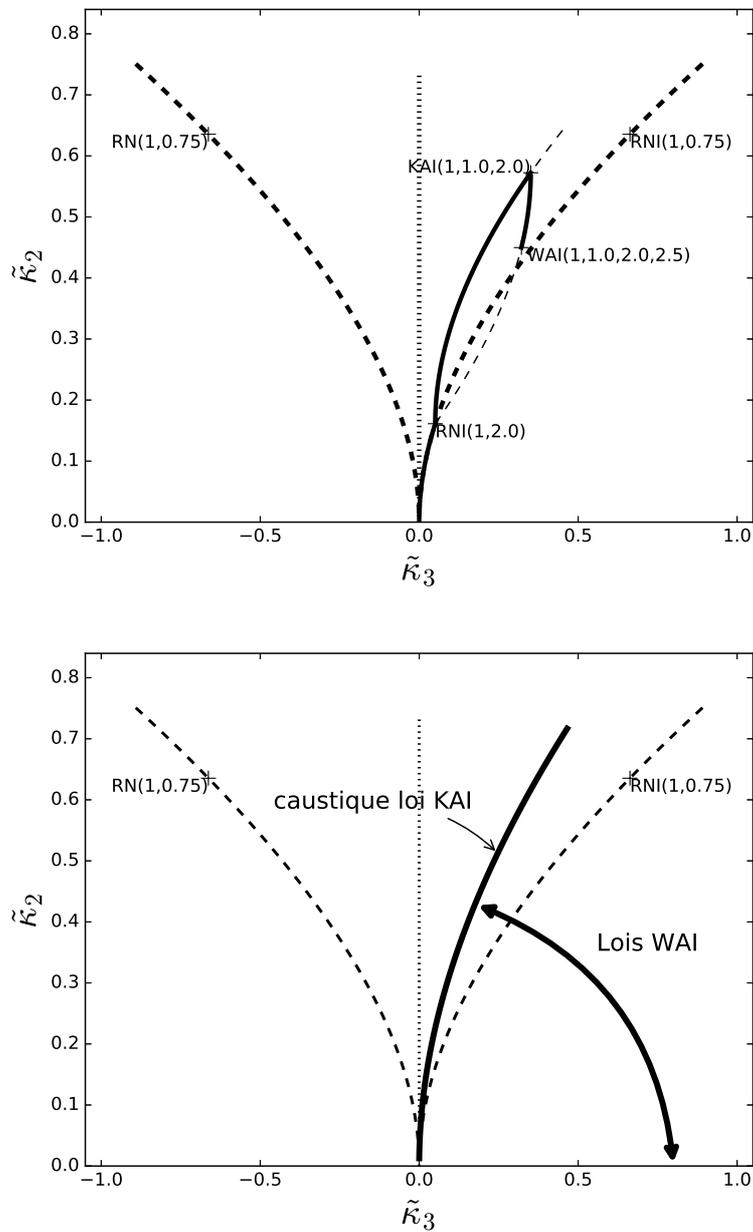


FIGURE 6.27 – Loi \mathcal{Q}_{WAI} (loi \mathcal{Q}_{WI} en amplitude)

Loi W en amplitude inverse $\mathcal{Q}_{\mathcal{WAI}}[\mu, L, M, N]$	
$\mathcal{Q}_{\mathcal{WAI}}[\mu, L, M, N](x)$	$\frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{LM}} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \left(\sqrt{\frac{LM}{N}} \frac{\mu}{x} \right)^{L+M+1} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{LM}\mu}{\sqrt{N}x} \right)^2} W_{\frac{1+L+M-2N}{2}, \frac{L-M}{2}} \left(\left(\frac{\sqrt{LM}\mu}{\sqrt{N}x} \right)^2 \right)$ $L > 0, M > 0, N > \min(L, M)$
Loi inverse	$\mathcal{Q}_{\mathcal{WA}}[\mu, L, M, N]$
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{\mathcal{WAI}}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{BAI}[\mu, M, N] \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{\mathcal{WAI}}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{BAI}[\mu, L, N] \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{\mathcal{WAI}}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{KAI}[\mu, L, M] \\ \lim_{N \rightarrow L^+} \mathcal{Q}_{\mathcal{WAI}}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{RNI}[\mu, M] \\ \lim_{N \rightarrow M^+} \mathcal{Q}_{\mathcal{WAI}}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{RNI}[\mu, L] \end{cases}$
Construction	$\begin{cases} \mathcal{BAI}[\mu, L, N] & \hat{\star} \mathcal{RNI}[\mu = 1, M] \\ \mathcal{BAI}[\mu, M, N] & \hat{\star} \mathcal{RNI}[\mu = 1, L] \end{cases}$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+\frac{1-s}{2})}{L^{\frac{1-s}{2}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+\frac{1-s}{2})}{M^{\frac{1-s}{2}} \Gamma(M)} \frac{N^{\frac{1-s}{2}} \Gamma(N)}{\Gamma(N+\frac{1-s}{2})}$
Moments	$\begin{cases} m_1 & = \mu \frac{\sqrt{L} \Gamma(L-\frac{1}{2})}{\Gamma(L)} \frac{\sqrt{M} \Gamma(M-\frac{1}{2})}{\Gamma(M)} \frac{\Gamma(N)}{\sqrt{N} \Gamma(N-\frac{1}{2})} & L > \frac{1}{2}, M > \frac{1}{2} \\ m_2 & = \mu^2 \frac{L}{L-1} \frac{M}{M-1} \frac{N-1}{N} & L > 1, M > 1 \\ m_r & = \mu^r \frac{L^{\frac{r}{2}} \Gamma(L-\frac{r}{2})}{\Gamma(L)} \frac{M^{\frac{r}{2}} \Gamma(M-\frac{r}{2})}{\Gamma(M)} \frac{\Gamma(N)}{N^{\frac{r}{2}} \Gamma(N-\frac{r}{2})} & r < 2 \min(L, M) \end{cases}$
Ecart type	
Coefficient de variation	
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 & = \log \mu - \frac{1}{2} ((\Psi(L) - \log L) + (\Psi(M) - \log M) - (\Psi(N) - \log N)) \\ \tilde{\kappa}_2 & = \frac{1}{4} (\Psi(1, L) + \Psi(1, M) - \Psi(1, N)) \\ \tilde{\kappa}_r & = \left(\frac{1}{2} \right)^r (\Psi(r-1, L) + \Psi(r-1, M) - \Psi(r-1, N)) \end{cases}$
Mode	
Formulation Meijer	$\frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{LM}} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(M)\Gamma(L)} \bar{G}_{2,1}^{0,2} \left(\left(\frac{\sqrt{N}x}{\sqrt{LM}\mu} \right)^2 \middle \begin{matrix} L - \frac{1}{2}, M - \frac{1}{2} & ; & \cdot \\ \cdot & ; & N - \frac{1}{2} \end{matrix} \right)$
Fonction de répartition	$\frac{\Gamma(N)}{\Gamma(M)\Gamma(L)} \bar{G}_{3,2}^{0,3} \left(\left(\frac{\sqrt{N}x}{\sqrt{LM}\mu} \right)^2 \middle \begin{matrix} 1, -L+1, -M+1 & ; & \cdot \\ \cdot & ; & 0, -N+1 \end{matrix} \right)$

W est la fonction de Whittaker

6.4.7 Loi Y en amplitude

Appliquée à la fonction de répartition, la condition B.43 impose :

$$L < N \tag{6.14}$$

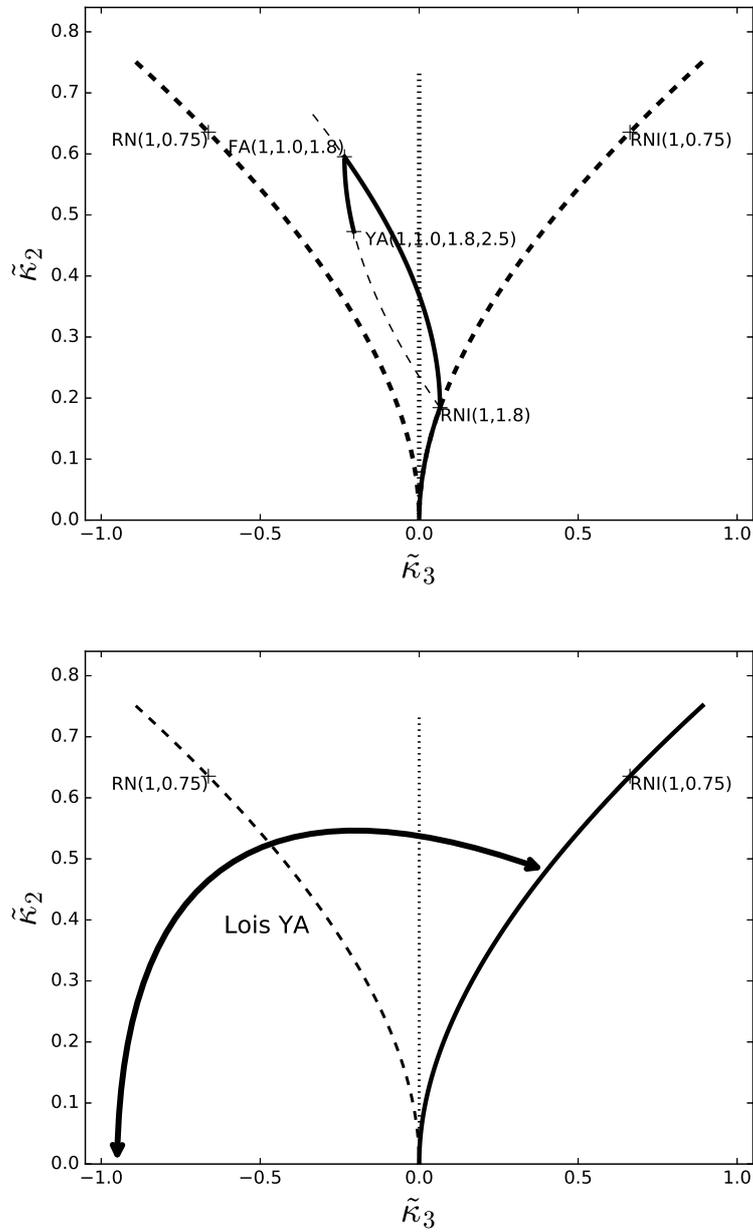


FIGURE 6.28 – Loi Q_{yA} (loi Q_y en amplitude)

Loi Y en amplitude $\mathcal{Q}_{\mathcal{Y}\mathcal{A}}[\mu, L, M, N]$	
$\mathcal{Q}_{\mathcal{Y}\mathcal{A}}[\mu, L, M, N](x)$	$\frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{MN}} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(M)\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+L)}{\Gamma(M+N)} \left(\frac{\sqrt{Lx}}{\sqrt{MN}\mu} \right)^{-2M-1} {}_1F_1 \left(M+L; M+N; - \left(\frac{\sqrt{MN}\mu}{\sqrt{Lx}} \right)^2 \right)$ $L > 0, M > 0, N > \max(L, M)$
Loi inverse	$\mathcal{Q}_{\mathcal{Y}\mathcal{A}\mathcal{I}}[\mu, L, M, N](x)$
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{\mathcal{Y}\mathcal{A}}[\mu, L, M, N] & = \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{\mathcal{Y}\mathcal{A}}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{B}\mathcal{A}[\mu, L, N] \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{\mathcal{Y}\mathcal{A}}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{F}\mathcal{A}[\mu, L, M] \\ \lim_{N \rightarrow L^+} \mathcal{Q}_{\mathcal{Y}\mathcal{A}}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{R}\mathcal{N}\mathcal{I}[\mu, M] \\ \lim_{N \rightarrow M^+} \mathcal{Q}_{\mathcal{Y}\mathcal{A}}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{R}\mathcal{N}[\mu, L] \end{cases}$
Construction	$\mathcal{B}\mathcal{A}[\mu, L, N] \hat{\star} \mathcal{R}\mathcal{N}\mathcal{I}[\mu = 1, M]$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+\frac{s-1}{2})}{L^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+\frac{1-s}{2})}{M^{\frac{1-s}{2}} \Gamma(M)} \frac{N^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(N)}{\Gamma(N+\frac{s-1}{2})}$
Moments	$\begin{cases} m_1 & = \mu \frac{\Gamma(L+\frac{1}{2})}{\sqrt{L} \Gamma(L)} \frac{\sqrt{M} \Gamma(M-\frac{1}{2})}{\Gamma(M)} \frac{\sqrt{N} \Gamma(N)}{\Gamma(N+\frac{1}{2})} & M > \frac{1}{2} \\ m_2 & = \mu^2 \frac{M}{M-1} & M > 1 \\ m_r & = \mu^r \frac{\Gamma(L+\frac{r}{2})}{L^{\frac{r}{2}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M-\frac{r}{2})}{M^{-\frac{r}{2}} \Gamma(M)} \frac{N^{\frac{r}{2}} \Gamma(N)}{\Gamma(N+\frac{r}{2})} & -2L < r < 2M \end{cases}$
Ecart type	
Coefficient de variation	
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 & = \log \mu + \frac{1}{2} ((\Psi(L) - \log L) - (\Psi(M) - \log M) - (\Psi(N) - \log N)) \\ \tilde{\kappa}_2 & = \frac{1}{4} (\Psi(1, L) + \Psi(1, M) - \Psi(1, N)) \\ \tilde{\kappa}_r & = \frac{1}{2^r} (\Psi(r-1, L) + (-1)^r \Psi(r-1, M) - \Psi(r-1, N)) \end{cases}$
Mode	
Formulation Meijer	$\frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{MN}} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(M)\Gamma(L)} \bar{G}_{2,1}^{1,1} \left(\left(\frac{\sqrt{Lx}}{\sqrt{MN}\mu} \right)^2 \middle \begin{matrix} -M + \frac{1}{2} & ; & N - \frac{1}{2} \\ L - \frac{1}{2} & ; & . \end{matrix} \right)$
Fonction de répartition	$\frac{\Gamma(N)}{\Gamma(M)\Gamma(L)} \bar{G}_{3,2}^{1,2} \left(\left(\frac{\sqrt{Lx}}{\sqrt{MN}\mu} \right)^2 \middle \begin{matrix} 1, -M + 1 & ; & N \\ L & ; & 0 \end{matrix} \right)$

${}_1F_1$ est la fonction hypergéométrique confluyente

6.4.8 Loi Y en amplitude inverse

Appliquée à la fonction de répartition, la condition B.43 impose :

$$L < N \tag{6.15}$$

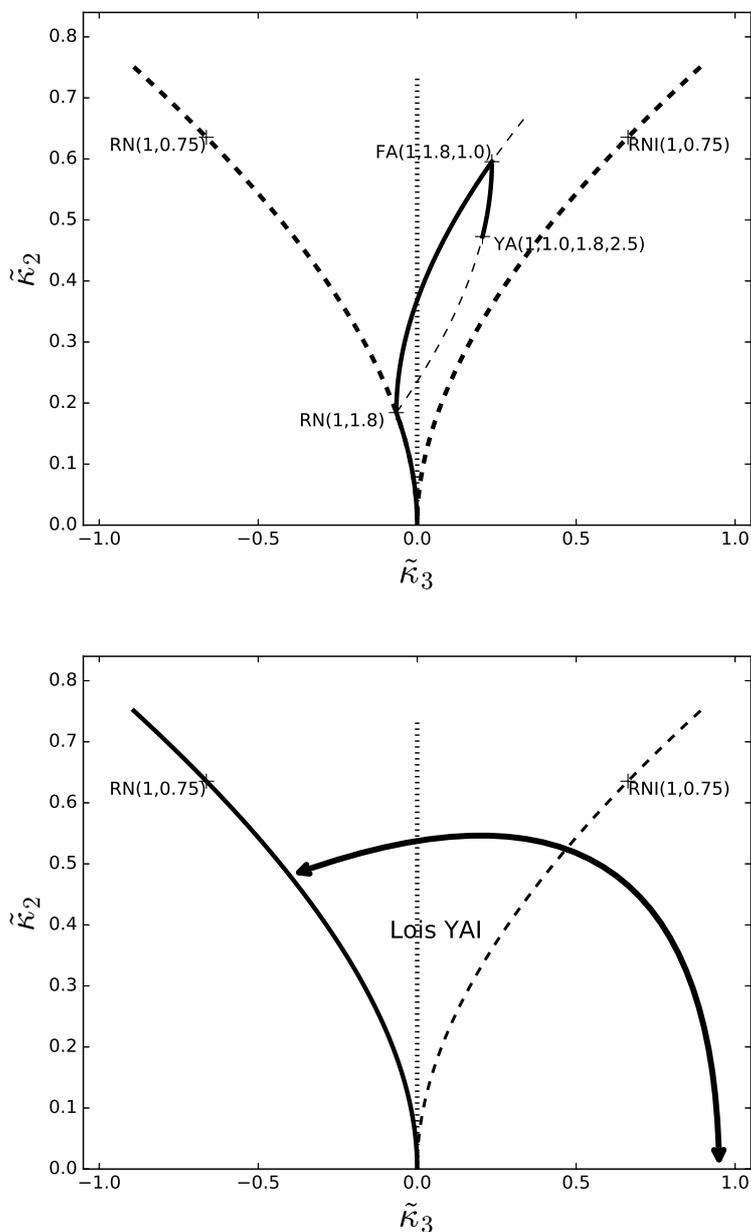


FIGURE 6.29 – Loi Q_{YAI} (loi Q_{YA} en amplitude inverse)

Loi Y en amplitude inverse $\mathcal{Q}_{YAZ}[\mu, L, M, N]$	
$\mathcal{Q}_{YAZ}[\mu, L, M, N](x)$	$\frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{MN}}{\sqrt{L}} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(M)\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+L)}{\Gamma(M+N)} \left(\frac{\sqrt{L}\mu}{\sqrt{MN}x} \right)^{-2M+2} {}_1F_1 \left(M+L; M+N; - \left(\frac{\sqrt{MN}x}{\sqrt{L}\mu} \right)^2 \right)$ $L > 0, M > 0, N > \max(L, M)$
Loi inverse	$\mathcal{Q}_{YA}[\mu, L, M, N](x)$
Cas limite	$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{YAZ}[\mu, L, M, N] & = \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{YAZ}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{BAI}[\mu, L, N] \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_{YAZ}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{FA}[\mu, M, L] \\ \lim_{N \rightarrow L^+} \mathcal{Q}_{YA}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{RN}[\mu, M] \\ \lim_{N \rightarrow M^+} \mathcal{Q}_{YA}[\mu, L, M, N] & = \mathcal{RNI}[\mu, L] \end{cases}$
Construction	$\mathcal{BAI}[\mu, L, N] \hat{\star} \mathcal{RN}[\mu = 1, M]$
Log-fonction caractéristique	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+\frac{1-s}{2})}{L^{\frac{1-s}{2}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+\frac{s-1}{2})}{M^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(M)} \frac{N^{\frac{1-s}{2}} \Gamma(N)}{\Gamma(N+\frac{1-s}{2})}$
Moments	$\begin{cases} m_1 & = \mu \frac{\sqrt{L} \Gamma(L-\frac{1}{2})}{\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+\frac{1}{2})}{\sqrt{M} \Gamma(M)} \frac{\Gamma(N)}{\sqrt{N} \Gamma(N-\frac{1}{2})} & L > \frac{1}{2} \\ m_2 & = \mu^2 \frac{L}{L-1} \frac{N}{N-1} & L > 1 \\ m_r & = \mu^r \frac{L^{\frac{r}{2}} \Gamma(L-\frac{r}{2})}{\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+\frac{r}{2})}{M^{\frac{r}{2}} \Gamma(M)} \frac{\Gamma(N)}{N^{\frac{r}{2}} \Gamma(N-\frac{r}{2})} & -2M < r < 2L \end{cases}$
Ecart type	
Coefficient de variation	
Log-Cumulants	$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 & = \log \mu - \frac{1}{2} ((\Psi(L) - \log L) - (\Psi(M) - \log M) - (\Psi(N) - \log N)) \\ \tilde{\kappa}_2 & = \frac{1}{4} (\Psi(1, L) + \Psi(1, M) - \Psi(1, N)) \\ \tilde{\kappa}_r & = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 (\Psi(r-1, L) + (-1)^r \Psi(r-1, M) - \Psi(r-1, N)) \end{cases}$
Mode	
Formulation Meijer	$\frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{MN}}{\sqrt{L}} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(M)\Gamma(L)} \bar{G}_{1,2}^{1,1} \left(\left(\frac{\sqrt{MN}x}{\mu} \right)^2 \middle \begin{matrix} -L + \frac{1}{2} & ; & \cdot \\ M - \frac{1}{2} & ; & -N + \frac{1}{2} \end{matrix} \right)$
Fonction de répartition	$\frac{\Gamma(N)}{\Gamma(M)\Gamma(L)} \bar{G}_{2,3}^{1,2} \left(\left(\frac{\sqrt{MN}x}{\mu} \right)^2 \middle \begin{matrix} 1, -L + 1 & ; & \cdot \\ M & ; & 0, -N + 1 \end{matrix} \right)$

${}_1F_1$ est la fonction hypergéométrique confluyente

6.4.9 Compound Halphen en amplitude

En suivant la démarche de Goodman et en partant des lois de Halphen en amplitude, on peut définir les lois “Compound Halphen” en opérant une convolution de Mellin entre une loi de Halphen et la loi du chatoiement pleinement développé, c’est à dire une loi de Rayleigh-Nakagami.

Sous sa forme originelle (équation 6.6), cette opération mène à la loi “Compound Halphen” :

$$HCA[\alpha, \beta, \varepsilon, N](x) = HA[\alpha, \beta, \varepsilon](x) \hat{\star} \mathcal{RN}[\mu = 1, N] \quad (6.16)$$

dont la fonction caractéristique de deuxième espèce s’écrit :

$$\begin{aligned} \phi_{HCA}(s) &= \phi_{HA}(s) \phi_{\mathcal{G}}(s) \\ &= \frac{1}{K_{\alpha}(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{s-1}{4}} K_{\alpha+\frac{s-1}{2}}(2\sqrt{\beta\varepsilon}) \frac{\Gamma(N+s-1)}{N^{s-1} \Gamma(N)} \end{aligned}$$

Or on trouve dans les tables de transformée de Mellin inverse l’expression permettant d’inverser cette relation (par exemple, [41], relation 7.102). Après quelques manipulations ([37]), il est alors possible d’écrire la loi “Compound Halphen” :

$$HCA[\alpha, \beta, \varepsilon, N](x) = \frac{2}{K_{\alpha}(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \frac{N^N}{\Gamma(N)} \left(\sqrt{\beta}\right)^N (\sqrt{\varepsilon})^{-\alpha} x^{2N-1} (\varepsilon + Nx^2)^{\frac{\alpha-N}{2}} K_{-\alpha+N}\left(2\sqrt{\beta(\varepsilon + Nx^2)}\right)$$

On retrouve ainsi la loi $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}(\alpha, \gamma, \lambda, n)$ proposée par Frery ([20], relation 6), avec $\gamma \leftrightarrow \varepsilon, n \leftrightarrow N$ et $\lambda \leftrightarrow \beta$.

Par construction (relation 6.16), on a directement les cas particuliers abordés par Frery ([37]) :

– Pour $\varepsilon = 0$, on obtient une loi K en amplitude puisque l’on a (en utilisant la relation 6.8) :

$$\lim_{\varepsilon=0} HCA[\alpha, \beta, \varepsilon, N](x) = \mathcal{RN}\left[\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \alpha\right] \hat{\star} \mathcal{RN}[\mu = 1, N] = \mathcal{KA}\left[N, \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \alpha\right]$$

C’est le cas “hétérogène” de Frery.

– Pour $\beta = 0$, on obtient une loi de Fisher en amplitude puisque l’on a (en utilisant la relation 6.9) :

$$\lim_{\beta=0} HCA[\alpha, \beta, \varepsilon, N](x) = \mathcal{RN}\mathcal{I}\left[\sqrt{\frac{\varepsilon}{-\alpha}}, -\alpha\right] \hat{\star} \mathcal{RN}[\mu = 1, N] = \mathcal{FA}\left[N, \sqrt{\frac{\varepsilon}{-\alpha}}, -\alpha\right]$$

C’est le cas “extrêmement hétérogène” de Frery (qu’il note \mathcal{G}_A^0).

Troisième partie

Estimation des lois

Cette partie extrêmement factuelle a pour objectif d'achever ce tour d'horizon sur les lois statistiques en imagerie cohérente. Elle va donc regrouper un certain nombre de résultats utiles, en provenance de sources diverses : sauf exception, ceux-ci seront donnés sans démonstration.

Le chapitre 7 donnera quelques rappels sur des notions telles que l'entropie, la vraisemblance, l'information au sens de Fisher ainsi que la définition de la matrice de Fisher. Diverses méthodes d'estimation des paramètres d'une loi seront analysées. La méthode de Kendall & Stuart dédiée à l'étude de la variance d'estimateurs sera adaptée aux log-statistiques. Une approche originale de la méthode du maximum de vraisemblance appliquée aux lois de Fisher sera rapidement abordée.

Le chapitre 8 abordera une sélection des lois décrites dans la partie précédente pour lesquelles on donnera si possible la matrice de Fisher ainsi que les démarches à appliquer pour inverser les paramètres de ces lois.

Le chapitre 9 reviendra plus en détail sur les diagrammes de représentation : le diagramme β_1 - β_2 et le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$.

Enfin le chapitre 10 regroupera quelques résultats plus ou moins connus sur les distances entre lois de probabilité et montrera l'approche des "mimicks".

Chapitre 7

Estimateurs et Variances d'estimateurs

Les lois précédemment décrites sont donc potentiellement “inversables”, c’est à dire qu’à partir de grandeurs, tels les moments et les log-moments, il est possible de retrouver les paramètres de lois que l’on suppose adaptées au phénomène analysé. Les méthodes paramétriques peuvent en général donner, par inversion, les paramètres sous jacents d’une loi dès lors que l’on dispose du même nombre de grandeurs que de paramètres à inverser. C’est dans ce cadre que sont utilisées la Méthode du Maximum de Vraisemblance (MMV), la méthode des moments (MM) et la Méthode des Log-Cumulants (MLC).

Les résultats fournis par une méthode paramétrique seront d’autant plus satisfaisants que l’estimation des paramètres sera “fiable”¹. Cette “fiabilité” peut se définir par la variance de l’estimateur, qui au final donnera une variance sur les paramètres qui dépendra non seulement de la loi à inverser, mais aussi de la dimension de la fenêtre d’analyse (*i.e.* le nombre d’échantillons disponibles).

Enfin, ce chapitre va montrer comment on peut déduire une variance d’estimateur sur les lois classiques à partir de la méthode dite de Kendall et Stuart et comment on peut adapter cette méthode aux lois définies sur \mathbb{R}^+ .

7.1 Matrice d’information de Fisher et Maximum de Vraisemblance

Le but de ce paragraphe est de rappeler quelques définitions fondamentales et de poser des notations qui seront utilisées tout au long de ce chapitre.

7.1.1 Matrice d’information de Fisher

Soit une loi de probabilité $p(x)$ à P paramètres $\{\theta_j, j \in [1, P]\}$: on notera éventuellement cette loi $p[\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_P](x)$. Dans la mesure où l’on peut calculer la matrice A :

$$a_{kj} = \frac{\partial^2 \log(p)}{\partial \theta_k \partial \theta_j} \quad \forall (k, j) \in [1, P] \times [1, P]$$

on définit alors la matrice d’information de Fisher $I(\theta)$ comme

$$I_{kj} = -E \{a_{kj}\}$$

1. Les termes traditionnellement utilisés : précision, robustesse, ... sont volontairement exclus pour rester dans une problématique la plus accessible possible, et ce sans utilisation abusive ou inadaptée de terminologie spécifique. Bien évidemment, il faudrait s’appuyer sur des ouvrages de référence existant dans la littérature pour traduire ces propos en concepts mathématiquement corrects (voir [43] par exemple)

La matrice de Fisher joue un grand rôle en théorie de l'estimation, en particulier pour l'estimation des bornes de variances d'un estimateur. Malheureusement, il existe de nombreux cas où son expression ne peut être obtenue analytiquement, en particulier lorsqu'il n'est pas possible de dériver le logarithme de la loi en fonction d'un de ses paramètres.

7.1.2 Maximum de Vraisemblance et Entropie

Soient N échantillons indépendants x_1, \dots, x_N vérifiant une loi statistique $p(x)$. L'indépendance des échantillons permet alors d'écrire :

$$p(x_1, \dots, x_N) = \prod_{n=1}^N p(x_n)$$

et cette expression représente la vraisemblance. En en prenant le logarithme, on obtient alors une expression additive, la log-vraisemblance :

$$\mathcal{LV} = \log(p(x_1, \dots, x_N)) = \sum_{n=1}^N \log(p(x_n)). \quad (7.1)$$

Si la loi $p(x)$ est décrite par P paramètres $\theta_1, \dots, \theta_P$, le maximum de vraisemblance sera atteint pour des paramètres vérifiant

$$\frac{d \log(p(x_1, \dots, x_N))}{d \theta_j} = \sum_{n=1}^N \frac{d \log p}{d \theta_j} \Big|_{x=x_n} = 0 \quad \forall j \in [1, P] \quad (7.2)$$

Notons que si, pour une loi statistique $p(x)$, on définit l'entropie \mathcal{S} comme :

$$\mathcal{S} = - \int p(x) \log p(x) dx$$

on a la relation :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{LV}}{N} = -\mathcal{S}$$

On peut montrer aisément que pour un certain nombre de lois étudiées dans ce document l'entropie s'exprime en fonction des moments et des log-moments.

7.1.3 Estimateur au sens du maximum de vraisemblance et Bornes de Cramér-Rao

A partir de la relation 7.2, on peut poser la relation vérifiée quand on estime un paramètre θ_j par la méthode dite du maximum de vraisemblance. En effet, l'estimateur $\hat{\theta}_j$ vérifie la relation :

$$\sum_{n=1}^N \frac{d \log p}{d \theta_j} \Big|_{x=x_n} = 0 \quad (7.3)$$

Dans le cas des lois dites exponentielles (cas des lois non biaisées) et dans la mesure où cette dérivée existe, on montre que les estimés des paramètres obtenus par la méthode du Maximum de Vraisemblance ont une variance minimale que l'on appellera "bornes de Cramer Rao".

Pour des paramètres indépendants, on montre alors que la matrice d'information de Fisher est diagonale, et les bornes de Cramer Rao sont égales à l'inverse des termes diagonaux.

7.2 Moments et log-moments empiriques

Dans ce paragraphe, nous supposons que nous disposons d'un tirage de N échantillons d'une loi de probabilité $P : (x_1, x_2, \dots, x_N)$.

7.2.1 Moments et moments centrés

Connaissant N échantillons issus d'un tirage d'une loi de probabilité, les estimés des moments $\hat{m}_1, \hat{m}_2, \dots, \hat{m}_P$ se déduisent des expressions suivantes (relation 2.27) :

$$\begin{aligned}\hat{m}_1 &= \frac{\sum_{n=1}^N x_n}{N} \\ \hat{m}_2 &= \frac{\sum_{n=1}^N x_n^2}{N} \\ &\dots \\ \hat{m}_P &= \frac{\sum_{n=1}^N x_n^P}{N}\end{aligned}$$

Il est important de noter que ces moments estimés sont toujours calculables dans la mesure où les données sont bornées (ce qui est toujours le cas en pratique).

A partir de ces moments estimés, on peut aussi calculer les estimés des moments centrés par le biais des formules suivantes (relation 2.17) :

$$\begin{aligned}\hat{M}_2 &= \hat{m}_2 - \hat{m}_1^2 \\ \hat{M}_3 &= \hat{m}_3 - 3\hat{m}_2\hat{m}_1 + 2\hat{m}_1^3 \\ \hat{M}_4 &= \hat{m}_4 - 4\hat{m}_1\hat{m}_3 + 6\hat{m}_2\hat{m}_1^2 - 3\hat{m}_1^4\end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}\hat{M}_2 &= \frac{\sum_{n=1}^N x_n^2}{N} - \left(\frac{\sum_{n=1}^N x_n}{N} \right)^2 \\ \hat{M}_3 &= \frac{\sum_{n=1}^N x_n^3}{N} - 3 \frac{\left(\sum_{n=1}^N x_n \right) \left(\sum_{n=1}^N x_n^2 \right)}{N^2} + 2 \frac{\left(\sum_{n=1}^N x_n \right)^3}{N^3}\end{aligned}$$

Insistons sur le fait que, en pratique, ces relations peuvent toujours être calculées sur un jeu de données, même si le moment centré correspondant n'existe pas. Ce cas se rencontre en particulier dans le cadre des lois à queue lourde.

Notons aussi qu'il existe des relations entre moments centrés et cumulants (relation 2.23).

7.2.2 Log-moments et log-cumulants

Connaissant N échantillons issus d'un tirage d'une loi de probabilité, les estimés des log-moments $\hat{\hat{m}}_1, \hat{\hat{m}}_2, \dots, \hat{\hat{m}}_P$ se déduisent des expressions suivantes (relation 2.42) :

$$\begin{aligned}\hat{\hat{m}}_1 &= \frac{\sum_{n=1}^N \log x_n}{N} \\ \hat{\hat{m}}_2 &= \frac{\sum_{n=1}^N (\log x_n)^2}{N}\end{aligned}$$

$$\hat{m}_p = \frac{\sum_{n=1}^N (\log x_n)^p}{N}$$

Connaissant ces estimés, on peut alors estimer les log-cumulants par le biais des formules suivantes :

$$\begin{aligned}\hat{\kappa}_2 &= \hat{m}_2 - \hat{m}_1^2 \\ \hat{\kappa}_3 &= \hat{m}_3 - 3\hat{m}_2\hat{m}_1 + 2\hat{m}_1^3 \\ \hat{\kappa}_4 &= \hat{m}_4 - 4\hat{m}_1\hat{m}_3 - 3\hat{m}_2^2 + 12\hat{m}_1^2\hat{m}_2 - 6\hat{m}_1^4\end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire explicitement les expressions des estimés des log-cumulants :

$$\begin{aligned}\hat{\kappa}_1 &= \frac{\sum_{n=1}^N \log x_n}{N} \\ \hat{\kappa}_2 &= \frac{\sum_{n=1}^N (\log x_n)^2}{N} - \left(\frac{\sum_{n=1}^N \log x_n}{N} \right)^2 \\ \hat{\kappa}_3 &= \frac{\sum_{n=1}^N (\log x_n)^3}{N} - 3 \frac{\left(\sum_{n=1}^N \log x_n \right) \left(\sum_{n=1}^N (\log x_n)^2 \right)}{N^2} + 2 \frac{\left(\sum_{n=1}^N \log x_n \right)^3}{N^3}\end{aligned}$$

7.3 Diverses méthodes d'estimation des paramètres d'une loi

Ce paragraphe rappelle les trois méthodes les plus usitées pour estimer les paramètres d'une loi dont on connaît l'expression analytique à partir d'un jeu d'échantillons (tirage) de cette loi.

7.3.1 La Méthode des Moments (MM)

Dans la mesure où il est possible d'avoir un nombre raisonnable d'échantillons, et lorsqu'on dispose d'un nombre P de moments empiriques (paragraphe 7.2.1) égal au nombre P des paramètres d'une loi, si enfin on connaît la forme analytique de ces moments (grâce à la relation 2.15 utilisant la fonction caractéristique de la loi recherchée) et que ces moments existent, on peut envisager d'inverser le système d'équations (P équations à P inconnues) et d'obtenir ainsi des estimés des paramètres de cette loi.

Les exemples que nous rencontrerons (chapitre 8) montreront que selon les lois cette méthode est aisée à mettre en œuvre, ou, au contraire, ne permet pas d'avoir un système inversible.

Notons qu'il n'est pas requis d'avoir des moments entiers d'ordre croissant pour avoir une mise en œuvre aisée de la Méthode des Moments : on peut aussi utiliser des moments négatifs, très utiles en présence de lois à queues lourdes. Le point essentiel réside dans l'existence des moments, en particulier pour les lois à queue lourde dont les moments ne sont pas définis à partir d'un certain ordre.

7.3.2 La Méthode des Log-Cumulants (MLC)

Par analogie avec la méthodes des moments qui utilise les moments empiriques, la Méthode des Log-Cumulants utilise les log-cumulants empiriques ainsi que la forme analytique de ces log-cumulants (grâce à la relation 2.33 utilisant la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi recherchée). Il faut noter que l'on démontre que toute densité de probabilité possède tous ses log-cumulants [4] : la méthode des Log-Cumulants est donc applicable sans aucune restriction.

Le problème majeur de cette méthode est que certaines des fonctions mathématiques rencontrées ne possèdent pas de fonction inverse. Aussi il faut généralement des codes numériques pour inverser le

système d'équations, ou utiliser des RPM (voir [40] : un certain nombre de résultats utiles en imagerie cohérente ont été repris dans l'annexe D).

7.3.3 La Méthode du Maximum de Vraisemblance (MMV)

Le principe de cette méthode s'appuie sur le système 7.2 qui requiert la dérivation de la densité de probabilité selon tous ses paramètres. Ceci peut poser quelques problèmes selon les cas rencontrés :

- Si effectivement toutes les dérivées sont analytiquement calculables, deux cas peuvent apparaître :
 - Les relations permettent d'avoir des expressions explicites des estimés. Dans ce cas somme toute assez rare, les estimations s'avèrent faciles à mener.
 - Les relations permettent d'avoir des expressions implicites des estimés. Dans ce cas, des modèles numériques performants sont à proposer pour inverser le système d'équations trouvées.
- Certaines dérivées n'ont pas de forme analytique (le cas d'école étant la dérivée d'une fonction de Bessel selon le paramètre et non selon la variable). On ne peut obtenir alors les estimés au sens du Maximum de Vraisemblance de cette loi. Cependant, dans quelques cas, on peut tout de même utiliser les relations de la Méthode du Maximum de Vraisemblance en l'appliquant uniquement aux paramètres pour lesquels la dérivée existe et en appliquant une autre méthode d'estimation pour les paramètres pour lesquels la dérivation a échoué.

7.3.4 Méthode du coefficient de Variation (MCV)

Nous avons vu au chapitre 2 que si une loi $p_Y(x)$ à $P + 1$ paramètres peut s'écrire (relation 2.53) :

$$p_Y(x) = p_X(x) \hat{\star} \delta_\mu^M(x)$$

avec $p_X(x)$ à P paramètres, alors $p_Y(x)$ fait intervenir dans sa paramétrisation la grandeur

$$\frac{x}{\mu}$$

La fonction caractéristique de deuxième espèce de $p_Y(x)$ s'écrit :

$$\mu^{s-1} \phi_X(s)$$

μ ne jouant aucun rôle dans $\phi_X(s)$ puisque la loi $p_X(x)$ à P paramètres partage tous ses paramètres avec la loi $p_Y(x)$ excepté le paramètre μ . Comme la fonction caractéristique de deuxième espèce permet d'obtenir les moments de tout ordre (dans le mesure où elle est définie), si les deux premiers moments m_1 et m_2 existent, alors le rapport

$$\frac{m_2}{m_1^2}$$

ne dépend pas de μ (qui est le facteur d'échelle) : ce rapport ne dépend donc que des facteurs de forme.

Dans le cas d'une loi à deux paramètres, en reprenant la définition du coefficient de variation (relation 2.19), on peut écrire :

$$\gamma = \sqrt{\frac{M_2}{m_1^2}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1^2} - 1}$$

et cette relation est une relation implicite ne mettant en jeu que le facteur de forme. Dans certains cas, on peut même obtenir une relation explicite du facteur de forme (comme dans le cas de la loi Gamma).

7.4 Variance d'un estimateur : la méthode de Kendall et Stuart

7.4.1 Calcul de la variance d'un estimateur par la méthode de Kendall et Stuart

Kendall & Stuart [46] : proposent de calculer la variance d'une fonction $g(m_1, m_2)$ en effectuant un développement limité au premier ordre de la fonction $g(m_1, m_2)$ autour des valeurs $m_{0,1}$ et $m_{0,2}$:

$$g(m_1, m_2) = g(m_{0,1}, m_{0,2}) + (m_1 - m_{0,1}) \frac{\partial g}{\partial m_1}(m_{0,1}, m_{0,2}) + (m_2 - m_{0,2}) \frac{\partial g}{\partial m_2}(m_{0,1}, m_{0,2})$$

En ayant vérifié que les $\frac{\partial g}{\partial m_i}$ ne sont pas tous deux nuls en $(m_{0,1}, m_{0,2})$, on établit la variance de g par la formule ([46], formule 10.12)

$$\begin{aligned}
\text{var} \{g(m_1, m_2)\} &= E \left\{ [g(m_1, m_2) - g(m_{0,1}, m_{0,2})]^2 \right\} \\
&= E \left\{ \left[(m_1 - m_{0,1}) \frac{\partial g}{\partial m_1}(m_{0,1}, m_{0,2}) + (m_2 - m_{0,2}) \frac{\partial g}{\partial m_2}(m_{0,1}, m_{0,2}) \right]^2 \right\} \\
&= \left(\frac{\partial g}{\partial m_1} \right)^2 (m_{0,1}, m_{0,2}) \text{var} \{m_1\} + \left(\frac{\partial g}{\partial m_2} \right)^2 (m_{0,1}, m_{0,2}) \text{var} \{m_2\} \\
&\quad + 2 \frac{\partial g}{\partial m_1}(m_{0,1}, m_{0,2}) \frac{\partial g}{\partial m_2}(m_{0,1}, m_{0,2}) \text{cov} \{m_1, m_2\}
\end{aligned} \tag{7.4}$$

avec

$$\text{var} \{m_i\} = \frac{1}{N} (m_{2i} - m_i^2) \tag{7.5}$$

$$\text{cov} \{m_i, m_j\} = \frac{1}{N} (m_{i+j} - m_i m_j) \tag{7.6}$$

N étant le nombre d'échantillons.

Cette méthode est bien évidemment généralisable à des moments d'ordre quelconque.

7.4.2 Une adaptation de la Méthode de Kendall et Stuart pour les statistiques de deuxième espèce

En s'inspirant de l'approche de Kendall & Stuart [46], et puisque l'on connaît les log-cumulants en fonction des log-moments, on va chercher à effectuer un développement limité au premier ordre des log-cumulants autour de la valeur théorique. Dans le cas du second log-cumulant, on peut le considérer comme une fonction des deux premiers log-moments $g(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2)$ et le développement limité s'exprime alors autour des valeurs théoriques des deux premiers log-moments $\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2}$ comme :

$$g(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2) = g(\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2}) + (\tilde{m}_1 - \tilde{m}_{0,1}) \frac{\partial g}{\partial \tilde{m}_1}(\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2}) + (\tilde{m}_2 - \tilde{m}_{0,2}) \frac{\partial g}{\partial \tilde{m}_2}(\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2})$$

En ayant vérifié que les $\frac{\partial g}{\partial \tilde{m}_i}$ ne sont pas tous deux nuls en $(\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2})$, on établit la variance de g par la formule formellement identique à la relation 7.4 :

$$\begin{aligned}
\text{var} \{g(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2)\} &= E \left\{ [g(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2) - g(\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2})]^2 \right\} \\
&= E \left\{ \left[(\tilde{m}_1 - \tilde{m}_{0,1}) \frac{\partial g}{\partial \tilde{m}_1}(\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2}) + (\tilde{m}_2 - \tilde{m}_{0,2}) \frac{\partial g}{\partial \tilde{m}_2}(\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2}) \right]^2 \right\} \\
&= \left(\frac{\partial g}{\partial \tilde{m}_1} \right)^2 (\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2}) \text{var} \{\tilde{m}_1\} + \left(\frac{\partial g}{\partial \tilde{m}_2} \right)^2 (\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2}) \text{var} \{\tilde{m}_2\} \\
&\quad + 2 \frac{\partial g}{\partial \tilde{m}_1}(\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2}) \frac{\partial g}{\partial \tilde{m}_2}(\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2}) \text{cov} \{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2\}
\end{aligned} \tag{7.7}$$

7.5 Variance des grandeurs statistiques usuelles

7.5.1 Méthode des moments : variance des Moments et Moments centrés

Nous avons vu que, dans le cadre des statistiques usuelles, la définition de la variance (formule 7.5) permet d'écrire :

$$\text{var} \{m_i\} = \frac{1}{N} (m_{2i} - m_i^2).$$

On a donc directement par définition la variance des moments :

$$\begin{aligned} \text{var} \{m_2\} &= \frac{1}{N} (m_4 - m_2^2) \\ \text{var} \{m_3\} &= \frac{1}{N} (m_6 - m_3^2) \\ \text{var} \{m_4\} &= \frac{1}{N} (m_8 - m_4^2) \end{aligned}$$

L'application de la formule de Kendall et Stuart (expression 7.4) permet de calculer les variances des moments centrés M_i en utilisant la relation liant le moment centré M_i et les moments $m_k, k \in [1, 2i]$ (équation 2.17). On obtient par exemple :

$$\begin{aligned} \text{var} \{M_2\} &= \frac{1}{N} (8 m_1^2 m_2 - 4 m_1^4 + m_4 - m_2^2 - 4 m_1 m_3) \\ \text{var} \{M_3\} &= \frac{1}{N} (9 m_2^3 - 72 m_2^2 m_1^2 + 108 m_2 m_1^4 - 36 m_1^6 + 21 m_1^2 m_4 + m_6 - m_3^2 \\ &\quad + 30 m_1 m_2 m_3 - 48 m_1^3 m_3 - 6 m_2 m_4 - 6 m_1 m_5) \\ \text{var} \{M_4\} &= \frac{1}{N} (528 m_1^3 m_2 m_3 + m_8 - m_4^2 + 24 m_2 m_1 m_5 - 132 m_2 m_1^2 m_4 + 48 m_1 m_3 m_4 \\ &\quad - 96 m_1 m_2^2 m_3 + 28 m_1^2 m_6 + 156 m_1^4 m_4 + 576 m_2 m_1^6 + 16 m_3^2 m_2 - 112 m_3^2 m_1^2 \\ &\quad - 336 m_1^5 m_3 + 144 m_2^3 m_1^2 - 612 m_2^2 m_1^4 - 144 m_1^8 - 8 m_1 m_7 - 8 m_3 m_5 - 72 m_1^3 m_5) \end{aligned}$$

Si au lieu d'utiliser les moments on utilise les moments centrés, ces relations se simplifient et on obtient par exemple

$$\begin{aligned} \text{var} \{M_2\} &= \frac{1}{N} (M_4 - M_2^2) \\ \text{var} \{M_3\} &= \frac{1}{N} (M_6 - 6M_2M_4 - M_3^2 + 9M_2^3) \end{aligned} \quad (7.8)$$

7.5.2 Méthode des moments : variance du coefficient de variation

De la même manière, on peut calculer la variance du coefficient de variation γ :

$$\text{var} \{\gamma\} = \frac{1}{N} \frac{m_1^2 (4 m_2^3 - m_2^2 m_1^2 + m_1^2 m_4 - 4 m_1 m_2 m_3)}{(-m_2 + m_1^2)^4}$$

7.5.3 Méthode des moments : variance des coefficients β_1 et β_2

Les expressions des variances des coefficients β_1 et β_2 (asymétrie et aplatissement, définis par les relations 2.20 et 2.21, peuvent s'obtenir sans problème majeur, si ce n'est celui de les écrire ;

$$\begin{aligned} \text{var} \{\beta_1\} &= \frac{1}{N} \frac{-(m_3 - 3 m_2 m_1 + 2 m_1^3)^2}{(m_2 - m_1^2)^8} \\ &\quad (24 m_1^3 m_3 m_4 + 24 m_2^3 m_4 - 12 m_3 m_5 m_1^2 - 12 m_2^2 m_1 m_5 + 12 m_2 m_1^3 m_5 + 12 m_3 m_5 m_2 \\ &\quad + 36 m_1 m_3^3 - 4 m_6 m_2^2 - 4 m_6 m_1^4 - 6 m_3 m_2 m_1 m_4 + 8 m_6 m_2 m_1^2 - 80 m_1^2 m_3^2 m_2 \\ &\quad - 33 m_2^2 m_1^2 m_4 + 9 m_2^4 m_1^2 + 16 m_1^4 m_3^2 - 9 m_3^2 m_4 - 35 m_3^2 m_2^2 + 114 m_3^2 m_1 m_3 \\ &\quad - 24 m_2^2 m_1^3 m_3 - 36 m_2^5) \\ \text{var} \{\beta_2\} &= \frac{1}{N} \frac{-1}{(m_2 - m_1^2)^6} \\ &\quad (-288 m_1^4 m_3^2 m_2 + 64 m_1^6 m_3^2 + 96 m_2^4 m_1 m_3 + 432 m_2^3 m_1^3 m_3 - 96 m_2^2 m_1^5 m_3 \\ &\quad - 16 m_1^6 m_6 - 176 m_1^2 m_3^2 m_4 - 4 m_1^2 m_6 m_2^2 + 20 m_1^4 m_6 m_2 + 2 m_8 m_2 m_1^2 + 48 m_1^2 m_1 m_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4 m_4^3 - 12 m_2^3 m_1^2 m_4 - 96 m_2^2 m_1^4 m_4 - 14 m_1^2 m_4^2 m_2 + 36 m_2^4 m_1^4 - 23 m_1^4 m_4^2 \\
& + m_4^2 m_2^2 - 336 m_3^2 m_2^2 m_1^2 - 16 m_3^2 m_2^3 - 16 m_2 m_3^2 m_4 + 64 m_2 m_3^3 m_1 + 192 m_3^3 m_1^3 \\
& - m_8 m_2^2 - m_8 m_1^4 + 48 m_3 m_2^2 m_1 m_4 + 192 m_3 m_2 m_1^3 m_4 - 144 m_2^5 m_1^2 + 48 m_1^5 m_3 m_4 \\
& - 24 m_1 m_4 m_5 m_2 + 24 m_1^3 m_4 m_5 + 8 m_3 m_5 m_2^2 - 88 m_3 m_5 m_1^4 - 24 m_2^3 m_1 m_5 \\
& - 24 m_2^2 m_1^3 m_5 + 80 m_3 m_5 m_2 m_1^2 + 48 m_2 m_1^5 m_5 + 8 m_7 m_1^5 - 16 m_1 m_3 m_6 m_2 - 4 m_4 m_6 m_1^2 \\
& + 4 m_4 m_6 m_2 + 16 m_1^3 m_3 m_6 - 16 m_7 m_2 m_1^3 + 8 m_1 m_7 m_2^2)
\end{aligned}$$

Même si ces expressions sont très lourdes et peu maniables, elles n'en restent pas moins aisées à introduire dans un code numérique.

7.5.4 Méthode des log-cumulants : variance des log-cumulants

L'application de la formule modifiée de Kendall et Stuart (expression 7.7) permet de calculer les variances des log-cumulants $\tilde{\kappa}_i$ en utilisant la relation liant le log-cumulant $\tilde{\kappa}_i$ et les log-moments $\tilde{m}_k, k \in [1, 2i]$.

En particulier, on peut calculer la variance des log-cumulants 2 et 3 :

$$\begin{aligned}
\text{var} \{ \tilde{\kappa}_2 \} &= \frac{1}{N} (8 \tilde{m}_1^2 \tilde{m}_2 - 4 \tilde{m}_1^4 + \tilde{m}_4 - \tilde{m}_2^2 - 4 \tilde{m}_1 \tilde{m}_3) \\
\text{var} \{ \tilde{\kappa}_3 \} &= \frac{1}{N} (9 \tilde{m}_2^3 - 72 \tilde{m}_2^2 \tilde{m}_1^2 + 108 \tilde{m}_2 \tilde{m}_1^4 - 36 \tilde{m}_1^6 + 21 \tilde{m}_1^2 \tilde{m}_4 + \tilde{m}_6 - \tilde{m}_3^2 \\
&\quad + 30 \tilde{m}_1 \tilde{m}_2 \tilde{m}_3 - 48 \tilde{m}_1^3 \tilde{m}_3 - 6 \tilde{m}_2 \tilde{m}_4 - 6 \tilde{m}_1 \tilde{m}_5)
\end{aligned}$$

Ce sont formellement les mêmes expressions que dans le cas des statistiques traditionnelles. En pratique, on préférera exprimer ces deux grandeurs en fonction des log-moments, ce qui simplifie grandement les relations :

$$\text{var} \{ \tilde{\kappa}_2 \} = \frac{1}{N} (\tilde{M}_4 - \tilde{M}_2^2) \quad (7.9)$$

$$\text{var} \{ \tilde{\kappa}_3 \} = \frac{1}{N} (\tilde{M}_6 - 6\tilde{M}_2\tilde{M}_4 - \tilde{M}_3^2 + 9\tilde{M}_2^3) \quad (7.10)$$

Il faut noter qu'elles ne dépendent pas de $\tilde{\kappa}_1$, ce qui signifie que dans les lois que nous avons détaillées au chapitre 4, ces variances ne font intervenir que les facteurs de formes (L, M, \dots) .

7.6 Paramètre d'échelle et méthode du maximum de vraisemblance

7.6.1 Facteur d'échelle et paramétrisation des lois

Au paragraphe 2.4.4 du chapitre 2 nous avons vu le rôle que joue un paramètre, appelé facteur d'échelle, dans le contexte des statistiques de Mellin. Etant donnée la variable aléatoire X , la nouvelle variable aléatoire Y telle que

$$Y = \frac{X}{\mu}$$

possède alors la propriété essentielle que tous ses log-cumulants d'ordre supérieur à 1 d'une part sont identiques à ceux de la variable aléatoire X et d'autre part ne dépendent pas de ce nouveau paramètre μ .

Or, si on regarde plus précisément la quasi totalité des lois de ce document, on peut noter que leurs $P + 1$ paramètres se classent en deux catégories :

- une catégorie représentée par un premier paramètre qui sera noté μ et qui joue le rôle de paramètre d'échelle
- une catégorie représentée par un certain nombre P de paramètres de forme, que l'on pourra noter $(\theta_j, j \in [1, P])$.

Plus précisément, ces lois statistiques usitées en imagerie cohérente ont toutes une forme bien spécifique, ce qui fait qu'une loi à $P + 1$ paramètres s'écrit :

$$p[\mu, \theta_1, \dots, \theta_P](x) = A \frac{k}{\mu} f[\theta_1, \dots, \theta_P] \left(\frac{kx}{\mu} \right) \quad (7.11)$$

la fonction f étant une fonction mathématique plus ou moins simple, telle que les P paramètres θ_j modifient la forme de la fonction sans modifier sérieusement l'échelle (par exemple le mode dans le cas d'une loi ayant un mode non nul). Deux nouveaux facteurs A et k apparaissent dans ce formalisme :

- k permet, selon la fonction f , d'avoir un lien tangible entre l'échelle et le paramètre μ de la loi. Grâce à ce paramètre, on peut ajuster la description d'une loi pour que, par exemple, le mode soit proche ou égal à μ , ou que le moment d'ordre 1 soit égal à μ . Bien évidemment, k dépend des facteurs de formes $\theta_1, \dots, \theta_P$
- A est un paramètre permettant la relation fondamentale que suit toute loi de probabilité :

$$\int_0^\infty p[\mu, \theta_1, \dots, \theta_P](x) dx = 1$$

Pour illustrer le problème de la paramétrisation d'une loi, nous allons prendre l'exemple de la loi Gamma.

7.6.2 L'exemple de la loi Gamma

La loi Gamma possède plusieurs paramétrisations :

- Sous le formalisme de la relation 3.2, elle s'écrit (avec $L = \theta_1$) :

$$\mathcal{G}[\mu, L](x) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{Lx}{\mu} \right)^{L-1} e^{-\frac{Lx}{\mu}} \quad L > 0 \quad (7.12)$$

Sa moyenne, c'est à dire son moment d'ordre 1, s'écrit :

$$m_1 = \mu$$

et son mode, pour $L > 1$ s'écrit :

$$m_{\text{mode}} = \frac{L-1}{L} \mu$$

On observe donc que μ est bien directement lié à la moyenne et au mode, qui sont deux grandeurs couramment utilisées pour décrire l'allure d'une loi statistique..

Connaissant son écart type σ :

$$\sigma = \frac{\mu}{\sqrt{L}}$$

on en déduit le coefficient de variation γ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{L}}$$

qui ne dépend que du paramètre L : on peut donc affirmer que L est un facteur de forme.

Nous verrons au chapitre 8 qu'avec cette paramétrisation la matrice de Fisher de la loi Gamma est une matrice diagonale.

- En revanche, si on prend la paramétrisation de Wikipedia, la loi Gamma s'écrit :

$$f(x; k, \theta) = \frac{x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(k) \theta^k}$$

et on a pour sa moyenne, c'est à dire son moment d'ordre 1, l'expression :

$$m_1 = k\theta$$

et son mode (pour $k > 1$) :

$$m_{\text{mode}} = (k - 1) \theta$$

On voit alors que moyenne et mode dépendent linéairement à la fois du paramètre k et du paramètre θ .

Connaissant son écart type σ :

$$\sigma = \sqrt{k} \theta$$

on en déduit le coefficient de variation γ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Si k semble être un facteur de forme, θ ne peut être un simple facteur d'échelle puisque le premier moment dépend à la fois de θ et de k .

On peut aussi noter qu'avec cette paramétrisation la matrice de Fisher de la loi Gamma n'est pas une matrice diagonale.

7.6.3 Une propriété essentielle

La modélisation d'une loi de probabilité selon la forme de la relation 7.11 :

$$p[\mu, \theta_1, \dots, \theta_P](x) = \frac{Ak}{\mu} f[\theta_1, \dots, \theta_P]\left(\frac{kx}{\mu}\right)$$

va conduire à une expression très particulière de sa dérivée selon le paramètre μ puisque l'on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu}(p[\mu, \theta_1, \dots, \theta_P](x)) &= \frac{d}{d\mu}\left(\frac{Ak}{\mu} f[\theta_1, \dots, \theta_P]\left(\frac{kx}{\mu}\right)\right) \\ &= -\frac{Ak}{\mu^2} f[\theta_1, \dots, \theta_P]\left(\frac{kx}{\mu}\right) - \frac{Ak^2x}{\mu^3} \frac{d}{dy}(f[\theta_1, \dots, \theta_P](y)) \Big|_{y=\frac{kx}{\mu}} \\ &= -\frac{1}{\mu} \frac{Ak}{\mu} f[\theta_1, \dots, \theta_P]\left(\frac{kx}{\mu}\right) - \frac{1}{\mu} \frac{Ak}{\mu} \frac{kx}{\mu} \frac{d}{dy}(f[\theta_1, \dots, \theta_P](y)) \Big|_{y=\frac{kx}{\mu}} \end{aligned} \quad (7.13)$$

expression que l'on peut aussi réécrire sous la forme suivante :

$$\frac{d}{d\mu}(p[\mu, \theta_1, \dots, \theta_P](x)) = -\frac{1}{\mu} p[\mu, \theta_1, \dots, \theta_P](x) - \frac{1}{\mu} \left(y \frac{d}{dy}(p[\mu, \theta_1, \dots, \theta_P](y))\right) \Big|_{y=\frac{kx}{\mu}} \quad (7.14)$$

7.6.4 Application à la méthode du maximum de vraisemblance

Comme nous l'avons rappelé au paragraphe 7.1.2, la méthode du maximum de vraisemblance cherche, à partir de N réalisations x_1, \dots, x_N et d'une forme analytique d'une loi donnée $p(x)$, les paramètres tels que l'ensemble des réalisations soient les plus vraisemblables.

Pour une loi vérifiant le formalisme de la relation 7.11 :

$$p[\mu, \theta_1, \dots, \theta_P](x) = A \frac{k}{\mu} f[\theta_1, \dots, \theta_P]\left(\frac{kx}{\mu}\right)$$

et dans le cas du paramètre μ , cette expression s'écrit :

$$\frac{d \log(p(x_1, \dots, x_N))}{d\mu} = \sum_{r=1}^N \frac{d \log p(x)}{d\mu} \Big|_{x=x_r} = 0 \quad (7.15)$$

En utilisant la relation 7.14, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^N \frac{d \log p(x)}{d \mu} \Big|_{x=x_n} \\
&= \sum_{n=1}^N \frac{1}{p[\hat{\mu}, \theta_1, \dots, \theta_P](x_n)} \left(-\frac{1}{\hat{\mu}} p[\hat{\mu}, \theta_1, \dots, \theta_P](x_n) - \frac{1}{\hat{\mu}} \left(y \frac{d}{dy} (p[\hat{\mu}, \theta_1, \dots, \theta_P](y)) \right) \Big|_{y=\frac{k x_n}{\hat{\mu}}} \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{7.16}$$

ce qui donne au final une relation implicite fondamentale :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{y \frac{d}{dy} (p[\hat{\mu}, \theta_1, \dots, \theta_P](y))}{p[\hat{\mu}, \theta_1, \dots, \theta_P](y)} \Big|_{y=\frac{k x_n}{\hat{\mu}}} = -1 \tag{7.17}$$

Elle nécessite bien entendu de connaître la forme analytique de la dérivée première de la fonction p . Il faut noter que sous cette forme la plus générale et concise possible, l'expression est implicite puisque $\hat{\mu}$ n'apparaît que dans l'expression de la variable y .

Si on utilise la modélisation donnée par l'expression 7.11, on peut réécrire cette expression en une nouvelle expression ne faisant intervenir que la fonction $f[\theta_1, \dots, \theta_P]$ (qui ne dépend pas directement de μ), ce qui donne :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{y \frac{d}{dy} (f[\theta_1, \dots, \theta_P](y))}{f[\theta_1, \dots, \theta_P](y)} \Big|_{y=\frac{k x_n}{\hat{\mu}}} = -1 \tag{7.18}$$

que l'on peut réécrire :

$$\hat{\mu} = -\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N k x_n \frac{\frac{d}{dy} f[\theta_1, \dots, \theta_P](y)}{f[\theta_1, \dots, \theta_P](y)} \Big|_{y=\frac{k x_n}{\hat{\mu}}} \tag{7.19}$$

C'est aussi une relation implicite, puisque $\hat{\mu}$ apparaît dans le terme de gauche et aussi dans le terme de droite. Elle nécessite bien entendu de connaître la forme analytique de la dérivée première de la fonction f .

7.7 Le cas des “Lois de Meijer Normalisées”

7.7.1 Choix du formalisme

Nous avons défini au chapitre 3 les lois de Meijer Normalisées $\overline{LMN}[\mu](x)$ caractérisées par une expression analytique sous forme de fonction de Meijer, un certain nombre de facteurs de forme et une valeur μ égale à la moyenne de la loi (relation 3.40) :

$$\overline{LMN}[\mu](x) = A \frac{k}{\mu} \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(\frac{kx}{\mu} \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \quad ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m \quad ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right)$$

ce qui mène aux remarques suivantes :

- les coefficients a_i et b_i sont les facteurs de forme de la loi. Il y en a $P = p + q$.
- le terme $\frac{x}{\mu}$ garantit les propriétés de similitude rencontrées au chapitre 2 (paragraphe 2.4.4) ;
- le terme k assure que le premier moment soit égal au paramètre μ
- le terme A , qui ne dépend que des facteurs de formes, assure que cette relation décrit bien une loi de probabilité ($\int_0^\infty \overline{LMN}[\mu](x) dx = 1$).

A travers les chapitres 4, 5 et 6, nous avons pu remarquer que toutes les lois décrites ont une expression sous forme de Lois de Meijer Normalisées : ceci explique pourquoi nous nous focalisons dans ce paragraphe sur ce type de lois.

Si l'on veut mettre en évidence les paramètres liés à la forme de ce type de loi, ainsi que la notion de facteur d'échelle lié au paramètre μ , on peut réécrire la fonction de Meijer Normalisée $\overline{LMN}[\mu](x)$ ainsi :

$$\overline{LMN}[\mu](x) = A \frac{k}{\mu} f[[a_1, \dots, a_n], [a_{n+1}, \dots, a_p], [b_1, \dots, b_m], [b_{m+1}, \dots, b_q]](y) \Big|_{y=\frac{kx}{\mu}} \tag{7.20}$$

avec

$$f[[a_1, \dots, a_n], [a_{n+1}, \dots, a_p], [b_1, \dots, b_m], [b_{m+1}, \dots, b_q]](y) = \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(y \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \quad ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m \quad ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right)$$

7.7.2 Maximum de vraisemblance

Le principe du maximum de vraisemblance requiert le calcul des dérivées logarithmiques de la densité de probabilité vis à vis des paramètres θ_j de la loi (relation 7.2) :

$$\frac{d \log \overline{LMN} [\mu](x)}{d \theta_j} = \frac{\frac{d \overline{LMN} [\mu](x)}{d \theta_j}}{\overline{LMN} [\mu](x)}$$

Il faut donc analyser l'existence et la valeur de la dérivée de $\overline{LMN} [\mu](x)$ vis à vis de ses paramètres.

- Dans le cas des paramètres de forme, c'est à dire les coefficients a_i et b_i , il n'existe aucune relation générale permettant de dériver la fonction de Meijer sous jacente. Ceci explique pourquoi on rencontre parfois des lois de l'imagerie cohérente pour lesquelles on ne peut pas obtenir de relation donnant les paramètres de forme par une méthode de maximum de vraisemblance. On peut aussi espérer que des découvertes dans le domaine des fonctions spéciales puissent encore apparaître dans les prochaines décennies.
- Dans le cas du paramètre μ , nous avons vu que le principe du maximum de vraisemblance conduisait à une relation implicite que doit vérifier $\hat{\mu}$ (relation 7.18). Appliqué à une loi de Meijer Normalisée paramétrée sous la forme de la relation 7.20, on obtient la relation :

$$\frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \frac{y \frac{d}{dy} (f[[a_1, \dots, a_n], [a_{n+1}, \dots, a_p], [b_1, \dots, b_m], [b_{m+1}, \dots, b_q]](y))}{f[[a_1, \dots, a_n], [a_{n+1}, \dots, a_p], [b_1, \dots, b_m], [b_{m+1}, \dots, b_q]](y)} \Bigg|_{y=\frac{k x_r}{\mu}} = -1$$

Or, f étant une fonction de Meijer, nous avons deux propriétés essentielles des fonctions de Meijer qu'il est possible d'appliquer :

- la dérivée d'une fonction de Meijer est une fonction de Meijer (voir annexe B.2.5)
- la multiplication d'une fonction de Meijer par la variable est une fonction de Meijer (voir annexe B.2.2)

Ceci conduit aisément (voir le rapport [39]) à une relation étonnamment simple dans ce cas :

$$\boxed{\frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \frac{\bar{G}_{p+1,q+1}^{m+1,n} \left(\frac{k x_r}{\hat{\mu}} \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \quad ; \quad 0, a_{n+1}, \dots, a_p \\ 1, b_1, \dots, b_m \quad ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right)}{\bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(\frac{k x_r}{\hat{\mu}} \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \quad ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m \quad ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right)}} = 1} \quad (7.21)$$

Cette relation très générique peut bien entendu s'appliquer à la loi Gamma. On obtient alors la relation :

$$\frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \frac{\bar{G}_{1,2}^{2,0} \left(\frac{L x_r}{\mu} \left| \begin{array}{l} \cdot \quad ; \quad 0 \\ 1, L-1 \quad ; \quad \cdot \end{array} \right. \right)}{\bar{G}_{0,1}^{1,0} \left(\frac{L x_r}{\hat{\mu}} \left| \begin{array}{l} \cdot \quad ; \quad \cdot \\ L-1 \quad ; \quad \cdot \end{array} \right. \right)} = 1$$

et nous verrons au chapitre suivant qu'il existe une formule explicite très simple dans ce cas (relation 8.5, qui n'est qu'une simple moyenne) et qui remplace avantageusement la présente relation implicite.

7.7.3 Cas des lois de Meijer Normalisées Généralisées

Ce cas de généralisation de la loi de Meijer Normalisée, abordé au chapitre 3, conduit à la loi \overline{LMG} (relation 3.42) :

$$\overline{LMG}[\mu](x) = A \frac{k}{\mu} \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(\left(\frac{k x}{\mu} \right)^\eta \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \quad ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m \quad ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right)$$

La relation implicite que doit vérifier $\hat{\mu}$ pour être l'estimateur du paramètre d'échelle au sens du maximum de vraisemblance s'écrit :

$$\frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \frac{\bar{G}_{p+1,q+1}^{m+1,n} \left(\left(\frac{k x_r}{\hat{\mu}} \right)^\eta \mid \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \ ; \ 0, a_{n+1}, \dots, a_p \\ 1, b_1, \dots, b_m \ ; \ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right)}{\bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(\left(\frac{k x_r}{\hat{\mu}} \right)^\eta \mid \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \ ; \ a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m \ ; \ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right)} = \frac{1}{\eta} \quad (7.22)$$

C'est une généralisation extrêmement limpide de la relation 7.21, le paramètre η apparaissant simplement dans le terme de droite².

2. on vérifie que pour $\eta = 1$, on retrouve le cas précédent.

Chapitre 8

Estimation des paramètres des lois sur \mathbb{R}^+

Nous allons maintenant appliquer les résultats du précédent chapitre aux lois les plus usuelles¹ définies aux chapitres 4 (lois standards), 5 (lois généralisées) et 6 (lois en amplitude). Certains calculs ne seront pas menés dans le détail mais peuvent se retrouver dans [35], l'objectif étant de regrouper dans ce document le plus d'information utile pour un traicteur d'images². Notons que la méthode des moments ne sera, sauf exception, appliquée que dans les cas canoniques de moments entiers positifs (en particulier, la méthode des moments dits "inférieurs" détaillée dans [35] ne sera quasiment pas utilisée dans ce document). La méthode du coefficient de variation sera présentée uniquement dans quelques cas isolés. Enfin, ce chapitre ne se voulant pas exhaustif, le lecteur pourra être sollicité à mener certains calculs pour les cas non traités qui pourraient lui être utiles.

8.1 Quelques rappels et remarques sur les estimateurs

8.1.1 Variance des estimateurs des moments centrés et des log-cumulants

Au chapitre 7, la relation 7.8 donne la variance des estimateurs des moments centrés d'ordre 2 et 4 :

$$\begin{aligned} \text{var} \{M_2\} &= \frac{1}{N} (M_4 - M_2^2) \\ \text{var} \{M_3\} &= \frac{1}{N} (M_6 - 6M_2M_4 - M_3^2 + 9M_2^3) \end{aligned}$$

Pour les log-cumulants, le calcul est formellement identique et permet d'écrire (relation 7.9) :

$$\begin{aligned} \text{var} \{\tilde{\kappa}_2\} &= \frac{1}{N} (\tilde{\kappa}_4 - \tilde{\kappa}_2^2) \\ \text{var} \{\tilde{\kappa}_3\} &= \frac{1}{N} (\tilde{\kappa}_6 - 6\tilde{\kappa}_2\tilde{\kappa}_4 - \tilde{\kappa}_3^2 + 9\tilde{\kappa}_2^3) \end{aligned}$$

Notons que dans le cas des lois généralisées pour lesquelles on a une relation fondamentale entre les log-cumulants de la variable initiale X et ceux de la nouvelle variable $Y = X^\eta$ (relation 2.57) :

$$\tilde{\kappa}_{Y,r} = \frac{1}{\eta^r} \tilde{\kappa}_{X,r}$$

on montre aisément les deux relations :

$$\begin{aligned} \text{var} \{\tilde{\kappa}_{Y,2}\} &= \frac{1}{\eta^4} \text{var} \{\tilde{\kappa}_{X,2}\} \\ \text{var} \{\tilde{\kappa}_{Y,3}\} &= \frac{1}{\eta^6} \text{var} \{\tilde{\kappa}_{X,3}\} \end{aligned}$$

1. On se limitera donc aux lois à un, deux ou trois paramètres.
2. ce qui rend ce chapitre particulièrement ennuyeux.

Ces relations permettent d'avoir une idée de la qualité de l'estimation et de savoir si le nombre d'échantillons disponibles N est suffisant pour garantir un résultat utilisable.

8.1.2 Autres propriétés des lois définies sur \mathbb{R}^+

Moments et log-moments présentent quelques particularités dans le cas de loi de probabilité définie sur \mathbb{R}^+ . En effet, pour tout r appartenant à l'intervalle \mathcal{D} de \mathbb{R} tel que $0 \in \mathcal{D}$ et que m_r existe pour toute valeur (entière ou réelle) r de cet intervalle, on a de manière évidente :

$$x^r p(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0 \quad \forall r \in \mathcal{D}$$

d'où

$$m_r \geq 0 \quad \forall r \in \mathcal{D} \quad (8.1)$$

\mathcal{D} étant un intervalle.

Le même raisonnement permet de dire que tout moment centré d'indice pair est aussi positif ou nul :

$$M_{2r} \geq 0 \quad \forall r \in \mathcal{D} \quad (8.2)$$

En particulier, pour une loi dont le moment d'ordre 2 est défini, on a :

$$M_2 = m_2 - m_1^2 \geq 0 \quad (8.3)$$

8.2 Estimation des paramètres : Lois usuelles à un paramètre

8.2.1 Loi Homothétique

La loi homothétique a été présentée au paragraphe 4.1.1. Elle s'écrit :

$$\mathcal{H}[\mu](x) = \frac{1}{\mu} \delta_{\mu}^{\mathcal{M}}(x)$$

Connaissant l'estimé du premier moment \hat{m}_1 , l'estimateur du paramètre μ au sens de la méthode des moments est donnée par :

$$\hat{\mu}_{\text{MM}} = \hat{m}_1$$

Connaissant l'estimé du premier log-cumulant $\hat{\kappa}_1$, l'estimateur du paramètre μ au sens de la méthode des Log-Cumulants s'écrit :

$$\log \hat{\mu}_{\text{MLC}} = \hat{\kappa}_1$$

8.2.2 Loi uniforme sur $[0, \mu]$

La loi uniforme sur $[0, \mu]$ a été présentée au paragraphe 4.1.2. Elle s'écrit :

$$\mathcal{U}[\mu](x) = \frac{1}{\mu} (Y(x) - Y(\mu - x))$$

L'utilisation du premier moment donne l'estimateur du paramètre μ au sens de la méthode des moments :

$$\hat{\mu}_{\text{MM}} = 2 \hat{m}_1$$

L'utilisation du premier log-cumulant donne l'estimateur du paramètre μ au sens de la méthode des Log-Cumulants :

$$\log \hat{\mu}_{\text{MLC}} = 1 + \hat{\kappa}_1$$

8.2.3 Loi Exponentielle Décroissante

La loi Exponentielle Décroissante a été présentée au paragraphe 4.1.3. Elle s'écrit :

$$\mathcal{ED}[\mu](x) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}}$$

L'utilisation du premier moment donne l'estimateur du paramètre μ au sens de la méthode des moments :

$$\hat{\mu}_{\text{MM}} = \hat{m}_1$$

L'utilisation du premier log-cumulant donne l'estimateur du paramètre μ au sens de la méthode des Log-Cumulants :

$$\log \hat{\mu}_{\text{MLC}} = \hat{\kappa}_1 + \Psi(1)$$

8.2.4 Loi Exponentielle Décroissante Inverse

La loi Exponentielle Décroissante Inverse a été présentée au paragraphe 4.1.4. Elle s'écrit :

$$\mathcal{EDI}[\mu](x) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\mu}{x}\right)^2 e^{-\frac{\mu}{x}}$$

C'est une loi à queue lourde qui ne possède pas son premier moment. Aussi la méthode des moments va-t-elle utiliser le moment d'ordre -1.

L'utilisation du moment d'ordre -1 donne l'estimateur du paramètre μ au sens de la méthode des moments :

$$\hat{\mu}_{\text{MM}} = \frac{1}{\hat{m}_{-1}}$$

L'utilisation du premier log-cumulant donne l'estimateur du paramètre μ au sens de la méthode des Log-Cumulants :

$$\log \hat{\mu}_{\text{MLC}} = \hat{\kappa}_1 - \Psi(1)$$

8.3 Estimation des paramètres : Lois usuelles deux paramètres

8.3.1 Loi Gamma

La loi Gamma a été présentée au paragraphe 4.2.1. Elle s'écrit :

$$\mathcal{G}[\mu, L](x) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{Lx}{\mu}\right)^{L-1} e^{-\frac{Lx}{\mu}}$$

Matrice de Fisher La matrice A s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \frac{L(\mu-2x)}{\mu^3} & \frac{x-\mu}{\mu^2} \\ \frac{x-\mu}{\mu^2} & -\Psi(1, L) + \frac{1}{L} \end{pmatrix},$$

d'où l'expression de la matrice de Fisher :

$$\begin{pmatrix} \frac{L}{\mu^2} & 0 \\ 0 & \Psi(1, L) - \frac{1}{L} \end{pmatrix}. \quad (8.4)$$

Remarquons que la matrice est diagonale et que le terme $\Psi(1, L) - \frac{1}{L}$ ne dépend pas de μ .

On en déduit les bornes de Cramer Rao :

$$\begin{aligned} \text{Min}(\text{Var}(L)) &= \frac{1}{\Psi(1, L) - \frac{1}{L}} \\ \text{Min}(\text{Var}(\mu)) &= \frac{\mu^2}{L} \end{aligned}$$

Méthode du Maximum de Vraisemblance On montre aisément que $\hat{\mu}_{\text{MMV}}$ et \hat{L}_{MMV} , estimés de μ et L obtenus par la Méthode du Maximum de Vraisemblance, s'écrivent :

$$\hat{\mu}_{\text{MMV}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n \quad (8.5)$$

$$\log \hat{L}_{\text{MMV}} - \Psi(\hat{L}_{\text{MMV}}) = \log \hat{\mu}_{\text{MMV}} - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \log x_n$$

La première relation est explicite et donne directement $\hat{\mu}_{\text{MMV}}$. Connaissant cet estimé de μ , la seconde demande un schéma numérique ou une approximation (RPM) de l'inverse de la fonction $\log x - \Psi(x)$ (voir l'annexe D, tableau D.2 pour le RPM).

Connaissant la matrice de Fisher de la loi Gamma, on en déduit directement les variances des estimateurs de μ et de L s'écrivent :

$$\begin{aligned} \text{Var} \{ \hat{\mu} \}_{\text{MMV}} &= \frac{1}{N} \frac{\mu^2}{L} \\ \text{Var} \{ \hat{L} \}_{\text{MMV}} &= \frac{1}{N} \frac{1}{\Psi(1, L) - \frac{1}{L}} \end{aligned} \quad (8.6)$$

Méthode des Moments Ses deux premiers moments s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} m_1 = \mu \\ m_2 = \mu^2 \frac{L+1}{L} \end{cases}$$

Ce système s'inverse analytiquement. Connaissant des estimés des deux premiers moments \hat{m}_1 et \hat{m}_2 , on en déduit les estimés des paramètres μ et L au sens de la méthode des moments par les relations :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{\text{MM}} &= \hat{m}_1 \\ \hat{L}_{\text{MM}} &= \frac{\hat{m}_1^2}{\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2} \end{aligned} \quad (8.7)$$

Méthode des Log-Cumulants Ses deux premiers log-cumulants s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \log(\mu) + \Psi(L) - \log(L) \\ \tilde{\kappa}_2 = \Psi(1, L) \end{cases}$$

Même si les fonctions Polygamma n'ont pas de fonctions inverses stricto sensu, elles n'en sont pas moins inversibles aisément. Connaissant un estimé $\hat{\kappa}_2$ du log-cumulant d'ordre 2, il est donc aisé d'en déduire un estimé du paramètre de forme L :

$$\Psi\left(1, \hat{L}_{\text{MLC}}\right) = \hat{\kappa}_2$$

On peut d'ailleurs utiliser un RPM pour cette inversion (voir l'annexe D, tableau D.2 pour le RPM). Connaissant un estimé $\hat{\kappa}_1$ du log-cumulant d'ordre 1, et connaissant cet estimé \hat{L}_{MLC} du paramètre de forme L , on en déduit un estimé de μ , grâce à la relation :

$$\log \hat{\mu}_{\text{MLC}} = \hat{\kappa}_1 - \left(\Psi(\hat{L}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{L}_{\text{MLC}}) \right)$$

Notons que pour que la solution ainsi trouvée soit réellement une loi Gamma, il faut utiliser un estimé du log-cumulant d'ordre 3, $\hat{\kappa}_3$, qui doit vérifier l'inégalité

$$\hat{\kappa}_3 \leq 0$$

Méthode du Coefficient de Variation Puisque le coefficient de variation de la loi Gamma s'écrit :

$$\sqrt{\frac{1}{L}}$$

et en connaissant une valeur empirique $\hat{\gamma}$ du coefficient de variation, on en déduit un estimé du facteur de forme L :

$$\hat{L}_{\text{MCV}} = \frac{1}{\hat{\gamma}^2}$$

8.3.2 Loi Gamma Inverse

La loi Gamma Inverse a été présentée au paragraphe 4.2.2. Elle s'écrit :

$$\mathcal{GI}[\mu, M](x) = \frac{1}{\Gamma(M)} \frac{1}{M\mu} \left(\frac{M\mu}{x}\right)^{M+1} e^{-\frac{M\mu}{x}}$$

Matrice de Fisher La matrice de Fisher de la loi Gamma Inverse s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \frac{M}{\mu^2} & 0 \\ 0 & \Psi(1, M) - \frac{1}{M} \end{pmatrix}.$$

Elle est donc identique, au signe près, à celle de la loi Gamma.

Méthode du Maximum de Vraisemblance On montre aisément les estimés de μ et de M obtenus par la Méthode du Maximum de Vraisemblance s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hat{\mu}_{\text{MMV}}} &= \frac{\sum_{n=1}^N \frac{1}{x_n}}{N} \\ \log \hat{M}_{\text{MMV}} - \Psi(\hat{M}_{\text{MMV}}) &= - \left(\log \hat{\mu}_{\text{MMV}} - \frac{\sum_{n=1}^N \log x_n}{N} \right) \end{aligned} \quad (8.8)$$

Méthode des Moments Ses deux premiers moments s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} m_1 &= \mu \frac{M}{M-1} \\ m_2 &= \mu^2 \frac{M^2}{(M-1)(M-2)} \end{cases}$$

Ce système s'inverse analytiquement. Connaissant des estimés des deux premiers moments \hat{m}_1 et \hat{m}_2 , on en déduit les estimés des paramètres μ et M par les relations :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{\text{MM}} &= \frac{\hat{m}_1 \hat{m}_2}{2\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2} \\ \hat{M}_{\text{MM}} &= \frac{2\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2}{\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2} \end{aligned}$$

A priori, ce système n'est pas valide si $M \leq 2$. Or il est toujours calculable et l'on montre facilement qu'il vérifie la condition $\hat{M} > 2$: la loi estimée a donc ses deux premiers moments théoriques, même si la loi "vraie" ne les a pas. Cette méthode est donc sujette à caution car elle trouve un estimateur tel que $\hat{M} \geq 2$, indépendamment de la réalité de la loi sous jacente.

Méthode des Log-Cumulants Ses deux premiers log-cumulants s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 &= \log \mu - (\Psi(M) - \log(M)) \\ \tilde{\kappa}_2 &= \Psi(1, M) \end{cases}$$

Même si les fonctions Polygamma n'ont pas de fonctions inverses stricto sensu, elles n'en sont pas moins inversibles aisément. Connaissant un estimé $\hat{\kappa}_2$ du log-cumulant d'ordre 2, il est donc aisé d'en déduire \hat{M} , un estimé du paramètre de forme M , qui doit vérifier la relation :

$$\Psi\left(1, \hat{M}_{\text{MLC}}\right) = \hat{\kappa}_2$$

On peut d'ailleurs utiliser un RPM pour cette inversion (voir l'annexe D, tableau D.2 pour le RPM). Connaissant un estimé $\hat{\kappa}_1$ du log-cumulant d'ordre 1, on en déduit $\hat{\mu}$ un estimé de μ , grâce à la relation :

$$\log \hat{\mu}_{\text{MLC}} = \hat{\kappa}_1 + \left(\Psi(\hat{M}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{M}_{\text{MLC}}) \right)$$

Notons que pour que la solution ainsi trouvée soit réellement une loi Gamma, il faut utiliser un estimé du log-cumulant d'ordre 3, $\hat{\kappa}_3$, qui doit vérifier l'inégalité

$$\hat{\kappa}_3 \geq 0$$

Méthode du Coefficient de Variation Puisque le coefficient de variation de la loi Gamma Inverse s'écrit (dans le cas où le moment d'ordre 2 existe, donc pour les cas $M > 2$) :

$$\sqrt{\frac{1}{M-2}}$$

et en connaissant une valeur empirique $\hat{\gamma}$, on en déduit un estimé du facteur de forme M :

$$\hat{M}_{\text{MCV}} = 2 + \frac{1}{\hat{\gamma}^2}$$

8.3.3 Loi Log-normale

La loi log-normale a été présentée au paragraphe 4.2.3. Elle s'écrit :

$$\mathcal{L}[\mu, \sigma](x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}} e^{\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

Matrice de Fisher La matrice A s'écrit :

$$\left(\begin{array}{cc} -\frac{1}{\sigma^2} & \frac{2(\mu - \log(x))}{\sigma^3} \\ \frac{2(\mu - \log(x))}{\sigma^3} & -\frac{\sigma^2 + 3(\log x)^2 - 6\mu \log(x) + 3\mu^2}{\sigma^4} \end{array} \right),$$

ce qui permet de déduire la matrice de Fisher :

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sigma^2} \end{array} \right).$$

Méthode du Maximum de Vraisemblance Appliquée à la loi lognormale, la Méthode du Maximum de Vraisemblance permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{\text{MMV}} &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \log(x_n) \\ \hat{\sigma}_{\text{MMV}} &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\log(x_n))^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \log(x_n) \right)^2} \end{aligned}$$

On retrouve les résultats classiques de la loi normale en échelle logarithmique.

Méthode des Moments L'expression des moments de la loi lognormale est donnée au paragraphe 4.2.3 :

$$\begin{cases} m_1 &= \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \\ m_2 &= \exp\left(2\mu + 2\sigma^2\right) \end{cases}$$

Connaissant des estimés \hat{m}_1 et \hat{m}_2 des deux premiers moments, on en déduit les estimés de μ et σ :

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{\text{MM}} &= \sqrt{\log \frac{\hat{m}_2}{\hat{m}_1^2}} \\ \hat{\mu}_{\text{MM}} &= 2 \log \hat{m}_1 - \frac{1}{2} \log \hat{m}_2\end{aligned}$$

Le calcul de la variance des estimateurs de μ et σ conduit aux relations suivantes :

$$\begin{aligned}\text{Var} \{\hat{\mu}\}_{\text{MM}} &= \frac{e^{4\sigma^2} - 8e^{2\sigma^2} + 16e^{\sigma^2} - 9}{4} \\ \text{Var} \{\hat{\sigma}\}_{\text{MM}} &= \frac{e^{4\sigma^2} + e^{2\sigma^2} + e^{\sigma^2} - 1}{4\sigma^2}\end{aligned}$$

Méthode des Log-Cumulants L'expression des deux premiers log-cumulants de la loi lognormale est donnée au paragraphe 4.2.3 :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 &= \mu \\ \tilde{\kappa}_2 &= \sigma^2 \end{cases}$$

Connaissant des estimés $\hat{\kappa}_1$ et $\hat{\kappa}_2$ des deux premiers log-cumulants, on en déduit les estimés de μ et σ :

$$\begin{cases} \hat{\mu}_{\text{MLC}} &= \hat{\kappa}_1 \\ \hat{\sigma}_{\text{MLC}} &= \sqrt{\hat{\kappa}_2} \end{cases}$$

8.4 Estimation des paramètres : Lois usuelles à trois paramètres

8.4.1 Loi \mathcal{K}

La loi \mathcal{K} a été présentée au paragraphe 4.3.1. Elle s'écrit :

$$\mathcal{K}[\mu, L, M](x) = \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{2LM}{\mu} \left(\frac{LMx}{\mu}\right)^{\frac{M+L}{2}-1} K_{M-L} \left[2 \left(\frac{LMx}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Matrice de Fisher Il n'est pas possible de calculer la matrice d'information de Fisher. En effet, la loi \mathcal{K} fait intervenir une fonction de Bessel modifiée de troisième espèce d'indice $M - L$: K_{M-L} et on ne connaît pas la forme analytique de la dérivée d'aucune fonction de Bessel par rapport à son indice.

Méthode du Maximum de Vraisemblance La conséquence de cette incapacité à déterminer la dérivée d'une fonction de Bessel en fonction de son argument fait que la Méthode du Maximum de Vraisemblance ne peut s'appliquer pour les paramètres de forme L et M . On peut néanmoins l'appliquer pour le paramètre d'échelle μ , ce qui donne³ :

$$\frac{\partial \log \mathcal{K}}{\partial \mu} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{K_{M-L+1} \left[2 \left(\frac{LMx}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \right]}{K_{M-L} \left[2 \left(\frac{LMx}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \right]} \left(\frac{LMx}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} - L \right) \quad (8.9)$$

ce qui permet d'écrire la relation implicite, à condition de connaître \hat{L} et \hat{M} , estimés de L et de M :

$$\hat{\mu}_{\text{MMV}} = \frac{\hat{L}}{\hat{M}} \left(\sum_{n=1}^N \frac{K_{\hat{M}-\hat{L}+1} \left[2 \left(\frac{\hat{L}\hat{M}x_n}{\hat{\mu}_{\text{MMV}}}\right)^{\frac{1}{2}} \right]}{K_{\hat{M}-\hat{L}} \left[2 \left(\frac{\hat{L}\hat{M}x_n}{\hat{\mu}_{\text{MMV}}}\right)^{\frac{1}{2}} \right]} x_n^{\frac{1}{2}} \right)^2$$

3. la relation 3.71 du document [35] a une coquille.

On a donc une relation implicite. En l'initialisant par exemple avec l'estimé de μ de la méthode des moments, diverses expériences montrent que cette dernière expression converge assez rapidement et est donc tout à fait exploitable dans un code numérique.

Méthode des Moments Ses trois premiers moments s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} m_1 = & \mu \\ m_2 = & \frac{L+1}{L} \frac{M+1}{M} \mu^2 \\ m_3 = & \frac{(L+1)(L+2)}{L^2} \frac{(M+1)(M+2)}{M^2} \mu^3 \end{cases}$$

Ce système peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} m_1 &= \mu \\ R_1 &= \frac{1}{m_1} \frac{m_2}{m_1} = \frac{(L+1)(M+1)}{LM} \\ R_2 &= \frac{1}{m_1} \frac{m_3}{m_2} = \frac{(L+2)(M+2)}{LM} \end{aligned} \quad (8.10)$$

Si l'on connaît des estimés des trois premiers moments \hat{m}_1 , \hat{m}_2 et \hat{m}_3 , on obtient directement les estimés $\hat{\mu}$, \hat{L} et \hat{M} en résolvant le système 8.10. Pour cela, connaissant les estimés \hat{R}_1 et \hat{R}_2 , en posant $\hat{R}'_1 = \hat{R}_1 - 1$ et $\hat{R}'_2 = \frac{\hat{R}_2 - 1}{2}$, on montre que \hat{M} et \hat{L} sont alors les solutions du polynôme du second degré en x $\Pi(x)$:

$$\Pi(x) = x^2 (R'_2 - R'_1) + x (R'_2 - 2R'_1) + 1 = 0$$

Si ces solutions sont réelles positives, il est aisé d'obtenir les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{\text{MM}} &= \hat{m}_1 \\ \hat{L}_{\text{MM}} &= \frac{2\hat{R}'_1 - \hat{R}'_2 + \sqrt{(2\hat{R}'_1 - \hat{R}'_2)^2 + 4(\hat{R}'_1 - \hat{R}'_2)}}{2(\hat{R}'_2 - \hat{R}'_1)} \\ \hat{M}_{\text{MM}} &= \frac{2\hat{R}'_1 - \hat{R}'_2 - \sqrt{(2\hat{R}'_1 - \hat{R}'_2)^2 + 4(\hat{R}'_1 - \hat{R}'_2)}}{2(\hat{R}'_2 - \hat{R}'_1)} \end{aligned}$$

Si les solutions ne sont pas positives, ni réelles, les moments empiriques ne sont pas ceux d'une loi \mathcal{K} .

Remarquons que les fonctions de Bessel modifiées de troisième espèce vérifient : $K_{L-M}(x) = K_{M-L}(x)$: il n'est pas possible de séparer \hat{L}_{MM} et \hat{M}_{MM} , qui sont les deux solutions de l'équation du second degré.

Méthode des Log-Cumulants Les trois premiers log-cumulants s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = & \log(\mu) + \Psi(L) - \log(L) + \Psi(M) - \log(M) \\ \tilde{\kappa}_2 = & \Psi(1, L) + \Psi(1, M) \\ \tilde{\kappa}_3 = & \Psi(2, L) + \Psi(2, M) \end{cases}$$

Connaissant alors les estimés $\hat{\kappa}_1$, $\hat{\kappa}_2$ et $\hat{\kappa}_3$ des trois premiers log-cumulants, on voit qu'il est possible d'obtenir des estimés \hat{L}_{MLC} et \hat{M}_{MLC} des deux paramètres de forme en résolvant numériquement le système :

$$\begin{cases} \Psi(1, \hat{L}_{\text{MLC}}) + \Psi(1, \hat{M}_{\text{MLC}}) = \hat{\kappa}_2 \\ \Psi(2, \hat{L}_{\text{MLC}}) + \Psi(2, \hat{M}_{\text{MLC}}) = \hat{\kappa}_3 \end{cases} \quad (8.11)$$

ce qui ne pose pas de problèmes majeurs eu égard à la convexité des fonctions Polygamma.

Un algorithme possible (toujours dérivé de [34], voir le paragraphe 3.2.5) consiste à réaliser les étapes suivantes :

- vérifier que l'on a $\hat{\kappa}_3 < 0$ (dans le cas contraire, on a peut être affaire à une loi K Inverse).

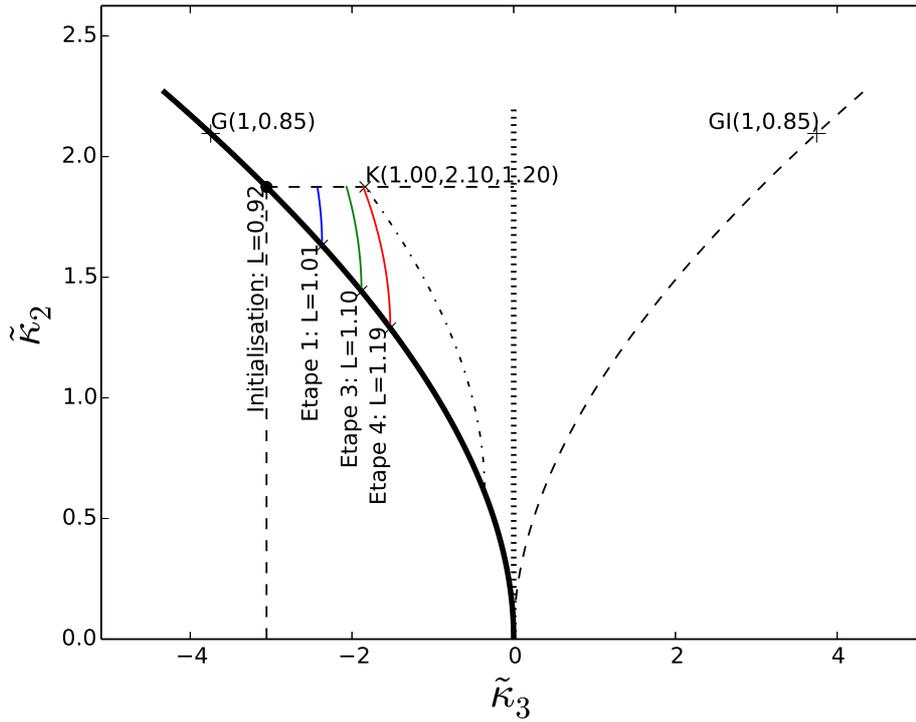


FIGURE 8.1 – Etapes de la méthode d’estimation des paramètres de la loi $\mathcal{K}[\mu = 1., L = 2.10, M = 1.20]$. L’initialisation s’effectue en recherchant la loi Gamma ayant la même valeur de log-cumulant d’ordre 2 : on trouve $L = 0.92$. Ensuite, on effectue les étapes décrites en diminuant la valeur de L de 0.09. On se rapproche ainsi de la valeur théorique d’autant mieux que le pas ΔL est petit.

- initialiser la valeur L_0 telle que :

$$\Psi(1, L_0) = \hat{\kappa}_2$$

- vérifier que l’on traite bien une loi \mathcal{K} . Pour cela on vérifie la relation :

$$\hat{\kappa}_3 < \Psi(2, L_0) < \frac{1}{2}\hat{\kappa}_3$$

(on peut utiliser un RPM pour cette inversion : voir l’annexe D, tableau D.2) Si ce n’est pas le cas, on arrête l’algorithme.

- prendre M_0 très grand (ce qui revient à considérer $\Psi(1, M_0) = 0$ et $\Psi(2, M_0) = 0$).
- choisir un pas incrémental positif pour les valeurs de L : ΔL
- à effectuer itérativement les étapes suivantes jusqu’à convergence (ou arrêt de l’algorithme sur test) :
 - calculer $\Psi(2, L_i) + \Psi(2, M_i)$ et vérifier :

$$\Psi(2, L_i) + \Psi(2, M_i) \leq \hat{\kappa}_3$$

Si ce test n’est pas vérifié, on arrête l’algorithme.

- incrémenter L_i : ce qui donne $L_{i+1} = L_i + \Delta L$ (avec un test pour que L_i ne soit pas trop grand)
- calculer M_{i+1} vérifiant $\Psi(1, M_{i+1}) = \hat{\kappa}_2 - \Psi(1, L_{i+1})$

On obtient ainsi \hat{L}_{MLC} et \hat{M}_{MLC} .

Ce schéma numérique est illustré figure 8.1.

Connaissant \hat{L}_{MLC} et \hat{M}_{MLC} , on en déduit l’estimé $\hat{\mu}$ du paramètre μ grâce à la relation suivante :

$$\log \hat{\mu}_{\text{MLC}} = \hat{\kappa}_1 - \left(\Psi(\hat{L}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{L}_{\text{MLC}}) \right) - \left(\Psi(\hat{M}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{M}_{\text{MLC}}) \right)$$

Notons que très curieusement il n'y a pas de RPM fiable pour inverser le système 8.11 (voir [40]).

8.4.2 Loi \mathcal{K} Inverse

La loi \mathcal{KI} a été présentée au paragraphe 4.3.2. Elle s'écrit :

$$\mathcal{KI}[\mu, L, M](x) = \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{2}{LM\mu} \left(\frac{LM\mu}{x}\right)^{\frac{M+L}{2}+1} K_{M-L} \left[2 \left(\frac{LM\mu}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Comme pour la loi \mathcal{K} , la méthode du maximum de vraisemblance n'est applicable que pour le paramètre μ (le lecteur saura tout à fait adapter la démarche utilisée pour la loi \mathcal{K} à son inverse).

Méthode des Moments Ses trois premiers moments s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} m_1 &= \mu \frac{L}{L-1} \frac{M}{M-1} \\ m_2 &= \mu^2 \frac{L^2}{(L-1)(L-2)} \frac{M^2}{(M-1)(M-2)} \\ m_3 &= \mu^3 \frac{L^3}{(L-1)(L-2)(L-3)} \frac{M^3}{(M-1)(M-2)(M-3)} \end{cases}$$

Ce système peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{m_1} \frac{m_2}{m_1} = \frac{(L-1)(M-1)}{(L-2)(M-2)} \\ R_2 &= \frac{1}{m_1} \frac{m_3}{m_2} = \frac{(L-1)(M-1)}{(L-3)(M-3)} \end{aligned} \quad (8.12)$$

Si l'on connaît des estimés des trois premiers moments \hat{m}_1 , \hat{m}_2 et \hat{m}_3 , on obtient directement les estimés $\hat{\mu}$, \hat{L} et \hat{M} en résolvant le système 8.12. Pour cela, connaissant les estimés \hat{R}_1 et \hat{R}_2 , \hat{M} et \hat{L} sont alors les solutions du polynôme du second degré en x suivant :

$$\Pi(x) = (R_1 - 2R_2 + R_2R_3)x^2 + (-3R_1 + 8R_2 - 5R_2R_1)x + (-6R_2 + 2R_1 + 6R_1R_2) = 0$$

Si ces solutions sont réelles positives, il est aisé d'obtenir les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{L}_{\text{MM}} &= -\frac{(-3R_1 + 8R_2 - 5R_2R_1) + \sqrt{(-3R_1 + 8R_2 - 5R_2R_1)^2 - 4(R_1 - 2R_2 + R_2R_3)(-6R_2 + 2R_1 + 6R_1R_2)}}{2(R_1 - 2R_2 + R_2R_3)} \\ \hat{M}_{\text{MM}} &= -\frac{(-3R_1 + 8R_2 - 5R_2R_1) - \sqrt{(-3R_1 + 8R_2 - 5R_2R_1)^2 - 4(R_1 - 2R_2 + R_2R_3)(-6R_2 + 2R_1 + 6R_1R_2)}}{2(R_1 - 2R_2 + R_2R_3)} \\ \hat{\mu}_{\text{MM}} &= \hat{m}_1 \frac{\hat{L}_{\text{MM}} - 1}{\hat{L}_{\text{MM}}} \frac{\hat{M}_{\text{MM}} - 1}{\hat{M}_{\text{MM}}} \end{aligned}$$

Si les solutions ne sont pas positives, ni réelles, les moments empiriques ne sont pas ceux d'une loi \mathcal{KI} .

Notons qu'il n'est pas possible de séparer \hat{L}_{MM} et \hat{M}_{MM} , qui sont les deux solutions d'une équation du second degré : ceci se déduit directement de la forme analytique de la loi \mathcal{KI} et des propriétés des fonctions de Bessel modifiées de troisième espèce : $K_{L-M}(x) = K_{M-L}(x)$.

Méthode des Log-Cumulants Les trois premiers log-cumulants de la loi \mathcal{KI} s'expriment sous la forme :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 &= \log(\mu) - (\Psi(L) - \log(L)) - (\Psi(M) - \log(M)) \\ \tilde{\kappa}_2 &= \Psi(1, L) + \Psi(1, M) \\ \tilde{\kappa}_3 &= -(\Psi(2, L) + \Psi(2, M)) \end{cases}$$

Connaissant alors les estimés $\hat{\kappa}_1$, $\hat{\kappa}_2$ et $\hat{\kappa}_3$ des trois premiers log-cumulants, on voit qu'il est possible d'obtenir des estimés \hat{L}_{MLC} et \hat{M}_{MLC} des deux paramètres de forme en résolvant numériquement le système :

$$\begin{cases} \Psi(1, \hat{L}_{\text{MLC}}) + \Psi(1, \hat{M}_{\text{MLC}}) &= \hat{\kappa}_2 \\ -\Psi(2, \hat{L}_{\text{MLC}}) - \Psi(2, \hat{M}_{\text{MLC}}) &= \hat{\kappa}_3 \end{cases}$$

ce qui ne pose pas de problèmes majeurs eu égard à la convexité des fonctions Polygamma. Un algorithme possible se déduit aisément de celui proposé pour la loi \mathcal{K} (paragraphe 8.4.1).

Connaissant \hat{L}_{MLC} et \hat{M}_{MLC} , on en déduit l'estimé $\hat{\mu}_{\text{MLC}}$ du paramètre μ grâce à la relation suivante :

$$\log \hat{\mu}_{\text{MLC}} = \hat{\kappa}_1 + \left(\Psi(\hat{L}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{L}_{\text{MLC}}) \right) + \Psi(\hat{M}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{M}_{\text{MLC}})$$

Notons que très curieusement il n'y a pas de RPM fiable pour inverser le système 8.11 (voir [40]).

8.4.3 Loi de Fisher

La loi de Fisher a été présentée au paragraphe 4.3.3. Elle s'écrit :

$$\mathcal{F}[\mu, L, M](x) = \frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{\left(\frac{Lx}{M\mu}\right)^{L-1}}{\left(1 + \frac{Lx}{M\mu}\right)^{L+M}}$$

Matrice de Fisher Le calcul de la matrice de Fisher ne pose aucun problème avec un logiciel de calcul formel comme Maple©. Cependant les expressions analytiques sont très lourdes. Il faut noter que cette matrice n'est pas diagonale.

Méthode des Moments Ses trois premiers moments s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} m_1 = & \mu \frac{M}{M-1} \\ m_2 = & \frac{L+1}{L} \frac{M^2}{(M-1)(M-2)} \mu^2 \\ m_3 = & \frac{(L+1)(L+2)}{L^2} \frac{M^3}{(M-1)(M-2)(M-3)} \mu^3 \end{cases}$$

Ce système peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} m_1 &= \mu \frac{M}{M-1} \\ R_1 &= \frac{1}{m_1} \frac{m_2}{m_1} = \frac{(L+1)(M-1)}{L(M-2)} \\ R_2 &= \frac{1}{m_1} \frac{m_3}{m_2} = \frac{(L+2)(M-1)}{L(M-3)} \end{aligned} \quad (8.13)$$

Si l'on connaît des estimés des trois premiers moments \hat{m}_1 , \hat{m}_2 et \hat{m}_3 , on obtient directement l'expression analytique des estimés $\hat{\mu}_{\text{MM}}$, \hat{L}_{MM} et \hat{M}_{MM} en résolvant ce système. Connaissant les estimés \hat{R}_1 et \hat{R}_2 , on obtient au final (avec les conditions d'usage sur les dénominateurs) :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{\text{MM}} &= \hat{m}_1 \frac{2(\hat{R}_1 - \hat{R}_2)}{4\hat{R}_1 - 3\hat{R}_2 - 1} \\ \hat{L}_{\text{MM}} &= \frac{2(\hat{R}_1 - \hat{R}_2)}{-\hat{R}_1 + 2\hat{R}_2 - \hat{R}_1\hat{R}_2} \\ \hat{M}_{\text{MM}} &= \frac{4\hat{R}_1 - 3\hat{R}_2 - 1}{2\hat{R}_1 - \hat{R}_2 - 1} \end{aligned} \quad (8.14)$$

ou de manière équivalente, mais plus explicite :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{\text{MM}} &= \frac{2\hat{m}_1(\hat{m}_2^2 - \hat{m}_1\hat{m}_3)}{4\hat{m}_2^2 - 3\hat{m}_1\hat{m}_3 - \hat{m}_1^2\hat{m}_2} \\ \hat{L}_{\text{MM}} &= \frac{2\hat{m}_1(\hat{m}_2^2 - \hat{m}_1\hat{m}_3)}{2\hat{m}_3\hat{m}_1^2 - \hat{m}_2\hat{m}_3 - \hat{m}_1\hat{m}_2^2} \\ \hat{M}_{\text{MM}} &= \frac{3\hat{m}_3\hat{m}_1 - 4\hat{m}_2^2 + \hat{m}_1^2\hat{m}_2}{\hat{m}_1^2\hat{m}_2 + \hat{m}_1\hat{m}_3 - 2\hat{m}_2^2} \end{aligned}$$

On peut toujours trouver (au moins formellement) une solution (L, M) dès lors que les dénominateurs du système 8.13 sont non nuls. Si les valeurs obtenues \hat{L}_{MM} ou \hat{M}_{MM} ne sont pas positives, c'est que les moments ne peuvent correspondre à une loi de Fisher.

Les cas d'annulation des dénominateurs correspondent à une des lois Gamma (normale ou inverse), composantes de la corrélation de Mellin générant la loi de Fisher, dégénérée en loi homothétique. On obtient en effet les cas suivants :

- $2R_1 - R_2 - 1 = 0$: il est facile de montrer que c'est le cas limite où $M \rightarrow \infty$, *i.e.* le cas où la loi de Fisher est une loi Gamma,
- $-R_1 + 2R_2 - R_1R_2 = 0$: il est facile de montrer que c'est le cas limite où $L \rightarrow \infty$, *i.e.* le cas où la loi de Fisher est une loi Gamma inverse,
- le cas où ces deux relations sont vérifiées, ce qui donne :

$$R_1 = R_2 = 1$$

ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} m_2 &= m_1^2 \\ m_3 &= m_1^3 \end{aligned}$$

On reconnaît les relations définissant les moments 2 et 3 de la distribution homothétique : c'est le cas limite où la loi de Fisher est une loi homothétique.

La limitation intrinsèque de cette méthode repose dans l'existence nécessaire du moment d'ordre 3, ce qui conduit à restreindre l'espace des distributions de Fisher ainsi accessibles à $\{L \in \mathbb{R}^+, M \in]3, +\infty[\}$. Expérimentalement, sans connaissance a priori sur la valeur de M , la méthode des moments donnera des résultats fallacieux (voir l'exemple du paragraphe 10.3).

Méthode des Log-Cumulants Les trois premiers log-cumulants de la loi de Fisher s'expriment sous la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_1 &= \log(\mu) + (\Psi(L) - \log(L)) - (\Psi(M) - \log(M)) \\ \tilde{\kappa}_2 &= \Psi(1, L) + \Psi(1, M) \\ \tilde{\kappa}_3 &= \Psi(2, L) - \Psi(2, M) \end{aligned}$$

Connaissant des estimés $\hat{\kappa}_1$, $\hat{\kappa}_2$ et $\hat{\kappa}_3$ des trois premiers log-cumulants, on commence par déduire des estimés \hat{L}_{MLC} et \hat{M}_{MLC} en résolvant numériquement le système :

$$\begin{aligned} \hat{\kappa}_2 &= \Psi(1, \hat{L}_{MLC}) + \Psi(1, \hat{M}_{MLC}) \\ \hat{\kappa}_3 &= \Psi(2, \hat{L}_{MLC}) - \Psi(2, \hat{M}_{MLC}) \end{aligned} \quad (8.15)$$

ce qui ne pose pas de problèmes majeurs eu égard à la convexité des fonctions Polygamma.

Un algorithme possible ([34]) consiste à réaliser les étapes suivantes (dont la description se limite ici au cas $\hat{\kappa}_3 < 0$: le cas $\hat{\kappa}_3 > 0$ est tout aussi facile à traiter) :

- vérifier que l'on traite bien une loi de Fisher. Pour cela on calcule la valeur L_G telle que :

$$\Psi(1, L_G) = \hat{\kappa}_2$$

(on peut utiliser un RPM pour cette inversion : voir l'annexe D, tableau D.2) et on vérifie l'inégalité :

$$\Psi(2, L_G) < \hat{\kappa}_3$$

Si ce n'est pas le cas, on arrête l'algorithme (et on peut d'ailleurs supposer que l'on a affaire à une loi Beta).

- initialiser les valeurs L_0 et M_0 telles que :

$$\Psi(1, L_0) = \Psi(1, M_0) = \frac{1}{2} \hat{\kappa}_2$$

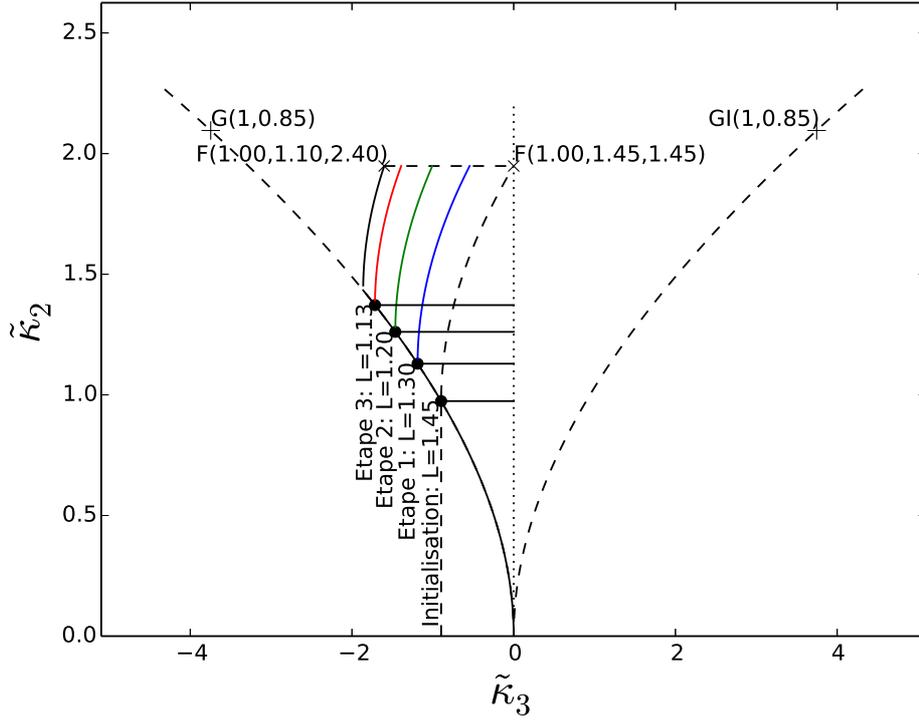


FIGURE 8.2 – Etapes de la méthode d’estimation des paramètres de la loi $\mathcal{F}[\mu = 1., L = 1.10, M = 1.40]$. L’initialisation s’effectue en recherchant la loi Gamma ayant la moitié de la valeur du log-cumulant d’ordre 2 : on trouve $L = 1.45$. Ensuite, on effectue les étapes décrites en diminuant la valeur de L . On se rapproche ainsi de la valeur théorique d’autant mieux que le pas ΔL est petit.

- à choisir un pas incrémental positif pour les valeurs de L : ΔL
- à effectuer itérativement les étapes suivantes jusqu’à convergence (ou arrêt de l’algorithme sur test) :
 - calculer $\Psi(2, L_i) - \Psi(2, M_i)$ et vérifier :

$$\Psi(2, L_i) - \Psi(2, M_i) \geq \hat{\kappa}_3$$

Si ce test n’est pas vérifié, on arrête l’algorithme.

- incrémenter L_i : ce qui donne $L_{i+1} = L_i - \Delta L$ (avec un test pour que L_i ne soit pas trop grand)
- calculer M_{i+1} vérifiant $\Psi(1, M_{i+1}) = \hat{\kappa}_2 - \Psi(1, L_{i+1})$

On obtient ainsi \hat{L}_{MLC} et \hat{M}_{MLC} .

Ce schéma numérique est illustré figure 8.2.

Connaissant \hat{L}_{MLC} et \hat{M}_{MLC} , on en déduit l’estimé $\hat{\mu}_{\text{MLC}}$ du paramètre μ grâce à la relation suivante :

$$\log \hat{\mu}_{\text{MLC}} = \hat{\kappa}_1 - \left(\Psi(\hat{L}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{L}_{\text{MLC}}) \right) + \Psi(\hat{M}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{M}_{\text{MLC}}) \quad (8.16)$$

Notons que l’on peut utiliser un RPM pour inverser le système 8.15 (voir l’annexe D.5.1).

Méthode du Maximum de Vraisemblance La forme analytique assez simple de la loi de Fisher permet d’établir facilement le système d’équations vérifié par les estimés au sens du maximum de vraisemblance des paramètres μ , L et M et notés ici $\hat{\mu}$, \hat{L} et \hat{M} [35] :

$$\sum_{n=1}^N \frac{(x_n - \hat{\mu})}{(\hat{L}x_n + \hat{M}\hat{\mu})} = 0 \quad (8.17)$$

$$\sum_{n=1}^N \left(\Psi(\hat{L} + \hat{M}) - \Psi(\hat{L}) + \log \left(\frac{\hat{L}x_n}{\hat{L}x_n + \hat{M}\hat{\mu}} \right) \right) = 0 \quad (8.18)$$

$$\sum_{n=1}^N \left(\Psi(\hat{L} + \hat{M}) - \Psi(\hat{M}) + \log \left(\frac{\hat{M}\hat{\mu}}{\hat{L}x_n + \hat{M}\hat{\mu}} \right) \right) = 0 \quad (8.19)$$

Aucune relation explicite donnant directement ces estimateurs n'existe et seules des méthodes itératives permettent de les calculer. Cependant, si on connaît les estimés \hat{L} et \hat{M} , on peut établir deux relations intéressantes vérifiées par $\hat{\mu}_{\text{MMV}}$:

– à partir de la relation 8.17, on obtient une relation implicite :

$$\hat{\mu}_{\text{MMV}} = \frac{\sum_{n=1}^N \frac{x_n}{\hat{M}\hat{\mu}_{\text{MMV}} + \hat{L}x_n}}{\sum_{n=1}^N \frac{1}{\hat{M}\hat{\mu}_{\text{MMV}} + \hat{L}x_n}}$$

– en reportant l'expression 8.17 dans les relations 8.18 et 8.19, on obtient aisément la relation :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \log x_n = \log \hat{\mu}_{\text{MMV}} + \left(\Psi(\hat{L}) - \log \hat{L} \right) - \left(\Psi(\hat{M}) - \log \hat{M} \right)$$

et on reconnaît formellement la relation 8.16 donnant l'estimé du paramètre μ pour la méthode des log-cumulants une fois établis les estimés de L et M .

8.4.4 Loi Beta

La loi Beta a été présentée au paragraphe 4.3.4. Elle s'écrit :

$$\mathcal{B}[\mu, L, M](x) = \frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \left(\frac{Lx}{M\mu} \right)^{L-1} \left(1 - \frac{Lx}{M\mu} \right)^{M-L-1} \quad x \in \left[0; \frac{M\mu}{L} \right] \quad M > L$$

et l'estimation de ses paramètres a été déjà abordée au paragraphe 3.2.5.

Méthode des Moments Ses trois premiers moments s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} m_1 &= \mu \\ m_2 &= \mu^2 \frac{L+1}{L} \frac{M}{M+1} \\ m_3 &= \mu^3 \frac{(L+1)(L+2)}{L^2} \frac{M^2}{(M+1)(M+2)} \end{cases}$$

De manière similaire à la loi \mathcal{K} , ce système peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} m_1 &= \mu \\ R_1 &= \frac{1}{m_1} \frac{m_2}{m_1} = \frac{(L+1)M}{L(M+1)} \\ R_2 &= \frac{1}{m_1} \frac{m_3}{m_2} = \frac{(L+2)M}{L(M+2)} \end{aligned} \quad (8.20)$$

Ce système se résout simplement et permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{\text{MM}} &= m_1 \\ \hat{L}_{\text{MM}} &= \frac{2(R_1 - R_2)}{-R_1 + 2R_2 - R_1R_2} \\ \hat{M}_{\text{MM}} &= \frac{2(R_2 - R_1)}{2R_1 - R_2 - 1} \end{aligned} \quad (8.21)$$

Contrairement au système de la loi \mathcal{K} , on peut toujours trouver (au moins formellement) une solution (L, M) dès lors que les dénominateurs du système 8.21 sont non nuls (la condition sur le déterminant pour la loi \mathcal{K} était tout autrement restrictive).

Méthode des Log-Cumulants Les trois premiers log-cumulants de la loi Beta s'expriment sous la forme :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_1 &= \log(\mu) + (\Psi(L) - \log(L)) - (\Psi(M) - \log(M)) \\ \tilde{\kappa}_2 &= \Psi(1, L) - \Psi(1, M) \\ \tilde{\kappa}_3 &= \Psi(2, L) - \Psi(2, M)\end{aligned}$$

Connaissant des estimés $\hat{\kappa}_1$, $\hat{\kappa}_2$ et $\hat{\kappa}_3$ des trois premiers log-cumulants, on commence par déduire des estimés \hat{L}_{MLC} et \hat{M}_{MLC} en résolvant numériquement le système :

$$\begin{aligned}\hat{\kappa}_2 &= \Psi(1, \hat{L}_{\text{MLC}}) - \Psi(1, \hat{M}_{\text{MLC}}) \\ \hat{\kappa}_3 &= \Psi(2, \hat{L}_{\text{MLC}}) - \Psi(2, \hat{M}_{\text{MLC}})\end{aligned}\tag{8.22}$$

ce qui ne pose pas de problème majeur eu égard à la monotonie des fonctions Polygamma. Par exemple, on peut appliquer la méthode décrite au paragraphe 3.2.5 (figure 3.8) et qui se déroule selon le schéma suivant :

- connaissant la valeur du log-cumulant $\tilde{\kappa}_2$, initialiser la valeur L_0 telle que :

$$\Psi(1, L_0) = \tilde{\kappa}_2$$

(on peut utiliser un RPM pour cette inversion : voir l'annexe D, tableau D.2)

- vérifier que l'on traite bien une loi Beta. Pour cela on calcule la valeur L_0 doit vérifier l'inégalité :

$$\Psi(2, L_0) > \hat{\kappa}_3$$

(on peut utiliser un RPM pour cette inversion : voir l'annexe D, tableau D.2). Si ce n'est pas le cas, on arrête l'algorithme (et on peut d'ailleurs supposer que l'on a affaire à une loi de Fisher ou à une loi \mathcal{K}).

- prendre M_0 très grand (ce qui revient à considérer $\Psi(1, M_0) = 0$ et $\Psi(2, M_0) = 0$).
- à choisir un pas incrémental positif pour les valeurs de $L : \Delta L$
- à effectuer itérativement les étapes suivantes jusqu'à convergence (ou arrêt de l'algorithme sur test) :
 - calculer $\Psi(2, L_i) - \Psi(2, M_i)$ et vérifier :

$$\Psi(2, L_i) - \Psi(2, M_i) \geq \hat{\kappa}_3$$

Si ce test n'est pas vérifié, on arrête l'algorithme.

- incrémenter L_i : ce qui donne $L_{i+1} = L_i + \Delta L$ (avec un test pour que L_i ne soit pas trop petit)
- calculer M_{i+1} vérifiant $\Psi(1, M_{i+1}) = \Psi(1, L_{i+1}) - \tilde{\kappa}_2$

Connaissant \hat{L}_{MLC} et \hat{M}_{MLC} , on en déduit l'estimé $\hat{\mu}_{\text{MLC}}$ du paramètre μ grâce à la relation suivante :

$$\log \hat{\mu}_{\text{MLC}} = \hat{\kappa}_1 - \left(\Psi(\hat{L}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{L}_{\text{MLC}}) \right) + \Psi(\hat{M}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{M}_{\text{MLC}})\tag{8.23}$$

Notons que l'on peut utiliser un RPM pour inverser le système 8.22 (voir l'annexe D.5.2).

Méthode du Maximum de Vraisemblance La forme analytique assez simple de la loi Beta permet d'établir facilement le système d'équations vérifié par les estimés au sens du maximum de vraisemblance des paramètres μ , L et M et notés ici $\hat{\mu}$, \hat{L} et \hat{M} [35] :

$$\sum_{n=1}^N \frac{((\hat{M} - 1)x_n - \hat{M}\hat{\mu})}{(\hat{M}\hat{\mu} - \hat{L}x_n)} = 0\tag{8.24}$$

$$\sum_{n=1}^N \left(\Psi(\hat{M} - \hat{L}) + \Psi(\hat{L}) - \log \left(\frac{\hat{L}x_n}{\hat{M}\hat{\mu} - \hat{L}x_n} \right) \right) = 0 \quad (8.25)$$

$$\sum_{n=1}^N \left(\Psi(\hat{M} - \hat{L}) + \Psi(\hat{M}) - \log \left(\frac{\hat{M}\hat{\mu}}{\hat{M}\hat{\mu} - \hat{L}x_n} \right) \right) = 0 \quad (8.26)$$

Aucune relation explicite donnant directement ces estimateurs n'existe et seules des méthodes itératives permettent de les calculer. Cependant, si on connaît les estimés \hat{L} et \hat{M} , on peut établir deux relations intéressantes vérifiées par $\hat{\mu}_{\text{MMV}}$:

– à partir de la relation 8.24, on obtient une relation implicite :

$$\hat{\mu}_{\text{MMV}} = \frac{\sum_{n=1}^N \frac{(\hat{M} - 1)x_n}{\hat{M}\hat{\mu}_{\text{MMV}} - \hat{L}x_n}}{\sum_{n=1}^N \frac{\hat{M}}{\hat{M}\hat{\mu}_{\text{MMV}} - \hat{L}x_n}}$$

– en reportant l'expression 8.24 dans les relations 8.25 et 8.26, on obtient aisément la relation :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \log x_n = \log \hat{\mu}_{\text{MMV}} + \left(\Psi(\hat{L}) - \log \hat{L} \right) - \left(\Psi(\hat{M}) - \log \hat{M} \right)$$

et on reconnaît formellement la relation 8.23 donnant l'estimé du paramètre μ pour la méthode des log-cumulants une fois établis les estimés de L et M .

8.4.5 Loi Beta Inverse

$$\mathcal{BI}[\mu, L, M] = \frac{M}{L\mu} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \frac{\left(\frac{Mx}{L\mu} - 1 \right)^{M-L-1}}{\left(\frac{Mx}{L\mu} \right)^M} \quad x \in \left[\frac{L\mu}{M}; \infty \right[\quad M > L$$

Méthode des Moments Ses trois premiers moments s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} m_1 = \mu \frac{L}{L-1} \frac{M-1}{M} \\ m_2 = \mu^2 \frac{(L-1)(L-2)}{L^2} \frac{(M-1)(M-2)}{M^2} \\ m_3 = \mu^3 \frac{L^3}{(L-1)(L-2)(L-3)} \frac{(M-1)(M-2)(M-3)}{M^3} \end{cases}$$

De manière similaire à la loi Beta, ce système peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} m_1 &= \mu \frac{L}{L-1} \frac{M-1}{M} \\ R_1 &= \frac{1}{m_1} \frac{m_2}{m_1} = \frac{(L-1)(M-2)}{(L-2)(M-1)} \\ R_2 &= \frac{1}{m_1} \frac{m_3}{m_2} = \frac{(L-1)(M-3)}{(L-3)(M-1)} \end{aligned} \quad (8.27)$$

Ce système se résout simplement et permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \hat{L}_{\text{MM}} &= \frac{1 + 3R_2 - 4R_1}{1 + R_2 - 2R_1} \\ \hat{M}_{\text{MM}} &= \frac{3R_1 - 4R_2 + R_2R_1}{-2R_2 + R_2R_1 + R_1} \end{aligned} \quad (8.28)$$

$\hat{\mu}_{\text{MM}}$ s'écrivant :

$$\hat{\mu}_{\text{MM}} = m_1 \frac{\hat{L}_{\text{MM}} - 1}{\hat{L}_{\text{MM}}} \frac{\hat{M}_{\text{MM}}}{\hat{M}_{\text{MM}} - 1}$$

Contrairement au système de la loi \mathcal{K} , on peut toujours trouver (au moins formellement) une solution (L, M) dès lors que les dénominateurs du système 8.28 sont non nuls (la condition sur le déterminant pour la loi \mathcal{K} était tout autrement restrictive).

Méthode des Log-Cumulants Les trois premiers log-cumulants de la loi Beta Inverse s'expriment sous la forme :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_1 &= \log(\mu) - (\Psi(L) - \log(L)) + (\Psi(M) - \log(M)) \\ \tilde{\kappa}_2 &= \Psi(1, L) - \Psi(1, M) \\ \tilde{\kappa}_3 &= -\Psi(2, L) + \Psi(2, M)\end{aligned}$$

Connaissant des estimés $\hat{\kappa}_1$, $\hat{\kappa}_2$ et $\hat{\kappa}_3$ des trois premiers log-cumulants, on commence par déduire des estimés \hat{L}_{MLC} et \hat{M}_{MLC} en résolvant numériquement le système :

$$\begin{aligned}\hat{\kappa}_2 &= \Psi(1, \hat{L}_{\text{MLC}}) - \Psi(1, \hat{M}_{\text{MLC}}) \\ \hat{\kappa}_3 &= -\Psi(2, \hat{L}_{\text{MLC}}) + \Psi(2, \hat{M}_{\text{MLC}})\end{aligned}\tag{8.29}$$

ce qui peut se faire aisément en adaptant la méthode décrite pour la loi Beta.

Connaissant \hat{L}_{MLC} et \hat{M}_{MLC} , on en déduit l'estimé $\hat{\mu}_{\text{MLC}}$ du paramètre μ grâce à la relation suivante :

$$\log \hat{\mu}_{\text{MLC}} = \hat{\kappa}_1 + \left(\Psi(\hat{L}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{L}_{\text{MLC}}) \right) - \left(\Psi(\hat{M}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{M}_{\text{MLC}}) \right)$$

Notons que l'on peut utiliser un RPM pour inverser le système 8.29 (en adaptant celui de la loi Beta, voir l'annexe D.5.2).

8.5 Estimation des paramètres : Lois généralisées

8.5.1 Loi de Weibull $\mathcal{W}[\mu, \eta]$

La loi de Weibull a été présentée au paragraphe 5.1.1. Elle s'écrit :

$$\mathcal{W}[\mu, \eta](x) = \frac{|\eta|}{\mu} \left(\frac{x}{\mu} \right)^{\eta-1} e^{-\left(\frac{x}{\mu}\right)^\eta}$$

Matrice de Fisher La matrice de Fisher s'écrit :

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{\eta^2}{\mu^2} & -\frac{\Psi(1)+1}{\mu} \\ -\frac{\Psi(1)+1}{\mu} & \frac{1+2\Psi(1)+\Psi(1)^2+\Psi(1,1)}{\eta^2} \end{array} \right)\tag{8.30}$$

Notons que ce calcul s'effectue sans difficultés majeures si on se place dans le contexte des modèles mixtes (voir paragraphe 2.4.7).

Méthode des Moments Ses deux premiers moments s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} m_1 &= \mu \Gamma\left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \\ m_2 &= \mu^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\eta}\right) \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solutions analytiques : il faut utiliser un schéma numérique faisant intervenir ces deux relations. Si l'on connaît des estimés des deux premiers moments \hat{m}_1 et \hat{m}_2 , on peut écrire la relation vérifiée par un estimé du paramètre de généralisation η :

$$\frac{\Gamma(1 + \frac{2}{\hat{\eta}_{MM}})}{\left(\Gamma(1 + \frac{1}{\hat{\eta}_{MM}})\right)^2} = \frac{\hat{m}_2}{(\hat{m}_1)^2}$$

solvable numériquement eu égard à la monotonie de la fonction Gamma. Connaissant ainsi $\hat{\eta}_{MM}$, un estimé du paramètre μ s'obtient par la relation :

$$\hat{\mu}_{MM} = \frac{\hat{m}_1}{\Gamma(1 + \frac{1}{\hat{\eta}_{MM}})}$$

L'écueil de la méthode réside dans l'existence supposée des deux premiers moments. De ce fait, les solutions trouvées vérifient toujours :

$$\frac{2}{\hat{\eta}_{MM}} > -1$$

Bien évidemment, d'autres moments (fractionnaires et/ou négatifs) pourraient être utilisés pour traiter ces cas spécifiques.

Méthode des Log-Cumulants Ses deux premiers log-cumulants s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 &= \log \mu + \frac{\Psi(1)}{\eta} \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{1}{\eta^2} \Psi(1, 1) \end{cases}$$

Connaissant une estimation du log-cumulant d'ordre 2 : $\hat{\tilde{\kappa}}_2$, on en déduit explicitement une relation pour l'estimateur du paramètre η :

$$\hat{\eta}_{MLC} = \sqrt{\frac{\Psi(1, 1)}{\hat{\tilde{\kappa}}_2}}$$

ainsi qu'une relation pour l'estimateur du paramètre μ :

$$\log \hat{\mu}_{MLC} = \hat{\tilde{\kappa}}_1 - \Psi(1) \sqrt{\frac{\hat{\tilde{\kappa}}_2}{\Psi(1, 1)}}$$

Il faut noter que ces deux relations sont utilisées depuis très longtemps pour estimer les paramètres de la loi de Weibull : c'est Menon ([30]) qui, en 1963, a découvert ces relations sans utiliser le cadre formel des log-statistiques.

Une autre relation existe pour l'estimateur du paramètre η :

$$\hat{\eta}'_{MLC} = -\sqrt{\frac{\Psi(1, 1)}{\hat{\tilde{\kappa}}_2}}$$

associé à l'estimateur du paramètre μ :

$$\log \hat{\mu}'_{MLC} = \hat{\tilde{\kappa}}_1 + \Psi(1) \sqrt{\frac{\hat{\tilde{\kappa}}_2}{\Psi(1, 1)}}$$

Le choix est levé à l'aide du troisième log-cumulant (qui détermine en pratique dans quel quadrant du diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ se trouve la loi étudiée) puisque l'on doit avoir :

$$\begin{cases} \eta > 0 & \text{si } \hat{\tilde{\kappa}}_3 < 0 \\ \eta < 0 & \text{si } \hat{\tilde{\kappa}}_3 > 0 \end{cases}$$

8.5.2 Loi Gaussienne Généralisée $\mathcal{NG}^+[\sigma, \eta]$

La loi Gaussienne Généralisée a été présentée au paragraphe 5.1.2. Elle s'écrit :

$$\mathcal{NG}^+[\sigma, \eta](x) = \frac{\eta}{\sigma \Gamma\left(\frac{1}{\eta}\right)} e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\eta} \quad x \in \mathbb{R}^+$$

Matrice de Fisher La matrice de Fisher s'exprime :

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{\eta}{\mu^2} & -\frac{1 + \eta + \Psi\left(\frac{1}{\eta}\right)}{\mu \eta} \\ -\frac{1 + \eta + \Psi\left(\frac{1}{\eta}\right)}{\mu \eta} & \frac{1}{\eta^4} \left(\eta^2 + \Psi\left(1, \frac{1}{\eta}\right) (1 + \eta) + \Psi\left(\frac{1}{\eta}\right) \left(2(\eta + \eta^2) + \eta \Psi\left(\frac{1}{\eta}\right)\right) \right) \end{array} \right).$$

Méthode des Moments Ses deux premiers moments s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} m_1 &= \frac{\sigma}{\Gamma\left(\frac{1}{\eta}\right)} \Gamma\left(\frac{2}{\eta}\right) \\ m_2 &= \frac{\sigma^2}{\Gamma\left(\frac{1}{\eta}\right)} \Gamma\left(\frac{3}{\eta}\right) \end{cases}$$

Connaissant des estimés des deux premiers moments \hat{m}_1 et \hat{m}_2 , on en déduit un estimé du paramètre η grâce à la relation implicite dans laquelle on reconnaît le carré du coefficient de variation :

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\hat{\eta}_{MM}}\right) \Gamma\left(\frac{3}{\hat{\eta}_{MM}}\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{2}{\hat{\eta}_{MM}}\right)\right)^2} = \frac{\hat{m}_2}{\hat{m}_1^2}$$

Connaissant $\hat{\eta}_{MM}$, σ_{MM} se déduit alors de l'expression de \hat{m}_1 :

$$\sigma_{MM} = \hat{m}_1 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\hat{\eta}_{MM}}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{\hat{\eta}_{MM}}\right)}$$

Méthode des Log-Cumulants Ses deux premiers log-cumulants s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 &= \log \sigma + \frac{\Psi\left(\frac{1}{\eta}\right)}{\eta} \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{\Psi\left(1, \frac{1}{\eta}\right)}{\eta^2} \end{cases}$$

Connaissant une estimation du log-cumulant d'ordre 2 : $\hat{\kappa}_2$, un schéma numérique permet de retrouver un estimateur du paramètre η , qui doit vérifier la relation :

$$\frac{\Psi\left(1, \frac{1}{\hat{\eta}_{MLC}}\right)}{\hat{\eta}_{MLC}^2} = \hat{\kappa}_2$$

Notons que ce système numérique est très simple puisque la fonction

$$\frac{\Psi\left(1, \frac{1}{\eta}\right)}{\eta^2}$$

est strictement monotone.

L'estimateur du paramètre σ se déduit de la relation suivante :

$$\log \hat{\sigma}_{MLC} = \hat{\kappa}_1 - \frac{\Psi\left(\frac{1}{\hat{\eta}_{MLC}}\right)}{\hat{\eta}_{MLC}}$$

8.5.3 Loi Gamma Généralisée

La loi \mathcal{GG} a été présentée au paragraphe 5.2.1. Elle s'écrit :

$$\mathcal{GG}[\mu, L, \eta](x) = \frac{|\eta|}{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{\Gamma(L)} \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu} \right)^{\eta L - 1} e^{-\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu} \right)^\eta}$$

Matrice de Fisher Le calcul de la matrice de Fisher ne présente aucune difficulté et s'écrit :

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{L \eta^2}{\mu^2} & 0 & -\frac{\Psi(L) + \frac{1}{L} - \log L}{\frac{1}{L\eta}} \\ 0 & \Psi(1, L) - \frac{1}{L} & \frac{1}{L\eta} \\ -\frac{\Psi(L) + \frac{1}{L} - \log L}{\mu} & \frac{1}{L\eta} & \frac{1 + 2(L-1) \log L + 2\Psi(L)(1 - 2L \log L) + L\Psi(L)^2 + L\Psi(1, L)}{\eta^2} \end{array} \right) \quad (8.31)$$

Méthode des Moments Ses trois premiers moments s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} m_1 = \mu \frac{\Gamma(L + \frac{1}{\eta})}{L^{\frac{1}{\eta}} \Gamma(L)} \\ m_2 = \mu^2 \frac{\Gamma(L + \frac{2}{\eta})}{L^{\frac{2}{\eta}} \Gamma(L)} \\ m_3 = \mu^3 \frac{\Gamma(L + \frac{3}{\eta})}{L^{\frac{3}{\eta}} \Gamma(L)} \end{cases}$$

Ce système ne semble pas avoir de solutions analytiques et ne peut se résoudre que par un schéma numérique faisant intervenir ces trois relations.

Méthode des Log-Cumulants C'est uniquement dans ce cadre que l'on peut facilement estimer les paramètres de la loi Gamma Généralisée. En effet, les trois premiers log-cumulants s'écrivent :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \log(\mu) + \frac{\Psi(L) - \log(L)}{\eta} \\ \tilde{\kappa}_2 = \frac{\Psi(1, L)}{\eta^2} \\ \tilde{\kappa}_3 = \frac{\Psi(2, L)}{\eta^3} \end{cases}$$

Connaissant une estimation des log-cumulants d'ordre 2 et 3 : $\hat{\kappa}_2$ et $\hat{\kappa}_3$, un estimateur de L vérifie alors la relation :

$$\frac{\hat{\kappa}_3^2}{\hat{\kappa}_2^3} = \frac{\Psi(2, \hat{L}_{\text{MLC}})^2}{\Psi(1, \hat{L}_{\text{MLC}})^3} \quad (8.32)$$

et on peut par un schéma numérique très simple en déduire \hat{L}_{MLC} (on peut aussi utiliser un RPM, voir annexe D, relation D.4).

Connaissant \hat{L}_{MLC} , on en déduit explicitement un estimateur du paramètre η :

$$|\hat{\eta}_{\text{MLC}}| = \sqrt{\frac{\Psi(1, \hat{L}_{\text{MLC}})}{\hat{\kappa}_2}} \quad (8.33)$$

son signe étant donné par le signe de $\hat{\kappa}_3$:

$$\begin{cases} \hat{\eta}_{\text{MLC}} > 0 & \text{si } \hat{\kappa}_3 < 0 \\ \hat{\eta}_{\text{MLC}} < 0 & \text{si } \hat{\kappa}_3 > 0 \end{cases}$$

Enfin le paramètre $\hat{\mu}_{\text{MLC}}$ se déduit de la relation suivante :

$$\log \hat{\mu}_{\text{MLC}} = \hat{\kappa}_1 - \frac{\Psi(\hat{L}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{L}_{\text{MLC}})}{\hat{\eta}_{\text{MLC}}}$$

8.5.4 Loi \mathcal{KG} généralisée $\mathcal{KG} [\mu, L, M, \eta]$

La loi \mathcal{KG} a été présentée au paragraphe 4.3.1. Elle s'écrit :

$$\mathcal{KG} [\mu, L, \eta] (x) = \frac{2|\eta|}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{L^{\frac{1}{\eta}} M^{\frac{1}{\eta}}}{\mu} \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} M^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu} \right)^{\eta \frac{M+L}{2} - 1} K_{M-L} \left[2 \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} M^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu} \right)^{\frac{\eta}{2}} \right]$$

Méthode des Moments Ses quatre premiers moments –s'ils existent– s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} m_1 &= \mu \frac{\Gamma(L+\frac{1}{\eta})}{L^{\frac{1}{\eta}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+\frac{1}{\eta})}{M^{\frac{1}{\eta}} \Gamma(M)} \\ m_2 &= \mu^2 \frac{\Gamma(L+\frac{2}{\eta})}{L^{\frac{2}{\eta}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+\frac{2}{\eta})}{M^{\frac{2}{\eta}} \Gamma(M)} \\ m_3 &= \mu^3 \frac{\Gamma(L+\frac{3}{\eta})}{L^{\frac{3}{\eta}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+\frac{3}{\eta})}{M^{\frac{3}{\eta}} \Gamma(M)} \\ m_4 &= \mu^4 \frac{\Gamma(L+\frac{4}{\eta})}{L^{\frac{4}{\eta}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+\frac{4}{\eta})}{M^{\frac{4}{\eta}} \Gamma(M)} \end{cases}$$

Ce système ne semble pas avoir de solutions analytiques et une méthode numérique semble possible, mais peut être hasardeuse.

Méthode des Log-Cumulants Ses quatre premiers log-cumulants s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 &= \log \mu + \frac{1}{\eta} (\Psi(L) - \log L + \Psi(M) - \log M) \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{1}{\eta^2} (\Psi(1, L) + \Psi(1, M)) \\ \tilde{\kappa}_3 &= \frac{1}{\eta^3} (\Psi(2, L) + \Psi(2, M)) \\ \tilde{\kappa}_4 &= \frac{1}{\eta^4} (\Psi(3, L) + \Psi(3, M)) \end{cases}$$

Connaissant une estimation des log-cumulants d'ordre 2, 3 et 4 : $\hat{\kappa}_2$, $\hat{\kappa}_3$ et $\hat{\kappa}_4$, les estimateurs de L et M vérifient alors les relations :

$$\begin{cases} \frac{\hat{\kappa}_4}{\hat{\kappa}_3} &= \frac{(\Psi(2, \hat{L}_{\text{MLC}}) + \Psi(2, \hat{M}_{\text{MLC}}))^2}{(\Psi(1, \hat{L}_{\text{MLC}}) + \Psi(1, \hat{M}_{\text{MLC}}))^3} \\ \frac{\hat{\kappa}_4}{\hat{\kappa}_2} &= \frac{\Psi(3, \hat{L}_{\text{MLC}}) + \Psi(3, \hat{M}_{\text{MLC}})}{(\Psi(1, \hat{L}_{\text{MLC}}) + \Psi(1, \hat{M}_{\text{MLC}}))^2} \end{cases} \quad (8.34)$$

et on peut par un schéma numérique en déduire \hat{L} et \hat{M} .

Le paramètre de généralisation η est alors donné par :

$$|\hat{\eta}_{\text{MLC}}| = \sqrt{\frac{\Psi(1, \hat{L}_{\text{MLC}}) + \Psi(1, \hat{M}_{\text{MLC}})}{\hat{\kappa}_2}}$$

son signe étant donné par le signe de $\hat{\kappa}_3$:

$$\begin{cases} \hat{\eta} > 0 & \text{si } \hat{\kappa}_3 < 0 \\ \hat{\eta} < 0 & \text{si } \hat{\kappa}_3 > 0 \end{cases}$$

Enfin le paramètre $\hat{\mu}_{\text{MLC}}$ est donné par :

$$\log \hat{\mu}_{\text{MLC}} = \hat{\kappa}_1 - \frac{(\Psi(\hat{L}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{L}_{\text{MLC}})) + \Psi(\hat{M}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{M}_{\text{MLC}})}{\hat{\eta}_{\text{MLC}}} \quad (8.35)$$

8.5.5 Loi de Fisher Généralisée $\mathcal{FG}[\mu, L, M, \eta]$

La loi \mathcal{FG} a été présentée au paragraphe 5.3.2. Elle s'écrit :

$$\mathcal{FG}[\mu, L, M, \eta](x) = \frac{|\eta| L^{\frac{1}{\eta}} \Gamma(L+M)}{\mu M^{\frac{1}{\eta}} \Gamma(L) \Gamma(M)} \frac{\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu}\right)^{\eta L-1}}{\left(1 + \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu}\right)^{\eta}\right)^{L+M}}$$

La loi de Fisher étant sa propre inverse, on peut se restreindre à la recherche des paramètres (μ, L, M, η) avec $\eta > 0$. On a en effet la propriété :

$$\mathcal{FG}[\mu, L, M, \eta] = \mathcal{FG}[\mu, M, L, -\eta]$$

Méthode des Moments Ses quatre premiers moments –s'ils existent– s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} m_1 = \mu \frac{\Gamma(L+\frac{1}{\eta})}{L^{\frac{1}{\eta}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M-\frac{1}{\eta})}{M^{-\frac{1}{\eta}} \Gamma(M)} \\ m_2 = \mu^2 \frac{\Gamma(L+\frac{2}{\eta})}{L^{\frac{2}{\eta}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M-\frac{2}{\eta})}{M^{-\frac{2}{\eta}} \Gamma(M)} \\ m_3 = \mu^3 \frac{\Gamma(L+\frac{3}{\eta})}{L^{\frac{3}{\eta}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M-\frac{3}{\eta})}{M^{-\frac{3}{\eta}} \Gamma(M)} \\ m_4 = \mu^4 \frac{\Gamma(L+\frac{4}{\eta})}{L^{\frac{4}{\eta}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M-\frac{4}{\eta})}{M^{-\frac{4}{\eta}} \Gamma(M)} \end{cases}$$

Ce système ne semble pas avoir de solutions analytiques et une méthode numérique semble possible, mais peut être hasardeuse.

Méthode des Log-Cumulants Ses quatre premiers log-cumulants s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \log \mu + \frac{1}{\eta} (\Psi(L) - \log L - (\Psi(M) - \log M)) \\ \tilde{\kappa}_2 = \frac{1}{\eta^2} (\Psi(1, L) + \Psi(1, M)) \\ \tilde{\kappa}_3 = \frac{1}{\eta^3} (\Psi(2, L) - \Psi(2, M)) \\ \tilde{\kappa}_4 = \frac{1}{\eta^4} (\Psi(3, L) + \Psi(3, M)) \end{cases}$$

Connaissant une estimation des log-cumulants d'ordre 2, 3 et 4 : $\hat{\kappa}_2$, $\hat{\kappa}_3$ et $\hat{\kappa}_4$, les estimateurs de L et M vérifient alors les relations :

$$\begin{cases} \frac{\hat{\kappa}_3^2}{\hat{\kappa}_2^3} = \frac{(\Psi(2, \hat{L}_{\text{MLC}}) - \Psi(2, \hat{M}_{\text{MLC}}))^2}{(\Psi(1, \hat{L}_{\text{MLC}}) + \Psi(1, \hat{M}_{\text{MLC}}))^3} \\ \frac{\hat{\kappa}_4}{\hat{\kappa}_2^2} = \frac{\Psi(3, \hat{L}_{\text{MLC}}) + \Psi(3, \hat{M}_{\text{MLC}})}{(\Psi(1, \hat{L}_{\text{MLC}}) + \Psi(1, \hat{M}_{\text{MLC}}))^2} \end{cases} \quad (8.36)$$

et on peut par un schéma numérique en déduire \hat{L}_{MLC} et \hat{M}_{MLC} .

Le paramètre de généralisation η est alors donné par :

$$\hat{\eta}_{\text{MLC}} = \sqrt{\frac{\Psi(1, \hat{L}_{\text{MLC}}) + \Psi(1, \hat{M}_{\text{MLC}})}{\hat{\kappa}_2}}$$

Enfin le paramètre $\hat{\mu}_{\text{MLC}}$ est donné par :

$$\log \hat{\mu}_{\text{MLC}} = \hat{\kappa}_1 + \frac{-\left(\Psi(\hat{L}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{L}_{\text{MLC}})\right) + \Psi(\hat{M}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{M}_{\text{MLC}})}{\hat{\eta}_{\text{MLC}}} \quad (8.37)$$

8.5.6 Loi Beta Généralisée $\mathcal{BG} [\mu, L, M, \eta]$

La loi \mathcal{BG} a été présentée au paragraphe 5.3.3. Elle s'écrit :

$$\mathcal{BG} [\mu, L, M, \eta] = \frac{|\eta| L^{\frac{1}{\eta}}}{\mu M^{\frac{1}{\eta}}} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu} \right)^{\eta L - 1} \left(1 - \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu} \right)^{\eta} \right)^{M-L-1} \begin{cases} x \in \left[0; \frac{M^{\frac{1}{\eta}} \mu}{L^{\frac{1}{\eta}}} \right] & \text{si } \eta > 0 \\ x \in \left[\frac{M^{\frac{1}{\eta}} \mu}{L^{\frac{1}{\eta}}}; \infty \right] & \text{si } \eta < 0 \end{cases}$$

Méthode des Moments Ses quatre premiers moments s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} m_1 = \mu \frac{\Gamma(L+\frac{1}{\eta})}{L^{\frac{1}{\eta}} \Gamma(L)} \frac{M^{\frac{1}{\eta}} \Gamma(M)}{\Gamma(M+\frac{1}{\eta})} \\ m_2 = \mu^2 \frac{\Gamma(L+\frac{2}{\eta})}{L^{\frac{2}{\eta}} \Gamma(L)} \frac{M^{\frac{2}{\eta}} \Gamma(M)}{\Gamma(M+\frac{2}{\eta})} \\ m_3 = \mu^3 \frac{\Gamma(L+\frac{3}{\eta})}{L^{\frac{3}{\eta}} \Gamma(L)} \frac{M^{\frac{3}{\eta}} \Gamma(M)}{\Gamma(M+\frac{3}{\eta})} \\ m_4 = \mu^4 \frac{\Gamma(L+\frac{4}{\eta})}{L^{\frac{4}{\eta}} \Gamma(L)} \frac{M^{\frac{4}{\eta}} \Gamma(M)}{\Gamma(M+\frac{4}{\eta})} \end{cases}$$

Ce système ne semble pas avoir de solutions analytiques et une méthode numérique semble possible, mais peut être hasardeuse.

Méthode des Log-Cumulants Ses quatre premiers log-cumulants s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \log \mu + \frac{1}{\eta} (\Psi(L) - \log L - (\Psi(M) - \log M)) \\ \tilde{\kappa}_2 = \frac{1}{\eta^2} (\Psi(1, L) - \Psi(1, M)) \\ \tilde{\kappa}_3 = \frac{1}{\eta^3} (\Psi(2, L) - \Psi(2, M)) \\ \tilde{\kappa}_4 = \frac{1}{\eta^4} (\Psi(3, L) - \Psi(3, M)) \end{cases}$$

Connaissant une estimation des log-cumulants d'ordre 2, 3 et 4 : $\hat{\kappa}_2$, $\hat{\kappa}_3$ et $\hat{\kappa}_4$, les estimateurs de L et M vérifient alors les relations :

$$\begin{cases} \frac{\hat{\kappa}_4}{\hat{\kappa}_3^2} = \frac{(\Psi(2, \hat{L}_{\text{MLC}}) - \Psi(2, \hat{M}_{\text{MLC}}))^2}{(\Psi(1, \hat{L}_{\text{MLC}}) - \Psi(1, \hat{M}_{\text{MLC}}))^3} \\ \frac{\hat{\kappa}_4}{\hat{\kappa}_2} = \frac{\Psi(3, \hat{L}_{\text{MLC}}) - \Psi(3, \hat{M}_{\text{MLC}})}{(\Psi(1, \hat{L}_{\text{MLC}}) - \Psi(1, \hat{M}_{\text{MLC}}))^2} \end{cases} \quad (8.38)$$

et on peut par un schéma numérique en déduire \hat{L}_{MLC} et \hat{M}_{MLC} , avec la condition $\hat{L}_{\text{MLC}} < \hat{M}_{\text{MLC}}$.

Le paramètre de généralisation η est alors donné par :

$$|\hat{\eta}_{\text{MLC}}| = \sqrt{\frac{\Psi(1, \hat{L}_{\text{MLC}}) - \Psi(1, \hat{M}_{\text{MLC}})}{\hat{\kappa}_2}}$$

son signe étant donné par le signe de $\hat{\kappa}_3$:

$$\begin{cases} \hat{\eta}_{\text{MLC}} > 0 & \text{si } \hat{\kappa}_3 < 0 \\ \hat{\eta}_{\text{MLC}} < 0 & \text{si } \hat{\kappa}_3 > 0 \end{cases}$$

Enfin le paramètre $\hat{\mu}_{\text{MLC}}$ est donné par :

$$\log \hat{\mu}_{\text{MLC}} = \hat{\kappa}_1 + \frac{-\left(\Psi(\hat{L}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{L}_{\text{MLC}})\right) + \Psi(\hat{M}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{M}_{\text{MLC}})}{\hat{\eta}_{\text{MLC}}} \quad (8.39)$$

8.6 Estimation des paramètres : Lois en amplitude

C'est dans ce cadre que la méthode des log-Cumulants montre un réel intérêt. En effet, comme nous l'avons déjà remarqué dans le cas de l'estimation des lois généralisées, la méthode des moments se résout d'autant plus naturellement que l'on connaît la puissance η de la variable et que l'on peut alors calculer des moments d'ordre ηr correspondant à des moments entiers d'ordre r pour la loi sous jacente : les expressions analytiques deviennent inversibles. Or, dans le cas des lois en amplitude ($\eta = 2$), cela revient à considérer les moments pairs de la loi sous jacente : par exemple, pour estimer les paramètres d'une loi à deux paramètres, il faudra prendre les moments d'ordre 2 et 4. Dans ce cas, la variance des estimateurs des moments va dépendre des moments d'ordre 4 et 8 (voir relation 7.5) et l'estimation sera bien moins fiable que dans le cas où l'on peut effectivement se contenter des moments d'ordre 1 et 2.

En revanche, rien de tout cela se passe pour la méthode des log-Cumulants et on a de plus la relation fondamentale entre les log-Cumulant d'une loi en amplitude et les log-Cumulant d'une loi en intensité (relation 2.60) :

$$\tilde{\kappa}_{A,r} = \frac{1}{2^r} \tilde{\kappa}_{I,r}$$

Les schémas à résoudre pour l'estimation d'une loi en amplitude par la méthode des log-Cumulants sont alors quasiment identiques à ceux utilisés pour la loi en intensité correspondante (à un simple facteur multiplicatif près).

Dans ce paragraphe, une grande partie des lois analysées seront déclarées inadaptées à la méthode des moments : au lecteur de considérer les moments pairs et de se reporter à la loi "standard" correspondante.

8.6.1 Loi de Rayleigh $\mathcal{R}[\mu]$

$$\mathcal{R}[\mu](x) = \frac{2}{\mu} \left(\frac{x}{\mu}\right) e^{-\left(\frac{x}{\mu}\right)^2}$$

Méthode des Moments Le premier moment de la loi de Rayleigh s'écrit :

$$m_1 = \mu \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Connaissant l'estimé du premier moment \hat{m}_1 , l'estimé du paramètre μ au sens de la méthode des moments est donnée par :

$$\hat{\mu}_{\text{MM}} = \hat{m}_1 \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

Méthode des Log-Cumulants Le premier log-cumulant de la loi de Rayleigh s'écrit :

$$\tilde{\kappa}_1 = \log \mu + \frac{1}{2} \Psi(1)$$

Connaissant l'estimé du premier log-cumulant $\hat{\kappa}_1$, l'estimé du paramètre μ au sens de la méthode des Log-Cumulants est donnée par :

$$\log \mu_{\text{MLC}} = \hat{\kappa}_1 - \frac{1}{2} \Psi(1)$$

8.6.2 Loi de Rayleigh Inverse $\mathcal{RI}[\mu]$

$$\mathcal{RI}[\mu](x) = \frac{2}{\mu} \left(\frac{\mu}{x}\right)^3 e^{-\left(\frac{\mu}{x}\right)^2}$$

Méthode des Moments Le premier moment de la loi de Rayleigh Inverse s'écrit :

$$m_1 = \mu \sqrt{\pi}$$

Connaissant l'estimé du premier moment \hat{m}_1 , l'estimateur du paramètre μ au sens de la méthode des moments est donnée par :

$$\hat{\mu}_{\text{MM}} = m_1 \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

On peut noter que le moment d'ordre 2 n'existe pas pour cette loi, ce qui interdit l'approche de Kendall & Stuart pour calculer la variance de cet estimateur.

Méthode des Log-Cumulants Le premier log-cumulant de la loi de Rayleigh Inverse s'écrit :

$$\tilde{\kappa}_1 = \log \mu - \frac{1}{2} \Psi(1)$$

Connaissant l'estimé du premier log-cumulant $\hat{\tilde{\kappa}}_1$, l'estimateur du paramètre μ au sens de la méthode des Log-Cumulants est donnée par :

$$\log \mu_{\text{MLC}} = \tilde{\kappa}_1 + \frac{1}{2} \Psi(1)$$

8.6.3 Loi de Rayleigh-Nakagami $\mathcal{RN}[\mu, L]$

$$\mathcal{RN}[\mu, L](x) = \frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{L}}{\Gamma(L)} \left(\frac{\sqrt{L}x}{\mu} \right)^{2L-1} e^{-\left(\frac{\sqrt{L}x}{\mu}\right)^2}$$

Matrice de Fisher Il est facile de calculer la matrice de Fisher de la loi de Nakagami, qui s'exprime :

$$\begin{pmatrix} \frac{4L}{\mu^2} & 0 \\ 0 & \Psi(1, L) - \frac{1}{L} \end{pmatrix}.$$

Méthode du Maximum de Vraisemblance Le calcul à mener dans le cas de la loi de Nakagami s'effectue sans problème (voir [35]) :

$$\frac{\partial \log \mathcal{RN}}{\partial \mu} = -\frac{2L(\mu^2 - u^2)}{\mu^3} \quad (8.40)$$

$$\frac{\partial \log \mathcal{RN}}{\partial L} = \frac{\mu^2 - u^2}{\mu^2} + \log L - \Psi(L) + \log u^2 - \log \mu^2 \quad (8.41)$$

On en déduit :

- une expression explicite pour l'estimé de μ :

$$\hat{\mu}_{\text{MMV}} = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N x_n^2}{N}} \quad (8.42)$$

- une expression implicite pour L , ce qui donne un schéma numérique à résoudre :

$$\log \hat{L}_{\text{MMV}} - \Psi(\hat{L}_{\text{MMV}}) = 2 \left(\log \hat{\mu}_{\text{MMV}} - \frac{\sum_{n=1}^N \log x_n}{N} \right) \quad (8.43)$$

Notons qu'il serait tout à fait judicieux d'utiliser une inversion par RPM de la fonction :

$$\log x - \Psi(x)$$

pour obtenir un résultat fiable quasiment instantanément : une expression utilisable dans le contexte de l'imagerie cohérente est donnée en annexe (voir le tableau D.2 de l'annexe D).

Méthode des Moments Ses deux premiers moments s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} m_1 &= \mu \frac{\Gamma(L+\frac{1}{2})}{\sqrt{L}\Gamma(L)} \\ m_2 &= \mu^2 \end{cases}$$

Si le second moment permet de déduire le paramètre μ :

$$\mu = \sqrt{m_2}$$

le premier moment ne donne qu'une forme implicite du paramètre L puisque l'on a alors la relation :

$$\frac{\Gamma(L+\frac{1}{2})}{\sqrt{L}\Gamma(L)} = \frac{m_1}{\sqrt{m_2}}$$

dans laquelle on reconnaît une fonction de Pochhammer (voir annexe A.1.6) dont l'inversion numérique se fait sans difficulté majeure (voir le paragraphe D.4.1 de l'annexe D pour une inversion par RPM) . On peut aussi utiliser l'approximation A.21 pour L grand (hypothèse à poser et à valider a posteriori) :

$$\frac{\Gamma(L+\frac{1}{2})}{\sqrt{L}\Gamma(L)} = \frac{\text{Poch}(L+\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\sqrt{L}} \simeq 1 + \frac{1}{8L}$$

C'est à cause de cette forme implicite qu'il est d'usage d'utiliser les moments d'ordre 2 et 4 pour estimer les paramètres de la loi de Rayleigh-Nakagami. On a en effet :

$$\begin{cases} m_2 &= \mu^2 \\ m_4 &= \mu^4 \frac{L+1}{L} \end{cases}$$

c'est à dire le système permettant d'inverser les paramètres de la loi Gamma (puisque'une des propriétés des lois en amplitude est d'avoir une égalité entre leurs moments pairs d'ordre $2r$ et les moments d'ordre r de la même loi prise sur des données en intensité). Connaissant des estimés des moments d'ordre 2 et 4 de la loi de Rayleigh-Nakagami, \hat{m}_2 et \hat{m}_4 , on en déduit les estimés $\hat{\mu}_{\text{MM}}$ et \hat{L}_{MM} des paramètres μ et L au sens de la méthode des moments par les relations (dans lesquelles on reconnaît celles utilisées pour l'estimation des paramètres d'une loi Gamma, relation 8.7) :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{\text{MM}} &= \hat{m}_2 \\ \hat{L}_{\text{MM}} &= \frac{\hat{m}_2^2}{\hat{m}_4 - \hat{m}_2^2} \end{aligned}$$

Cette méthode a un défaut : celui d'être lié à l'estimation de moments d'ordres élevés, \hat{m}_2 et \hat{m}_4 , pour lesquels la variance des estimateurs est directement liée aux moments d'ordre 4 et 8. Ainsi obtenus, les estimateurs de μ et L ont une plus forte variance que ceux calculés avec des moments d'ordre 1 et 2 (voir [35]).

Méthode des Log-Cumulants Les deux premiers log-cumulants de la loi de Rayleigh-Nakagami s'expriment sous la forme :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 &= \log(\mu) + \frac{1}{2}(\Psi(L) - \log(L)) \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{1}{4}\Psi(1, L) \end{cases}$$

Pour inverser le système, on applique la même méthode que celle utilisée pour la loi Gamma (paragraphe 8.3.1) :

- connaissant un estimé $\hat{\kappa}_2$ du log-cumulant d'ordre 2, on en déduit \hat{L}_{MLC} , un estimé du paramètre de forme L , qui doit vérifier la relation :

$$\Psi\left(1, \hat{L}_{\text{MLC}}\right) = 4\hat{\kappa}_2$$

On peut utiliser pour cela un RPM (voir tableau D.2 de l'annexe D).

- Connaissant un estimé $\hat{\kappa}_1$ du log-cumulant d'ordre 1, et connaissant cet estimé \hat{L}_{MLC} du paramètre de forme L , on en déduit un estimé de μ , grâce à la relation :

$$\log \hat{\mu}_{\text{MLC}} = \hat{\kappa}_1 - \frac{1}{2} \left(\Psi(\hat{L}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{L}_{\text{MLC}}) \right)$$

Notons que pour que la solution ainsi trouvée soit réellement une loi de Rayleigh-Nakagami, il faut utiliser un estimé du log-cumulant d'ordre 3, $\hat{\kappa}_3$, et vérifier l'inégalité

$$\hat{\kappa}_3 \leq 0$$

Méthode du Coefficient de Variation Le coefficient de variation de la loi de Rayleigh-Nakagami s'écrit :

$$\sqrt{\frac{\Gamma(L)\Gamma(L+1)}{(\Gamma(L+\frac{1}{2}))^2} - 1}$$

expression que l'on peut inverser avec un RPM (voir la relation D.5 de l'annexe D).

Notons qu'une bonne approximation de cette expression permet d'écrire :

$$\gamma = \frac{1}{2\sqrt{L}}$$

et en connaissant une valeur empirique $\hat{\gamma}$ du coefficient de variation, on en déduit un estimé du facteur de forme L :

$$\hat{L}_{\text{MCV}} \simeq \frac{1}{4\hat{\gamma}^2}$$

8.6.4 Loi de Rayleigh-Nakagami Inverse $\mathcal{RN}\mathcal{I}[\mu, M]$

$$\mathcal{RN}\mathcal{I}[\mu, M](x) = \frac{2}{\mu} \frac{1}{\sqrt{M}\Gamma(M)} \left(\frac{\sqrt{M}\mu}{x} \right)^{2M+1} e^{-\left(\frac{\sqrt{M}\mu}{x}\right)^2}$$

Méthode des Moments Les deux premiers moments de la loi de Rayleigh-Nakagami Inverse s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} m_1 = \mu \frac{\sqrt{M}\Gamma(M-\frac{1}{2})}{\Gamma(M)} & M > \frac{1}{2} \\ m_2 = \mu^2 \frac{M}{M-1} & M > 1 \end{cases}$$

et ce système n'est pas analytiquement inversible (comme dans le cas de la loi de Rayleigh Nakagami, on voit apparaître une fonction de Pochhammer, non inversible analytiquement).

La tentation est grande de prendre les moments d'ordres 2 et 4 :

$$\begin{cases} m_2 = \mu^2 \frac{M}{M-1} \\ m_4 = \mu^4 \frac{M^2}{(M-1)(M-2)} \end{cases}$$

et de se retrouver ainsi avec le même système inversible que celui de la loi Gamma Inverse (paragraphe 8.3.2) :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{\text{MM}} &= \sqrt{\frac{\hat{m}_2 \hat{m}_4}{2\hat{m}_4 - \hat{m}_2^2}} \\ \hat{M}_{\text{MM}} &= \frac{2\hat{m}_4 - \hat{m}_2^2}{\hat{m}_4 - \hat{m}_2^2} \end{aligned}$$

Or il est toujours possible de calculer des estimés de moments d'ordre quelconque à partir d'un tableau fini de valeurs finies, même si la loi sous jacente ne possède pas ces moments. Aussi cette méthode est à proscrire (à moins que l'on sache a priori que la relation $M > 4$ est vérifiée).

Méthode des Log-Cumulants Les deux premiers log-cumulants de la loi de Rayleigh-Nakagami Inverse s'expriment sous la forme :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 &= \log(\mu) + \frac{1}{2}(\Psi(L) - \log(L)) \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{1}{4}\Psi(1, L) \end{cases}$$

Pour inverser le système, on applique la même méthode que celle utilisée pour la loi Gamma Inverse (paragraphe 8.3.2) :

- connaissant un estimé $\hat{\kappa}_2$ du log-cumulant d'ordre 2, on en déduit \hat{L}_{MLC} , un estimé du paramètre de forme L , qui doit vérifier la relation :

$$\Psi\left(1, \hat{L}_{\text{MLC}}\right) = 4\hat{\kappa}_2$$

On peut utiliser pour cela un RPM (voir tableau D.2 de l'annexe D).

- Connaissant un estimé $\hat{\kappa}_1$ du log-cumulant d'ordre 1, et connaissant cet estimé \hat{L}_{MLC} du paramètre de forme L , on en déduit un estimé de μ , grâce à la relation :

$$\log \hat{\mu}_{\text{MLC}} = \hat{\kappa}_1 + \frac{1}{2} \left(\Psi(\hat{L}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{L}_{\text{MLC}}) \right)$$

Notons que pour que la solution ainsi trouvée soit réellement une loi de Rayleigh-Nakagami Inverse, il faut utiliser un estimé du log-cumulant d'ordre 3, $\hat{\kappa}_3$, et vérifier l'inégalité

$$\hat{\kappa}_3 \geq 0$$

8.6.5 Loi de Rice : formalisme traditionnel

La loi de Rice s'écrit traditionnellement sous la forme (6.2.3) :

$$\mathcal{RC}[\mu, \mu_C] = \frac{2x}{\mu^2} e^{-\frac{x^2 + \mu_C^2}{\mu^2}} I_0\left(\frac{2\mu_C x}{\mu^2}\right)$$

les deux paramètres à rechercher étant μ (caractérisant le chatoisement sous jacent) et μ_C (une cible ponctuelle).

Méthode du Maximum de Vraisemblance Par dérivation selon chacun des paramètres, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \log(\mathcal{RC}[\mu, \mu_C]) = 2 \frac{(x^2 + \mu_C^2 - \mu^2) I_0\left(\frac{2\mu_C x}{\mu^2}\right) - 2\mu_C x I_1\left(\frac{2\mu_C x}{\mu^2}\right)}{\mu^3 I_0\left(\frac{2\mu_C x}{\mu^2}\right)} \quad (8.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu_C} \log(\mathcal{RC}[\mu, \mu_C]) = 2 \frac{-\mu_C I_0\left(\frac{2\mu_C x}{\mu^2}\right) + x I_1\left(\frac{2\mu_C x}{\mu^2}\right)}{\mu^2 I_0\left(\frac{2\mu_C x}{\mu^2}\right)} \quad (8.45)$$

Ceci permet d'écrire le système implicite suivant :

$$\begin{cases} \widehat{\mu}_{\text{MMV}} &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\frac{I_1\left(\frac{2\widehat{\mu}_{\text{MMV}} x_n}{\widehat{\mu}_{\text{MMV}}^2}\right)}{I_0\left(\frac{2\widehat{\mu}_{\text{MMV}} x_n}{\widehat{\mu}_{\text{MMV}}^2}\right)} \right) x_n \\ \widehat{\mu}_{\text{MMV}}^2 &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n^2 - \widehat{\mu}_{\text{MMV}}^2 \end{cases}$$

En pratique, on initialise les deux valeurs et on opère successivement les deux relations. La convergence n'est pas très rapide d'autant plus que le calcul requiert des évaluations de fonctions de Bessel modifiées de première espèce, toujours chronophages.

Méthode des Moments En utilisant le système des moments d'ordre 2 et 4 de la loi de Rice :

$$\begin{cases} m_2 = \mu^2 + \mu_C^2 \\ m_4 = 2\mu^4 + 4\mu_C^2\mu^2 + \mu_C^4 \end{cases}$$

on obtient facilement les expressions analytiques des estimés des paramètres μ_C et μ grâce aux deux relations suivantes :

$$\hat{\mu}_{MM}^C = (2m_2^2 - m_4)^{\frac{1}{4}} \quad (8.46)$$

$$\hat{\mu}_{MM} = \left(m_2 - (2m_2^2 - m_4)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8.47)$$

Comme dans le cas de la loi de Rayleigh-Nakagami, on n'a d'expression explicite qu'en prenant les moments d'ordre 2 et 4, l'utilisation des moments d'ordre 1 et 2 ne permettant qu'une expression implicite des paramètres de la loi.

Méthode des Log-Cumulants La forme analytique de la fonction caractéristique de deuxième espère de la loi de Rice ne permet pas d'établir les expressions des log-cumulants : en effet, on ne sait pas dériver une fonction de Kummer selon son premier paramètre.

8.6.6 Loi de Rice : nouveau formalisme [38]

La loi de Rice s'écrit aussi sous une autre forme (paragraphe 6.2.4, relation 6.1) :

$$\mathcal{RC}_2[\mu, \lambda](x) = \frac{2x}{\mu^2} e^{-\left(\frac{x^2}{\mu^2} + \lambda^2\right)} I_0\left(2\lambda \frac{x}{\mu}\right)$$

les deux paramètres à rechercher étant μ (caractérisant le chatoitement sous jacent) et λ (caractérisant la cible ponctuelle) tel que $\mu_C = \lambda\mu$.

Méthode du Maximum de Vraisemblance Par dérivation selon chacun des paramètres, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \log(\mathcal{RC}_2[\mu, \lambda]) = 2 \frac{(x^2 + \mu^2(\lambda^2 - 1)) I_0\left(\frac{2\lambda x}{\mu}\right) - 2\lambda \frac{x}{\mu} I_1\left(\frac{2\lambda x}{\mu}\right)}{\mu^3 I_0\left(\frac{2\lambda x}{\mu}\right)} \quad (8.48)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log(\mathcal{RC}_2[\mu, \lambda]) = -2\lambda + \frac{\frac{2x}{\mu} I_1\left(\frac{2\lambda x}{\mu}\right)}{I_0\left(\frac{2\lambda x}{\mu}\right)} \quad (8.49)$$

Si on dispose de N échantillons, et en supposant que les paramètres optimaux existent et sont notés $\hat{\mu}_{MMV}$ et $\hat{\lambda}_{MMV}$, la relation 8.49 permet d'écrire :

$$\hat{\lambda}_{MMV} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{x_n}{\hat{\mu}_{MMV}} \frac{I_1\left(\frac{2\hat{\lambda}_{MMV} x_n}{\hat{\mu}_{MMV}}\right)}{I_0\left(\frac{2\hat{\lambda}_{MMV} x_n}{\hat{\mu}_{MMV}}\right)} \quad (8.50)$$

En utilisant cette relation 8.50, il est alors possible de reformuler la relation 8.48 sous la forme :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n^2 = \hat{\mu}_{MMV}^2 \left(1 + \hat{\lambda}_{MMV}^2 \right)$$

ce qui donne une expression explicite pour le paramètre μ_{MMV} :

$$\hat{\mu}_{MMV} = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N x_n^2}{1 + \hat{\lambda}_{MMV}^2}} \quad (8.51)$$

Méthode du coefficient de variation L'intérêt de ce nouveau formalisme est que le paramètre λ peut s'écrire sous forme implicite uniquement en fonction du coefficient de variation puisque l'on a :

$$\gamma = \sqrt{\frac{e^{\lambda^2} {}_1F_1(2; 1; \lambda^2)}{(\Gamma(1 + \frac{1}{2}) {}_1F_1(1 + \frac{1}{2}; 1; \lambda^2))^2}} - 1 = \sqrt{\frac{4 e^{\lambda^2} (1 + \lambda^2)}{\pi ((1 + \lambda^2) I_0(\frac{\lambda^2}{2}) + \lambda^2 I_1(\frac{\lambda^2}{2}))^2}} - 1$$

On peut en déduire une approximation du coefficient de variation pour de grandes valeurs de λ :

$$\gamma \simeq \frac{1}{\sqrt{2}\lambda}$$

Notons que l'on peut facilement écrire un RPM de ces expressions, ce qui donne, connaissant un estimé $\hat{\gamma}$ du paramètre γ (voir [40]) :

$$\hat{\lambda}_{\text{MCV}} \simeq \frac{1 - 2.864928 \hat{\gamma} - 3.193363 \hat{\gamma}^2 + 15.715797 \hat{\gamma}^3 - 11.713746 \hat{\gamma}^4}{-0.017883 + 1.815109 \hat{\gamma} - 7.318177 \hat{\gamma}^2 + 8.717601 \hat{\gamma}^3 - 2.362803 \hat{\gamma}^4} \quad (8.52)$$

Connaissant cet estimé du paramètre λ , l'estimé du paramètre μ s'obtient à partir du moment d'ordre 1, ce qui permet d'écrire :

$$\hat{\mu}_{\text{MCV}} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n}{e^{-\hat{\lambda}_{\text{MCV}}^2} \Gamma(1 + \frac{1}{2}) {}_1F_1(1 + \frac{1}{2}; 1; \hat{\lambda}_{\text{MCV}}^2)}$$

8.6.7 Loi \mathcal{K} en amplitude

La loi \mathcal{K} en amplitude, \mathcal{KA} , a été présentée au paragraphe 6.3.1. Elle s'écrit :

$$\mathcal{KA}[\mu, L, M](x) = \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{4\sqrt{LM}}{\mu} \left(\frac{\sqrt{LM}x}{\mu} \right)^{M+L-1} K_{M-L} \left[2 \frac{\sqrt{LM}x}{\mu} \right]$$

Méthode du Maximum de Vraisemblance La conséquence de cette incapacité à déterminer la dérivée d'une fonction de Bessel en fonction de son argument fait que la Méthode du Maximum de Vraisemblance ne peut s'appliquer pour les paramètres de forme L et M . On peut néanmoins l'appliquer pour le paramètre d'échelle μ , ce qui donne :

$$\frac{\partial \log \mathcal{KA}}{\partial \mu} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{K_{M-L+1} \left[2 \frac{\sqrt{LM}x}{\mu} \right]}{K_{M-L} \left[2 \frac{\sqrt{LM}x}{\mu} \right]} \frac{\sqrt{LM}x}{\mu} - M \right) \quad (8.53)$$

ce qui permet d'écrire la relation implicite, à condition de connaître des estimés de L et de M :

$$\hat{\mu}_{\text{MMV}} = \sqrt{\frac{L}{M}} \sum_{n=1}^N \frac{K_{M-L+1} \left[2 \frac{\sqrt{LM}x_n}{\hat{\mu}_{\text{MMV}}} \right]}{K_{M-L} \left[2 \frac{\sqrt{LM}x_n}{\hat{\mu}_{\text{MMV}}} \right]} x_n$$

On a donc une relation implicite. En l'initialisant par exemple avec l'estimé de μ de la méthode des moments, diverses expériences montrent que cette dernière expression converge assez rapidement et est donc tout à fait exploitable dans un code numérique.

Méthode des Moments Ses trois premiers moments s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} m_1 &= \mu \frac{\Gamma(L + \frac{1}{2})}{\sqrt{L} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M + \frac{1}{2})}{\sqrt{M} \Gamma(M)} \\ m_2 &= \mu^2 \\ m_3 &= \mu^3 \frac{\Gamma(L + \frac{3}{2})}{L^{\frac{3}{2}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M + \frac{3}{2})}{M^{\frac{3}{2}} \Gamma(M)} \end{cases}$$

Ce système ne semble pas avoir de solutions analytiques et une méthode numérique semble possible mais hasardeuse.

Méthode des Log-Cumulants Les trois premiers log-cumulants de la loi \mathcal{KA} s'expriment sous la forme :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 &= \log(\mu) + \frac{1}{2}((\Psi(L) - \log(L)) + (\Psi(M) - \log(M))) \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{1}{4}(\Psi(1, L) + \Psi(1, M)) \\ \tilde{\kappa}_3 &= \frac{1}{8}(\Psi(r-1, L) + \Psi(r-1, M)) \end{cases}$$

Connaissant des estimés $\hat{\kappa}_1$, $\hat{\kappa}_2$ et $\hat{\kappa}_3$ des trois premiers log-cumulants, on commence par déduire des estimés \hat{L}_{MLC} et \hat{M}_{MLC} en résolvant numériquement le système :

$$\begin{aligned} 4 \hat{\kappa}_2 &= \Psi(1, \hat{L}_{\text{MLC}}) + \Psi(1, \hat{M}_{\text{MLC}}) \\ 8 \hat{\kappa}_3 &= \Psi(2, \hat{L}_{\text{MLC}}) + \Psi(2, \hat{M}_{\text{MLC}}) \end{aligned}$$

Le paramètre $\hat{\mu}_{\text{MLC}}$ se déduit de la relation suivante :

$$\log \hat{\mu}_{\text{MLC}} = \hat{\kappa}_1 - \frac{1}{2} \left(\left(\Psi(\hat{L}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{L}_{\text{MLC}}) \right) + \left(\Psi(\hat{M}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{M}_{\text{MLC}}) \right) \right)$$

8.6.8 Loi \mathcal{K} en amplitude Inverse

La loi \mathcal{K} Inverse en amplitude, \mathcal{KAI} , a été présentée au paragraphe 6.3.2. Elle s'écrit :

$$\mathcal{KAI}[\mu, L, M](x) = \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{4}{\sqrt{L M} \mu} \left(\frac{\sqrt{L M} \mu}{x} \right)^{M+L+1} K_{M-L} \left[2 \frac{\sqrt{L M} \mu}{x} \right]$$

Méthode des Moments Ses trois premiers moments s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} m_1 &= \mu \frac{\Gamma(L+\frac{1}{2})}{\sqrt{L} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+\frac{1}{2})}{\sqrt{M} \Gamma(M)} \\ m_2 &= \mu^2 \\ m_3 &= \mu^3 \frac{\Gamma(L+\frac{3}{2})}{L^{\frac{3}{2}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+\frac{3}{2})}{M^{\frac{3}{2}} \Gamma(M)} \end{cases}$$

Ce système ne semble pas avoir de solutions analytiques et une méthode numérique semble possible, mais peut être hasardeuse.

Méthode des Log-Cumulants Les trois premiers log-cumulants de la loi \mathcal{K} Inverse en amplitude s'expriment sous la forme :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 &= \log(\mu) - \frac{1}{2}((\Psi(L) - \log(L)) + (\Psi(M) - \log(M))) \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{1}{4}(\Psi(1, L) + \Psi(1, M)) \\ \tilde{\kappa}_3 &= -\frac{1}{8}(\Psi(2, L) + \Psi(2, M)) \end{cases}$$

Connaissant des estimés $\hat{\kappa}_1$, $\hat{\kappa}_2$ et $\hat{\kappa}_3$ des trois premiers log-cumulants, on commence par déduire des estimés \hat{L}_{MLC} et \hat{M}_{MLC} en résolvant numériquement le système :

$$\begin{aligned} 4 \hat{\kappa}_2 &= \Psi(1, \hat{L}_{\text{MLC}}) + \Psi(1, \hat{M}_{\text{MLC}}) \\ 8 \hat{\kappa}_3 &= -\Psi(2, \hat{L}_{\text{MLC}}) - \Psi(2, \hat{M}_{\text{MLC}}) \end{aligned}$$

Le paramètre $\hat{\mu}$ se déduit de la relation suivante :

$$\log \hat{\mu}_{\text{MLC}} = \hat{\kappa}_1 + \frac{1}{2} \left(\left(\Psi(\hat{L}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{L}_{\text{MLC}}) \right) + \left(\Psi(\hat{M}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{M}_{\text{MLC}}) \right) \right)$$

8.6.9 Loi de Fisher en amplitude

La loi de Fisher en amplitude, \mathcal{FA} , a été présentée au paragraphe 6.3.3. Elle s'écrit :

$$\mathcal{FA}[\mu, L, M](x) = \frac{2}{\mu} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \sqrt{\frac{L}{M}} \frac{\left(\sqrt{\frac{L}{M}} \frac{x}{\mu}\right)^{2L-1}}{\left(1 + \left(\sqrt{\frac{L}{M}} \frac{x}{\mu}\right)^2\right)^{L+M}}$$

Méthode des Moments Ses trois premiers moments s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} m_1 &= \mu \frac{\Gamma(L+\frac{1}{2})}{\sqrt{L}\Gamma(L)} \frac{\sqrt{M}\Gamma(M-\frac{1}{2})}{\Gamma(M)} \\ m_2 &= \mu^2 \frac{M}{M-1} \\ m_3 &= \mu^3 \frac{\Gamma(L+\frac{3}{2})}{L^{\frac{3}{2}}\Gamma(L)} \frac{M^{\frac{3}{2}}\Gamma(M-\frac{3}{2})}{\Gamma(M)} \end{cases}$$

Ce système ne semble pas avoir de solutions analytiques et une méthode numérique semble possible, mais peut être hasardeuse.

Méthode des Log-Cumulants Les trois premiers log-cumulants de la loi s'expriment sous la forme :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 &= \log \mu + \frac{1}{2}((\Psi(L) - \log(L)) - (\Psi(M) - \log(M))) \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{1}{4}(\Psi(1, L) + \Psi(1, M)) \\ \tilde{\kappa}_3 &= \frac{1}{8}(\Psi(2, L) - \Psi(2, M)) \end{cases}$$

Connaissant des estimés $\hat{\kappa}_1$, $\hat{\kappa}_2$ et $\hat{\kappa}_3$ des trois premiers log-cumulants, on commence par déduire des estimés \hat{L}_{MLC} et \hat{M}_{MLC} en résolvant numériquement le système :

$$\begin{aligned} 4 \hat{\kappa}_2 &= \Psi(1, \hat{L}_{\text{MLC}}) + \Psi(1, \hat{M}_{\text{MLC}}) \\ 8 \hat{\kappa}_3 &= \Psi(2, \hat{L}_{\text{MLC}}) - \Psi(2, \hat{M}_{\text{MLC}}) \end{aligned} \quad (8.54)$$

Le paramètre $\hat{\mu}_{\text{MLC}}$ se déduit de la relation suivante :

$$\log \hat{\mu}_{\text{MLC}} = \hat{\kappa}_1 - \frac{1}{2} \left(\left(\Psi(\hat{L}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{L}_{\text{MLC}}) \right) - \left(\Psi(\hat{M}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{M}_{\text{MLC}}) \right) \right) \quad (8.55)$$

Notons que l'on peut utiliser un RPM pour inverser le système 8.54 (voir l'annexe D.5.1).

Méthode du Maximum de Vraisemblance La forme analytique assez simple de la loi de Fisher en amplitude permet d'établir facilement le système d'équations vérifié par les estimés au sens du maximum de vraisemblance des paramètres μ , L et M et notés ici $\hat{\mu}$, \hat{L} et \hat{M} [35] :

$$\sum_{n=1}^N \frac{(x_n^2 - \hat{\mu}^2)}{(\hat{L}x_n^2 + \hat{M}\hat{\mu}^2)} = 0 \quad (8.56)$$

$$\sum_{n=1}^N \left(\Psi(\hat{L} + \hat{M}) - \Psi(\hat{L}) + \log \left(\frac{\hat{L}x_n^2}{\hat{L}x_n^2 + \hat{M}\hat{\mu}^2} \right) \right) = 0 \quad (8.57)$$

$$\sum_{n=1}^N \left(\Psi(\hat{L} + \hat{M}) - \Psi(\hat{M}) + \log \left(\frac{\hat{M}\hat{\mu}^2}{\hat{L}x_n^2 + \hat{M}\hat{\mu}^2} \right) \right) = 0 \quad (8.58)$$

Aucune relation explicite donnant directement ces estimateurs n'existe et seules des méthodes itératives permettent de les calculer. Cependant, si on connaît les estimés \hat{L} et \hat{M} , on peut établir deux relations intéressantes vérifiées par $\hat{\mu}_{\text{MMV}}$:

– à partir de la relation 8.56, on obtient une relation implicite :

$$\hat{\mu}_{\text{MMV}} = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N \frac{x_n^2}{\hat{M}\hat{\mu}_{\text{MMV}}^2 + Lx_n^2}}{\sum_{n=1}^N \frac{1}{\hat{M}\hat{\mu}_{\text{MMV}}^2 + Lx_n^2}}}$$

– en reportant l'expression 8.56 dans les relations 8.57 et 8.58, on obtient aisément la relation :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \log x_n = \log \hat{\mu}_{\text{MMV}} + \frac{1}{2} \left(\Psi(\hat{L}) - \log \hat{L} \right) - \frac{1}{2} \left(\Psi(\hat{M}) - \log \hat{M} \right)$$

et on reconnaît formellement la relation 8.55 donnant l'estimé du paramètre μ pour la méthode des log-cumulants une fois établis les estimés de L et M .

8.6.10 Loi Beta en amplitude

La loi Beta en amplitude, \mathcal{BA} , a été présentée au paragraphe 6.3.4. Elle s'écrit :

$$\mathcal{BA}[\mu, L, M] = \frac{2}{\mu} \sqrt{\frac{L}{M}} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L) \Gamma(M-L)} \left(\frac{\sqrt{L}x}{\sqrt{M}\mu} \right)^{2L-1} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{L}x}{\sqrt{M}\mu} \right)^2 \right)^{M-L-1} \quad x \in \left[0; \frac{\sqrt{M}\mu}{\sqrt{L}} \right]$$

Méthode des Moments Ses trois premiers moments s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} m_1 &= \mu \frac{\Gamma(L+\frac{1}{2})}{\sqrt{L}\Gamma(L)} \frac{\sqrt{M}\Gamma(M)}{\Gamma(M+\frac{1}{2})} \\ m_2 &= \mu^2 \\ m_3 &= \mu^3 \frac{\Gamma(L+\frac{3}{2})}{L^{\frac{3}{2}}\Gamma(L)} \frac{M^{\frac{3}{2}}\Gamma(M)}{\Gamma(M+\frac{3}{2})} \end{cases}$$

Ce système ne semble pas avoir de solutions analytiques et une méthode numérique semble possible, mais peut être hasardeuse.

Méthode des Log-Cumulants Les trois premiers log-cumulants de la loi Beta en amplitude s'expriment sous la forme :

$$\begin{cases} \hat{\kappa}_1 &= \log \mu + \frac{1}{2} \left(\Psi(L) - \log L \right) - \left(\Psi(M) - \log M \right) \\ \hat{\kappa}_2 &= \frac{1}{4} \left(\Psi(1, L) - \Psi(1, M) \right) \\ \hat{\kappa}_3 &= \frac{1}{8} \left(\Psi(2, L) - \Psi(2, M) \right) \end{cases}$$

Connaissant des estimés $\hat{\kappa}_1$, $\hat{\kappa}_2$ et $\hat{\kappa}_3$ des trois premiers log-cumulants, on commence par déduire des estimés \hat{L}_{MLC} et \hat{M}_{MLC} en résolvant numériquement le système :

$$\begin{aligned} 4 \hat{\kappa}_2 &= \Psi(1, \hat{L}_{\text{MLC}}) - \Psi(1, \hat{M}_{\text{MLC}}) \\ 8 \hat{\kappa}_3 &= \Psi(2, \hat{L}_{\text{MLC}}) - \Psi(2, \hat{M}_{\text{MLC}}) \end{aligned} \quad (8.59)$$

Le paramètre $\hat{\mu}_{\text{MLC}}$ se déduit de la relation suivante :

$$\log \hat{\mu}_{\text{MLC}} = \hat{\kappa}_1 - \frac{1}{2} \left(\left(\Psi(\hat{L}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{L}_{\text{MLC}}) \right) - \left(\Psi(\hat{M}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{M}_{\text{MLC}}) \right) \right)$$

Notons que l'on peut utiliser un RPM pour inverser le système 8.59 (voir l'annexe D.5.2).

Méthode du Maximum de Vraisemblance La forme analytique assez simple de la loi Beta permet d'établir facilement le système d'équations vérifié par les estimés au sens du maximum de vraisemblance des paramètres μ , L et M et notés ici $\hat{\mu}$, \hat{L} et \hat{M} [35] :

$$\sum_{n=1}^N \frac{((\hat{M}-1)x_n^2 - \hat{M}\hat{\mu}^2)}{(\hat{M}\hat{\mu}^2 - \hat{L}x_n^2)} = 0 \quad (8.60)$$

$$\sum_{n=1}^N \left(\Psi(\hat{M}-\hat{L}) + \Psi(\hat{L}) - \log \left(\frac{\hat{L}x_n^2}{\hat{M}\hat{\mu}^2 - \hat{L}x_n^2} \right) \right) = 0 \quad (8.61)$$

$$\sum_{n=1}^N \left(\Psi(\hat{M}-\hat{L}) + \Psi(\hat{M}) - \log \left(\frac{\hat{M}\hat{\mu}^2}{\hat{M}\hat{\mu}^2 - \hat{L}x_n^2} \right) \right) = 0 \quad (8.62)$$

A partir de la relation 8.60, on obtient la relation implicite suivante :

$$\hat{\mu}_{\text{MMV}} = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N \frac{(\hat{M}-1)x_n^2}{\hat{M}\hat{\mu}_{\text{MMV}}^2 - \hat{L}x_n^2}}{\sum_{n=1}^N \frac{\hat{M}}{\hat{M}\hat{\mu}_{\text{MMV}}^2 - \hat{L}x_n^2}}}$$

8.6.11 Loi Beta en amplitude Inverse

La loi Beta en amplitude Inverse, \mathcal{BAI} , a été présentée au paragraphe 6.3.5. Elle s'écrit :

$$\mathcal{BAI}[\mu, L, M] = \frac{2\sqrt{M}}{\mu\sqrt{L}} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \frac{\left(\left(\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{L}\mu} x \right)^2 - 1 \right)^{M-L-1}}{\left(\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{L}\mu} x \right)^{2M-1}} \quad x \in \left[\frac{\sqrt{L}\mu}{\sqrt{M}}; \infty \right[$$

Méthode des Moments Ses trois premiers moments s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} m_1 = \mu \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{M}} \frac{\Gamma(L-\frac{1}{2})}{\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(M-\frac{1}{2})} \\ m_2 = \mu^2 \frac{L}{L-1} \frac{M-1}{M} \\ m_r = \mu^3 \frac{L^{\frac{3}{2}} \Gamma(L-\frac{3}{2})}{\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M)}{M^{\frac{3}{2}} \Gamma(M-\frac{3}{2})} \end{cases}$$

Méthode des Log-Cumulants Les trois premiers log-cumulants de la loi Beta Inverse en amplitude s'expriment sous la forme :

$$\begin{cases} \hat{\kappa}_1 = \log \mu - \frac{1}{2} (\Psi(L) - \log L - (\Psi(M) - \log M)) \\ \hat{\kappa}_2 = \frac{1}{4} (\Psi(1, L) - \Psi(1, M)) \\ \hat{\kappa}_3 = -\frac{1}{8} (\Psi(2, L) - \Psi(2, M)) \end{cases}$$

Connaissant des estimés $\hat{\kappa}_1$, $\hat{\kappa}_2$ et $\hat{\kappa}_3$ des trois premiers log-cumulants, on commence par déduire des estimés \hat{L}_{MLC} et \hat{M}_{MLC} en résolvant numériquement le système :

$$\begin{cases} 4\hat{\kappa}_2 = \Psi(1, \hat{L}_{\text{MLC}}) - \Psi(1, \hat{M}_{\text{MLC}}) \\ 8\hat{\kappa}_3 = -\Psi(2, \hat{L}_{\text{MLC}}) + \Psi(2, \hat{M}_{\text{MLC}}) \end{cases} \quad (8.63)$$

Le paramètre $\hat{\mu}_{\text{MLC}}$ se déduit de la relation suivante :

$$\log \hat{\mu}_{\text{MLC}} = \hat{\kappa}_1 + \frac{1}{2} \left(\left(\Psi(\hat{L}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{L}_{\text{MLC}}) \right) - \left(\Psi(\hat{M}_{\text{MLC}}) - \log(\hat{M}_{\text{MLC}}) \right) \right)$$

Notons que l'on peut utiliser un RPM pour inverser le système 8.63 (voir l'annexe D.5.2).

Chapitre 9

Les diagrammes $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$

Nous avons introduit le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ lors de l'étude des lois Gamma et Gamma Inverse (paragraphe 3.1.7) et nous avons vu le rôle clé que jouent ces deux lois dans ce diagramme. Ensuite, un certain nombre de lois ont été caractérisées par leur construction dans ce diagramme puisque, pour une loi construite par convolution de Mellin, les log-cumulants s'obtiennent grâce à la propriété d'additivité des log-cumulants.

Ce chapitre vise à proposer une vision synthétique de certaines lois fondamentales dans ce diagramme, puis étudie, dans des cas particuliers, comment une loi peut couvrir une zone donnée dans ce diagramme, plus particulièrement la zone centrale entre les lois Gamma et Gamma Inverse (cas des diagrammes en intensité) ou la zone entre les lois de Nakagami et de Nakagami Inverse (cas des diagrammes en amplitude).

En préambule, nous proposons un bref rappel sur le diagramme $\beta_1 - \beta_2$ et en analysons ses limites dans le cadre des lois de Fisher, Beta et Beta Inverse.

9.1 Les limites du diagramme $\beta_1 - \beta_2$

Le diagramme $\beta_1 - \beta_2$, proposé par Pearson [24] et présenté au paragraphe 3.1.6, est une représentation connue dans le monde des statistiques : il permet en particulier une séparation entre lois Beta et lois de Fisher. Or nous l'avons rencontré au paragraphe 3.2.3 et avons vu qu'il permettait aussi une séparation des lois Beta et Beta inverse. En fait, ce diagramme attribue la même localisation aux lois de Fisher et aux lois Beta Inverse. En revanche, le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ permet une localisation séparée de ces trois lois.

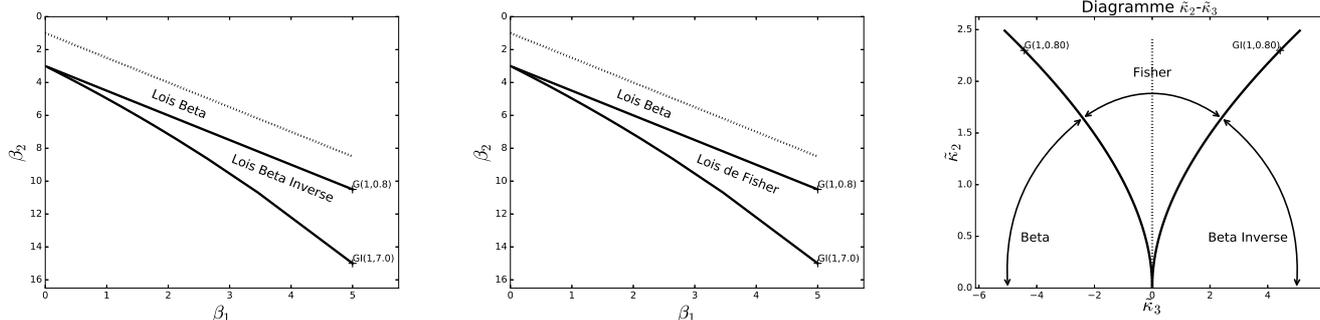


FIGURE 9.1 – Positionnement des lois Beta, Beta Inverse et Gamma dans le diagramme $\beta_1 - \beta_2$ et le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$. Si la loi Beta Inverse est bien séparée des autres lois dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$, elle partage la même localisation que la loi de Fisher dans le diagramme $\beta_1 - \beta_2$.

La figure 9.1 illustre cette possible confusion entre lois en montrant que le diagramme $\beta_1 - \beta_2$ dédie la même zone pour les lois de Fisher et les lois Beta Inverse. De plus il a de fortes limitations, en particulier

dans la représentation des lois de Fisher puisque celles-ci sont des lois à queue lourde : comme on ne peut calculer les coefficients β_1 et β_2 que si le moment d'ordre 4 existe, il faut que le paramètre M soit supérieur à 4. Donc toutes les lois de Fisher telles que $M \leq 4$ ne sont représentables dans ce diagramme. En revanche, il n'y a aucune condition sur la loi de Fisher pour sa représentativité dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ puisqu'il n'y a aucune condition sur l'existence de ses log-cumulants.

Ceci explique pourquoi ce chapitre n'est consacré qu'aux diagrammes $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$, sans proposer d'équivalent dans le classique diagramme $\beta_1 - \beta_2$.

9.2 Diagrammes de synthèse

9.2.1 Lois "en intensité"

Les lois rencontrées au chapitre 4 correspondent en général à des lois qualifiées de "lois en intensité" : elles correspondent à des données qui reflètent l'intensité de la grandeur physique mesurée (liée au coefficient de rétrodiffusion des objets présents dans la scène radar).

Si on se cantonne aux lois à deux paramètres, on voit que le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ fait jouer un rôle privilégié aux lois log-normale (axe vertical), Gamma (branche dans le quadrant gauche) et Gamma Inverse (branche dans le quadrant droit). L'origine correspond à la loi homothétique, cas limite des lois log-normale ($\sigma \rightarrow 0$), Gamma ($L \rightarrow \infty$) et Gamma Inverse ($M \rightarrow \infty$).

Les lois à trois paramètres considérées ici appartiennent alors à des secteurs bien spécifiques (figure 9.2) :

- les lois de Fisher appartiennent à la zone comprise entre la branche de la loi Gamma et celle de la loi Gamma Inverse, ce qui signifie que pour qu'un point du diagramme soit représentable par une loi de Fisher, on doit avoir :

$$|\tilde{\kappa}_3| \leq |\Psi(2, \Psi^{-1}(1, \tilde{\kappa}_2))|$$

avec

$$\Psi^{-1}(1, \tilde{\kappa}_2) = L \Leftrightarrow \Psi(1, L) = \tilde{\kappa}_2$$

Le cas particulier $L = M$ correspond à l'axe vertical (donc le lieu des lois log-normales).

La condition sur le log-cumulant d'ordre 3 peut s'approximer par un RPM (celui de la relation D.1 spécifique à la branche de la loi Gamma).

- les lois Beta appartiennent à la zone comprise entre l'axe horizontal ($\tilde{\kappa}_3 < 0$) et la branche de la loi Gamma, ce qui signifie que pour qu'un point du diagramme soit représentable par une loi Beta, on doit avoir :

$$\tilde{\kappa}_3 \leq \Psi(2, \Psi^{-1}(1, \tilde{\kappa}_2))$$

La condition sur le log-cumulant d'ordre 3 peut s'approximer par un RPM (celui de la relation D.1 spécifique à la branche de la loi Gamma).

- les lois Beta Inverse appartiennent à la zone comprise entre l'axe horizontal ($\tilde{\kappa}_3 > 0$) et la branche de la loi Gamma Inverse. Cette zone est symétrique de celle de la loi Beta.
- les lois \mathcal{K} appartiennent à la zone comprise entre la branche de la loi Gamma et une caustique correspondant au cas particulier de lois \mathcal{K} telles que $L = M$, c'est à dire les lois \mathcal{K} vérifiant :

$$\tilde{\kappa}_r = 2\Psi(r-1, L)$$

On doit alors vérifier deux conditions :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_3 &\geq \Psi(2, \Psi^{-1}(1, \tilde{\kappa}_2)) \\ \tilde{\kappa}_3 &\leq 2\Psi\left(2, \Psi^{-1}\left(1, \frac{\tilde{\kappa}_2}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

La première condition peut s'approximer par un RPM (celui de la relation D.1 spécifique à la branche de la loi Gamma). La seconde condition peut s'approximer par un RPM (celui de la caustique de la loi \mathcal{K} , relation D.2).

- les lois \mathcal{K} Inverse appartiennent à la zone comprise entre la branche de la loi Gamma Inverse et une caustique (correspondant au cas particulier de lois \mathcal{K} Inverse telles que $L = M$). Cette zone est symétrique de celle de la loi \mathcal{K} .

A ces lois s'ajoutent les lois Gamma Généralisées qui occupent des secteurs aussi bien pour les valeurs négatives de $\tilde{\kappa}_3$ (caractérisant des lois “à tête lourde”) que pour les valeurs positives de $\tilde{\kappa}_3$ (caractérisant des lois “à queue lourde”). Il faut noter pour ces lois deux points essentiels :

- Les lois Gamma Généralisées ne peuvent correspondre (dans le cas général) à l'axe vertical puisqu'elles ne sont pas définies pour $\eta = 0$.
- Pour les cas $\eta \rightarrow \infty$ et $\eta \rightarrow -\infty$, connaissant la relation 8.32 (indépendante de η) :

$$\frac{\hat{\kappa}_3^2}{\hat{\kappa}_2^3} = \frac{\Psi(2, \hat{L})^2}{\Psi(1, \hat{L})^3}$$

et à l'aide des propriétés asymptotiques des fonctions Polygamma (relation A.20) on montre facilement que les lois Gamma généralisées ont pour limite une caustique d'équation

$$\tilde{\kappa}_2 = \left(\frac{\tilde{\kappa}_3^2}{4} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (9.1)$$

On a ainsi dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ deux branches symétriques l'une de l'autre vis à vis de l'axe vertical entre lesquelles se placent toutes les lois Gamma Généralisées et qui correspondent aux cas limite $\eta \rightarrow \infty$ et $\eta \rightarrow -\infty$. La condition 9.1 peut s'approximer par un RPM (celui des caustiques de la loi \mathcal{GG} , relation D.4).

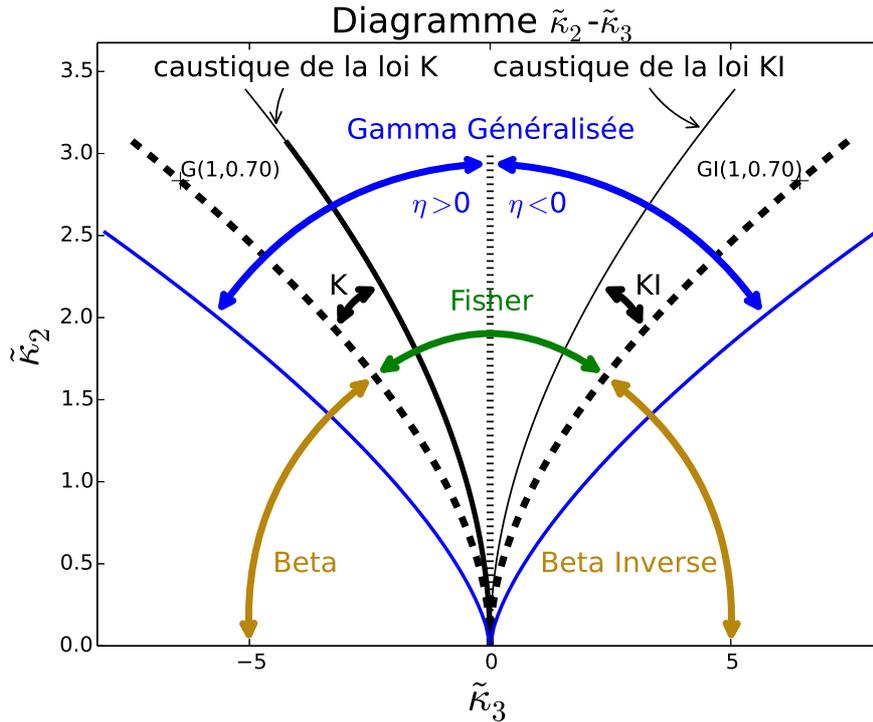


FIGURE 9.2 – Diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ décrivant le comportement d'un certain nombre de lois usuelles. Les branches correspondant aux lois Gamma et Gamma Inverse sont en pointillés gras, celle correspondant à la loi log-normale est en pointillé maigre. Sur ce diagramme sont placées deux exemples : une loi Gamma ($L = 0.70$) et une loi Gamma Inverse ($L = 0.70$).

9.2.2 Lois “en amplitude”

Si l'on se place dans les lois “en amplitude” fondamentales (c'est à dire les lois Nakagami en amplitude et Nakagami Inverse en amplitude, la loi log-normale, la loi de Fisher en amplitude, les lois Beta en amplitude et Beta en amplitude Inverse), auxquelles on rajoute les lois Gamma Généralisées, on obtient un diagramme d'allure tout à fait similaire, à ceci près qu'il a été rajouté un facteur 2 multiplicatif entre l'axe horizontal et l'axe vertical : en effet on a la relation essentielle (relation 2.60) entre les log-cumulants d'une loi en intensité (notés ici $\tilde{\kappa}_{I,r}$) et les log-cumulants de la même loi en amplitude (notés ici $\tilde{\kappa}_{A,r}$) :

$$\tilde{\kappa}_{A,r} = \frac{1}{2^r} \tilde{\kappa}_{I,r} \quad \forall r \geq 2$$

ce qui donne :

$$\frac{\tilde{\kappa}_{A,2}}{\tilde{\kappa}_{A,3}} = 2 \frac{\tilde{\kappa}_{I,2}}{\tilde{\kappa}_{I,3}}$$

A ce facteur près, on retrouve les mêmes allures et les mêmes localisations pour les lois fondamentales, comme l'illustre la figure 9.3.

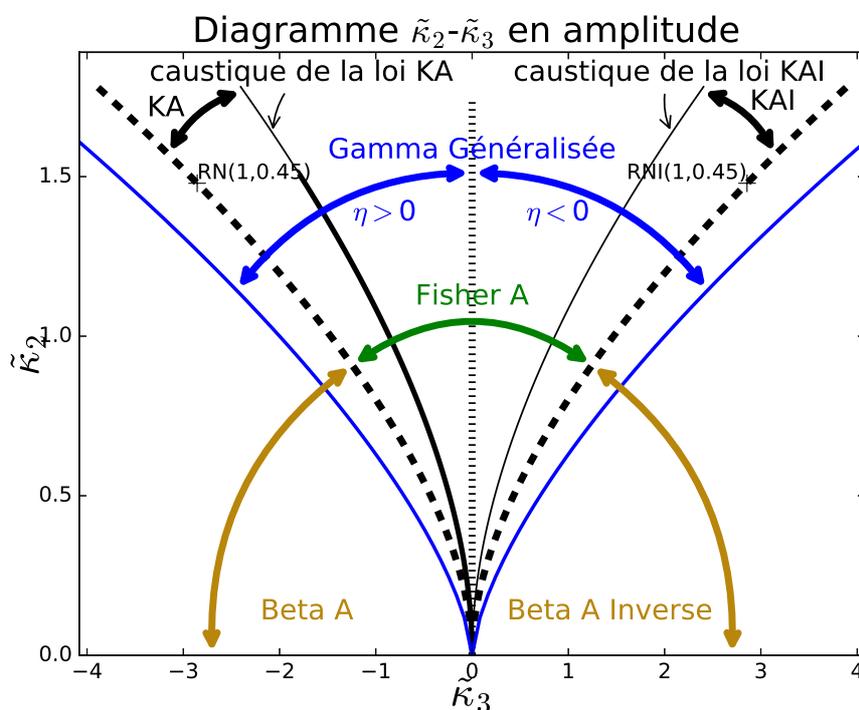


FIGURE 9.3 – Diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ décrivant le comportement d'un certain nombre de lois usuelles (données en amplitude). Le diagramme est dit “en amplitude” car ce sont les lois de Nakagami et de Nakagami Inverse, en pointillé gras, qui servent de référence. Sur ce diagramme sont placées deux exemples : une loi de Nakagami ($L = 0.45$) et une loi de Nakagami Inverse ($L = 0.45$).

9.3 Exemples de lois en amplitude

Nous allons donner quelques illustrations de famille de lois couvrant le secteur compris entre la loi de Nakagami et la loi de Nakagami Inverse, mais en choisissant des paramétrisations de ces lois en posant certaines contraintes pour mieux illustrer la manière dont elles peuvent couvrir ce secteur important du diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ pour les applications courantes en imagerie radar.

9.3.1 La loi de Fisher en amplitude

Pour une loi de Fisher en amplitude $\mathcal{FA}[\mu, L, M]$, les log-cumulants d'ordre 2 et 3 s'écrivent (page 162) :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_2 &= \frac{1}{4}(\Psi(1, L) + \Psi(1, M)) \\ \tilde{\kappa}_3 &= \frac{1}{8}(\Psi(2, L) - \Psi(2, M)) \end{cases}$$

Ceci montre que les lois de Fisher se situent entre les branches des lois de Nakagami et Nakagami inverse dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$. Sur la figure 9.4, on voit à gauche une construction des lois de Fisher en amplitude fixant le paramètre L et faisant varier le paramètre M , et à droite une construction fixant le paramètre M et faisant varier le paramètre L .

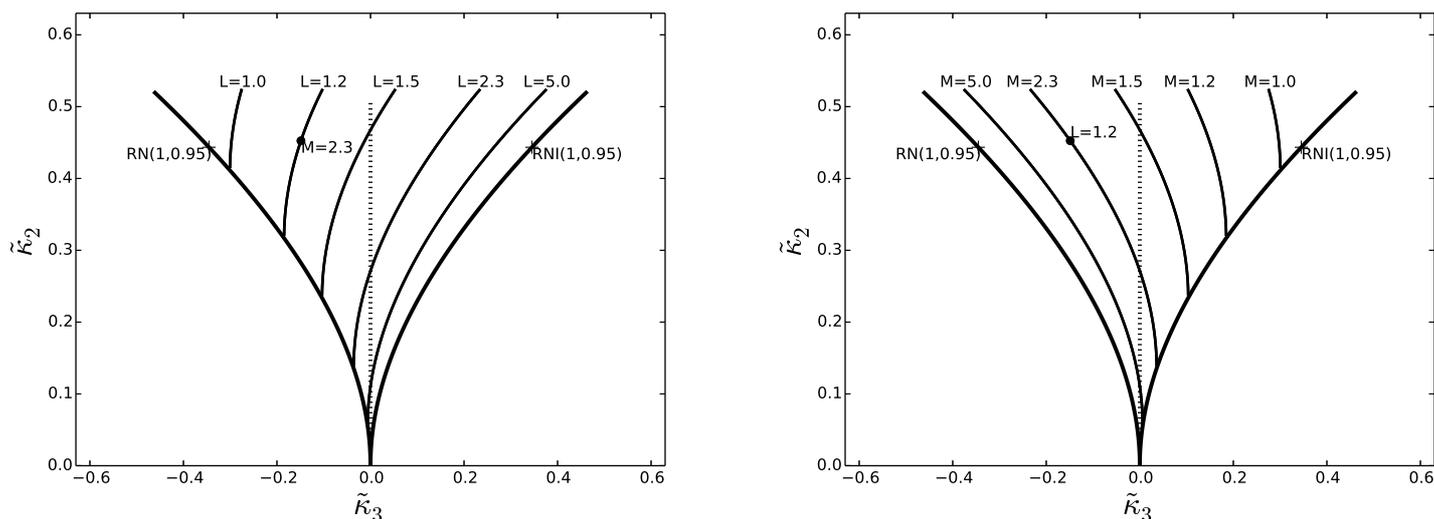


FIGURE 9.4 – Diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ pour les lois de Fisher en amplitude. A gauche, la construction s'effectue en fixant le paramètre L et faisant varier ensuite le paramètre M . A droite, la construction s'effectue en fixant le paramètre M et faisant varier ensuite le paramètre L . La même loi $\mathcal{FA}[\mu, L = 1.2, M = 2.3]$ est représentée dans les deux diagrammes. Cette manière de construire les lois de Fisher dans ce diagramme souligne la propriété d'additivité des log-cumulants

Une autre manière de construire les lois de Fisher en amplitude dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ consiste à les sélectionner selon la relation :

$$M = L + \lambda$$

ou selon (cas de la loi inverse de la précédente) :

$$L = M + \lambda$$

λ étant une constante positive. Cette approche est illustrée figure 9.5 (figure de gauche).

Enfin on peut construire les lois de Fisher en amplitude dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ en les sélectionnant selon la relation :

$$\frac{1}{L} + \frac{1}{M} = \frac{1}{L_0}$$

la valeur L_0 correspondant au paramètre de forme d'une loi de Nakagami de référence. Tout point situé entre les branches des lois de Nakagami et Nakagami inverse est effectivement représenté par une telle loi de Fisher : il appartient à une ligne qui est ainsi référencée par une loi de Nakagami de référence. La figure 9.5 (figure de droite) en donne quelques exemples.

Le lieu des lois log-normales (c'est à dire l'axe des log-cumulants d'ordre 2, *i.e.* $\tilde{\kappa}_3 = 0$) est bien représenté par une loi de Fisher : celle-ci vérifie simplement :

$$L = M$$

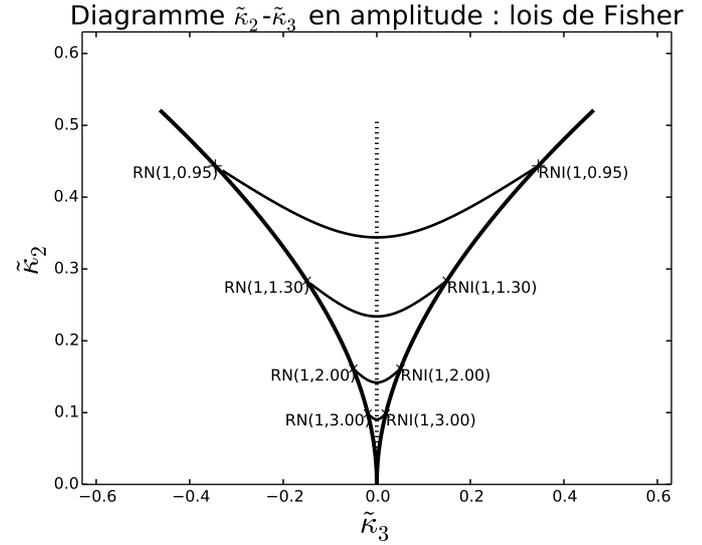
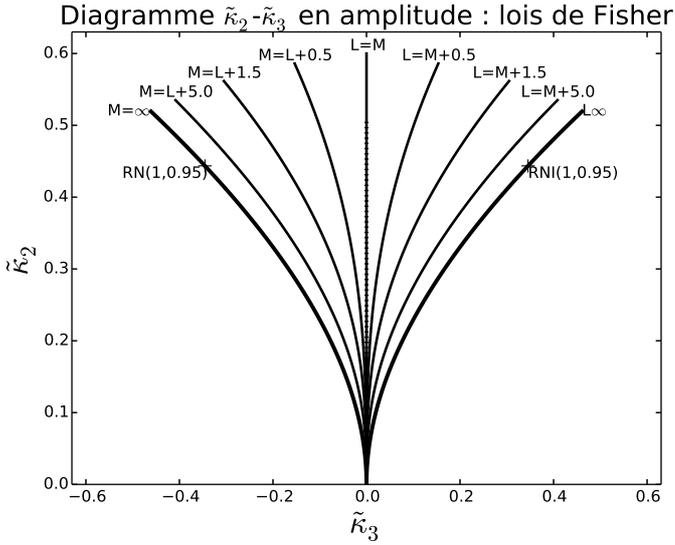


FIGURE 9.5 – A gauche : Diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ pour une catégorie de lois de Fisher en amplitude telles que $|L - M| = Cste$ (avec $L > 0$ et $M > 0$). A droite : Diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ pour une catégorie de lois de Fisher en amplitude telles que $\frac{1}{L} + \frac{1}{M} = Cste$.

9.3.2 La loi Beta en amplitude et la loi Beta en amplitude Inverse

Pour une loi Beta en amplitude $\mathcal{BA}[\mu, L, M]$, les log-moments d'ordre 2 et 3 s'écrivent (page 164) :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_2 &= \frac{1}{4}(\Psi(1, L) - \Psi(1, M)) \\ \tilde{\kappa}_3 &= \frac{1}{8}(\Psi(2, L) - \Psi(2, M)) \end{cases}$$

Les lois Beta en amplitude se situent entre la branches des lois de Nakagami et l'axe horizontal dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ (quadrant de gauche). Sur la figure 9.6 (à gauche), on voit une construction de ces lois en fixant le paramètre L et faisant varier le paramètre M entre les valeurs L et l'infini.

Pour une loi Beta en amplitude Inverse $\mathcal{BAI}[\mu, L, M]$, les log-moments d'ordre 2 et 3 s'écrivent (page 166) :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_2 &= \frac{1}{4}(\Psi(1, L) - \Psi(1, M)) \\ \tilde{\kappa}_3 &= -\frac{1}{8}(\Psi(2, L) - \Psi(2, M)) \end{cases}$$

Les lois Beta en amplitude Inverse se situent entre la branches des lois de Nakagami Inverse et l'axe horizontal dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ (quadrant de droite). Sur la figure 9.6 (à droite), on voit une construction de ces lois en fixant le paramètre L et faisant varier le paramètre M entre les valeurs L et l'infini.

Une autre façon de procéder consiste à les sélectionner selon la relation :

$$M = L + \lambda$$

λ étant une constante positive (figure 9.7).

9.3.3 La loi Gamma Généralisée

Pour une loi Gamma Généralisée $\mathcal{GG}[\mu, L, \eta]$, les log-moments d'ordre 2 et 3 s'écrivent (page 136) :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_2 &= \frac{\Psi(1, L)}{\eta^2} \\ \tilde{\kappa}_3 &= \frac{\Psi(2, L)}{\eta^3} \end{cases}$$

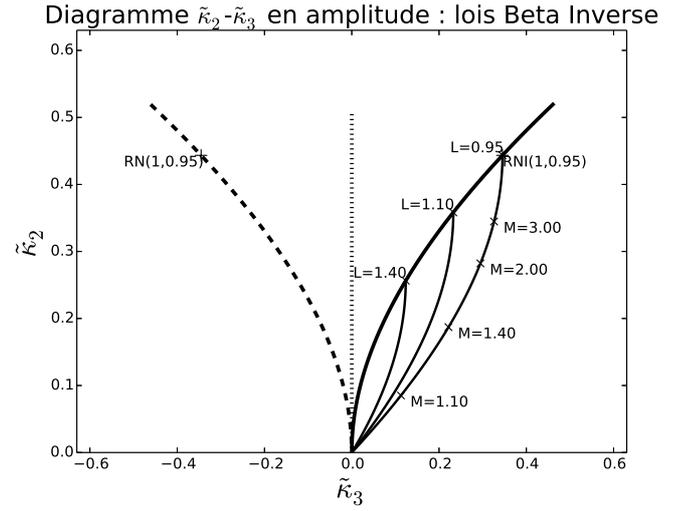
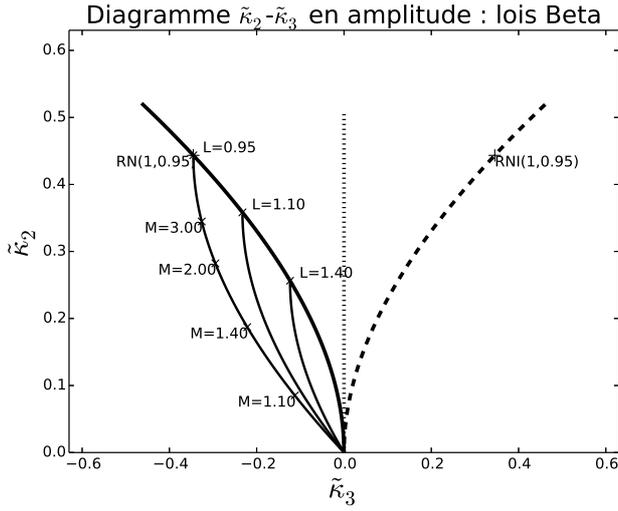


FIGURE 9.6 – A gauche : Diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ pour les lois Beta en amplitude. A droite : Diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ pour les lois Beta en amplitude Inverse. Dans les deux cas, la construction s'effectue en fixant le paramètre L et faisant varier ensuite le paramètre M dans l'intervalle $]L, \infty[$. Cette manière de construire les lois Beta et les lois Beta Inverse dans ce diagramme souligne la propriété d'additivité des log-cumulants

Nous avons déjà montré que, dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$, ces lois sont localisées entre deux caustiques définies par la relation 9.1 :

$$\tilde{\kappa}_2 = \left(\frac{\tilde{\kappa}_3^2}{4} \right)^{\frac{1}{3}}$$

ces deux courbes correspondant aux cas limites $\eta \rightarrow \infty$ (caustique de droite) et $\eta \rightarrow -\infty$ (caustique de gauche). Rappelons que ces caustiques peuvent s'approximer par un RPM (relation D.4).

Aussi une première représentation de la famille des lois Gamma Généralisées dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ (figure 9.8) consiste à choisir une valeur du paramètre η et à faire ensuite varier le paramètre de forme L . Dans cette construction, lois Gamma et Gamma Inverse correspondent à la famille $\eta = 1$ et $\eta = -1$, et lois de Nakagami et Nakagami Inverse correspondent à la famille $\eta = 2$ et $\eta = -2$. Les deux caustiques correspondent aux cas $\eta \rightarrow \infty$ et $\eta \rightarrow -\infty$.

Cependant il faut noter que l'axe vertical (c'est à dire le lieu des lois log-normales, vérifiant $\tilde{\kappa}_3 = 0$) ne peut théoriquement être représenté par une loi Gamma Généralisée : pour avoir la condition $\tilde{\kappa}_3 = 0$, il faut $\eta \rightarrow 0$, ce qui conduit à avoir aussi $\tilde{\kappa}_2 = 0$.

Pour traiter ce cas, on montre aisément que, pour une loi log-normale de paramètre de forme σ , on peut associer une valeur spécifique notée L :

$$L = \frac{1}{\eta^2 \sigma^2} \tag{9.2}$$

et dans ce cas, eu égard aux propriétés asymptotiques des fonctions Polygamma (relation A.19 de l'annexe A) on a pour la loi Gamma Généralisée $\mathcal{GG} \left[\mu, L = \frac{1}{\eta^2 \sigma^2}, \eta \right]$:

$$\begin{aligned} \lim_{\eta=0} \tilde{\kappa}_2 &= \lim_{\eta=0} \frac{\Psi(1, L)}{\eta^2} = \sigma^2 \\ \lim_{\eta=0} \tilde{\kappa}_r &= \lim_{\eta=0} \frac{\Psi(r-1, L)}{\eta^r} = 0 \quad \forall r > 2 \end{aligned}$$

Par ce choix de paramétrisation du paramètre L , on obtient une autre manière de construction des lois Gamma Généralisées dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ (figure 9.8 droite).

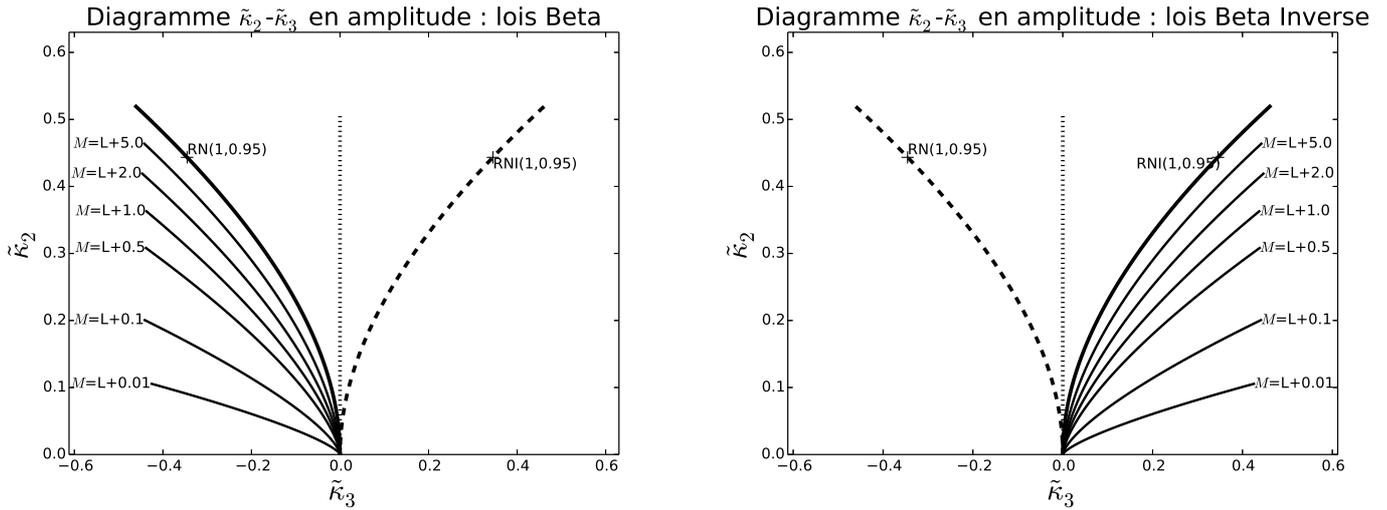


FIGURE 9.7 – A gauche : Diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ pour une catégorie de lois Beta en amplitude telles que $M = L + Cste$. A droite : Diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ pour une catégorie de lois Beta en amplitude Inverse telles que $M = L + Cste$. On peut noter la complémentarité de ces deux figures et celle concernant la loi de Fisher (figure 9.5 gauche).

Enfin, dans un autre mode de représentation des lois Gamma Généralisée, on peut aussi fixer la valeur de η et faire varier le paramètre de forme L : notons que pour $L = 1$, on a alors la loi de Weibull (figure 9.9), qui a comme cas particuliers la loi exponentielle décroissante ($\eta = 1$) et la loi de Rayleigh ($\eta = 2$).

9.3.4 La loi de Halphen modifiée en amplitude

Les log-cumulants des lois de Halphen n'ont pas d'expressions analytiques mais il est cependant aisé de les calculer par un schéma d'intégration numérique.

Deux représentations permettent une forme de comparaison avec les lois de Fisher et les lois Gamma Généralisées :

- une représentation telle que :

$$\beta + \varepsilon = \lambda \quad \beta \geq 0 \quad \varepsilon \geq 0$$

λ étant une constante positive (figure 9.10). On observe que ces lois sont strictement incluses entre les branches des lois de Nakagami et de Nakagami Inverse. Les cas limites $\beta = 0$ et $\varepsilon = 0$ correspondent respectivement aux lois Nakagami Inverse et Nakagami. Elles sont correctement représentées sur l'axe des lois log-normales (cas $\beta = \varepsilon$).

- une représentation telle que :

$$|\beta - \varepsilon| = \lambda \quad \beta \geq 0 \quad \varepsilon \geq 0$$

λ étant une constante positive (figure 9.11). On observe que ces lois sont strictement incluses entre les branches des lois de Nakagami et de Nakagami Inverse. Les cas limites $\beta = 0$ et $\varepsilon = 0$ correspondent aux lois Nakagami Inverse et Nakagami. Elles sont correctement représentées sur l'axe des lois log-normales (cas $\beta = \varepsilon$).

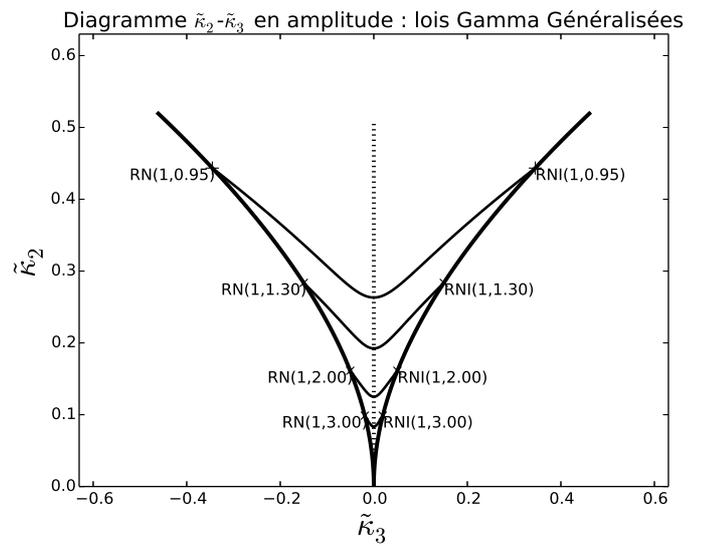
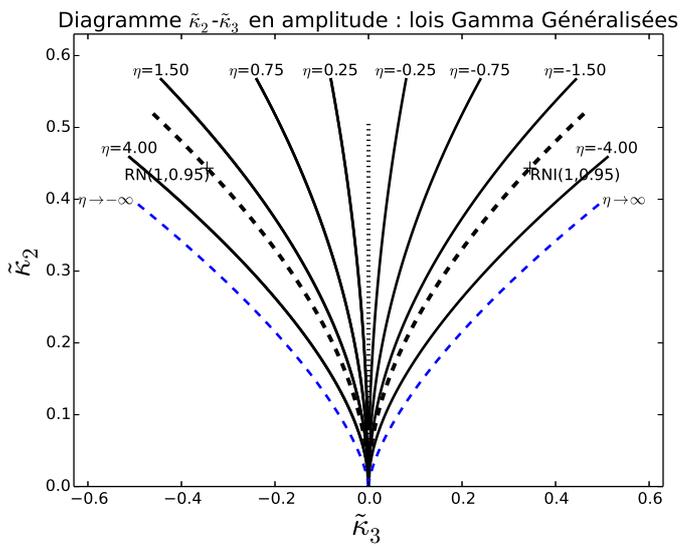


FIGURE 9.8 – Diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ pour les lois Gamma Généralisées. A gauche : branches correspondant à des paramètres η donnés pour lesquelles on fait varier $L \in]0, \infty[$. A droite : branches correspondant, pour η donné, à des paramètres L tels que $L = \frac{1}{\eta^2 \sigma^2}$. Les lois de Nakagami et de Nakagami Inverse sont représentées en pointillés gras : elles correspondent aux cas $\eta = 2$ et $\eta = -2$. La limite de la zone des lois Gamma Généralisées (cas $\eta \rightarrow \infty$ et $\eta \rightarrow -\infty$) est donnée par les caustiques vérifiant la relation 9.1, tracées en pointillés simples.

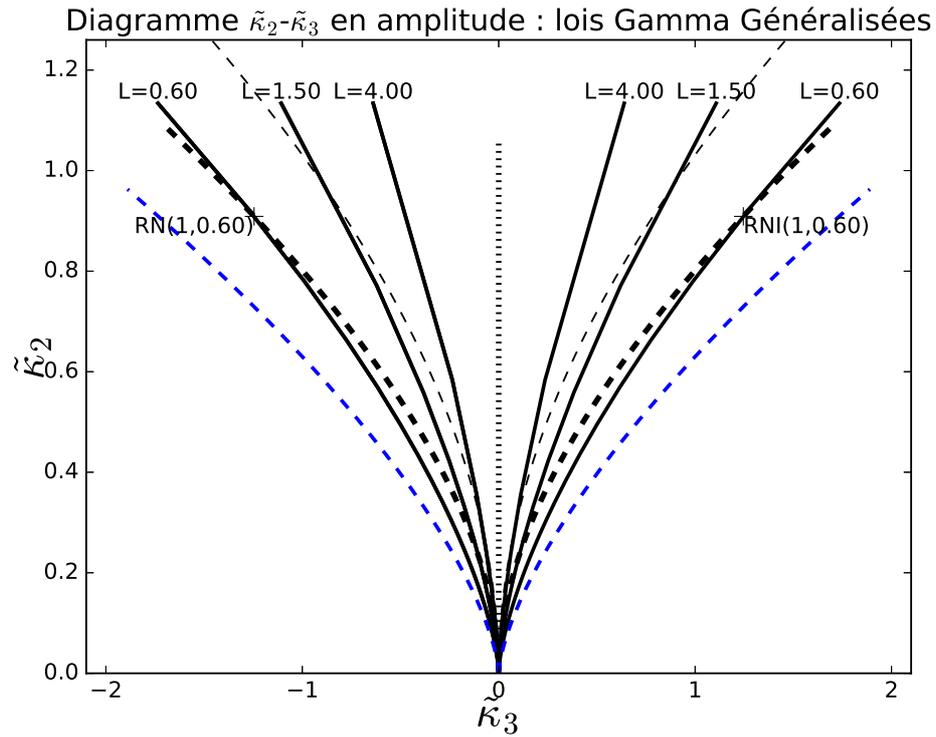


FIGURE 9.9 – Diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ pour une catégorie de lois Gamma Généralisée telles que $L = Cste$. Le diagramme est “en amplitude” car ce sont les lois de Nakagami et Nakagami Inverse qui servent de référence (en pointillé gras). Les loi Gamma et Gamma inverse sont en pointillé fins. Il est intéressant de noter que dans cette représentation, les courbes intersectent les lois Gamma en $\eta = 1$ et les lois de Nakagami en $\eta = 2$. Les deux caustiques limites localisant l’ensemble des lois Gamma Généralisées (données par l’équation 9.1) sont en pointillé maigre.

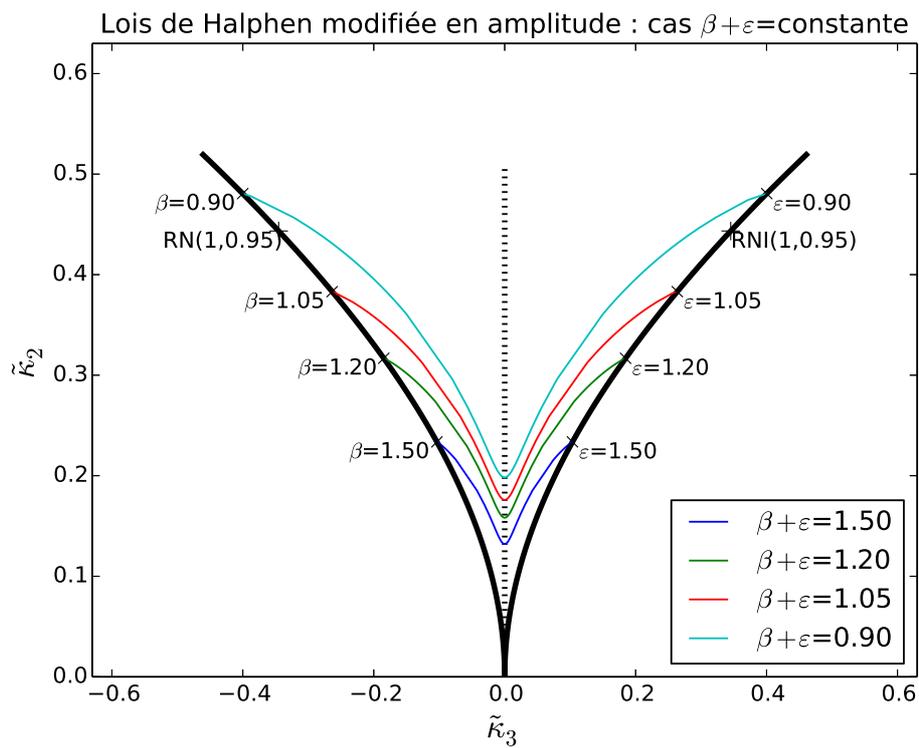


FIGURE 9.10 – Diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ pour une catégorie de lois de Halphen modifiées en amplitude telles que $\beta + \varepsilon = Cste$.

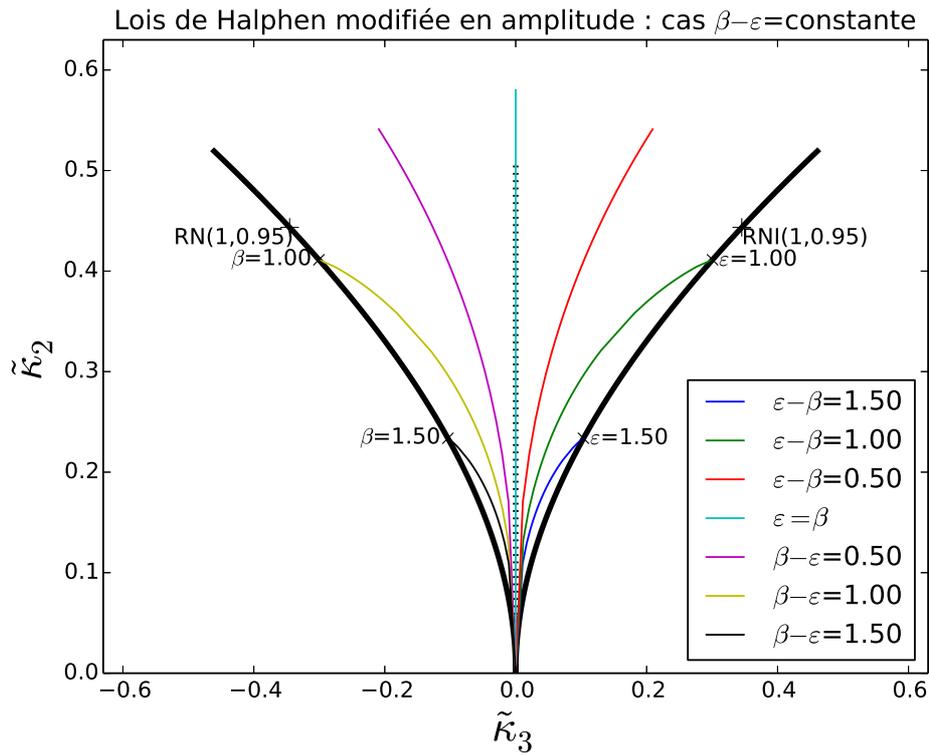


FIGURE 9.11 – Diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ pour une catégorie de lois de Halphen modifiées en amplitude telles que $|\beta - \varepsilon| = Cste$ (et telles que $\beta \geq 0$ et $\varepsilon \geq 0$). Chaque branche a pour extrémités l'origine (la loi homothétique) et un point de la branche des lois de Nakagami (cas $\varepsilon = 0$) ou de la branche des lois de Nakagami Inverse (cas $\beta = 0$).

9.4 Cas de mélanges additifs de lois

9.4.1 Mélanges de lois Gamma

Un problème important en pratique (en particulier en imagerie RSO) est celui des mélanges de lois Gamma. Contrairement au cas gaussien, on obtient le plus souvent des d.d.p. unimodales, sauf lorsque les deux lois initiales sont très différentes. Nous allons montrer qu'il existe cependant une solution simple pour déterminer les paramètres du mélange en analysant ce problème à l'aide des log-cumulants d'ordre 2 et 3.

Considérons le mélange additif de lois Gamma suivant :

$$\lambda \mathcal{G}[\mu, L] + \lambda' \mathcal{G}[\mu', L]$$

avec $\lambda \geq 0$, $\lambda' \geq 0$ et $\lambda + \lambda' = 1$. Dans ce modèle, nous prenons la même valeur L pour les deux lois Gamma.

On peut réécrire ce modèle en définissant la variable ρ telle que $\mu' = \rho\mu$, ce qui permet d'écrire le mélange sous la forme suivante :

$$\lambda \mathcal{G}[\mu, L] + (1 - \lambda) \mathcal{G}[\rho\mu, L] \quad (9.3)$$

Le mélange est alors défini par une loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L]$ (correspondant à une seule des composantes du mélange) et deux paramètres décrivant ce mélange : λ et ρ .

La fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit :

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \lambda \phi_{\mathcal{G}[\mu, L]}(s) + (1 - \lambda) \phi_{\mathcal{G}[\rho\mu, L]}(s) \\ &= (\lambda + (1 - \lambda)\rho^{s-1}) \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L + s - 1)}{L^{s-1} \Gamma(L)}. \end{aligned}$$

A partir de cette expression, un calcul des log-cumulants peut se mener directement, donnant les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_1 &= \Psi(L) - \log L + \log \mu + (1 - \lambda) \log \rho \\ \tilde{\kappa}_2 &= \Psi(1, L) + \log(\rho)^2 \lambda (1 - \lambda) \\ \tilde{\kappa}_3 &= \Psi(2, L) + \log(\rho)^3 \lambda (1 - \lambda) (2\lambda - 1) \end{aligned}$$

Remarquons qu'à partir de l'ordre 2, ces log-cumulants ne dépendent pas de μ et ont pour les valeurs limites $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$ la même expression que la loi Gamma standard.

Supposons que la grandeur L soit connue (L peut en effet se concevoir comme une fonction d'appareil, et donc être connue de l'expérimentateur). On pose alors :

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{\kappa}_2} &= \tilde{\kappa}_2 - \Psi(1, L) \\ \overline{\tilde{\kappa}_3} &= \tilde{\kappa}_3 - \Psi(2, L) \end{aligned}$$

λ et ρ sont alors donnés par les solutions d'une équation du second degré, ce qui donne :

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\overline{\tilde{\kappa}_3}}{\sqrt{4\overline{\tilde{\kappa}_2}^3 + \overline{\tilde{\kappa}_3}^2}} \right) \quad (9.4)$$

$$\rho = e^{\frac{\sqrt{4\overline{\tilde{\kappa}_2}^3 + \overline{\tilde{\kappa}_3}^2}}{\overline{\tilde{\kappa}_2}}} \quad (9.5)$$

9.4.2 Mélange additif de lois de Rayleigh-Nakagami

Comme dans le cas précédent (équation 9.3), on peut écrire un mélange de lois de Rayleigh Nakagami de même paramètre de forme L , mais de paramètre d'échelle μ et $\rho\mu$:

$$\lambda \mathcal{RN}[\mu, L] + (1 - \lambda) \mathcal{RN}[\rho\mu, L]$$

La fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit :

$$\begin{aligned}\phi(s) &= \lambda \phi_{\mathcal{RN}[\mu, L]}(s) + (1 - \lambda) \phi_{\mathcal{RN}[\rho\mu, L]}(s) \\ &= (\lambda + (1 - \lambda)\rho^{s-1}) \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L + \frac{s-1}{2})}{L^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(L)}.\end{aligned}$$

En suivant la même démarche qu'au paragraphe précédent, on obtient :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_1 &= \frac{1}{2} (\Psi(L) - \log L) + \log \mu + (1 - \lambda) \log \rho \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{1}{4} (\Psi(1, L)) + \log(\rho)^2 \lambda (1 - \lambda) \\ \tilde{\kappa}_3 &= \frac{1}{8} (\Psi(2, L)) + \log(\rho)^3 \lambda (1 - \lambda) (2\lambda - 1)\end{aligned}$$

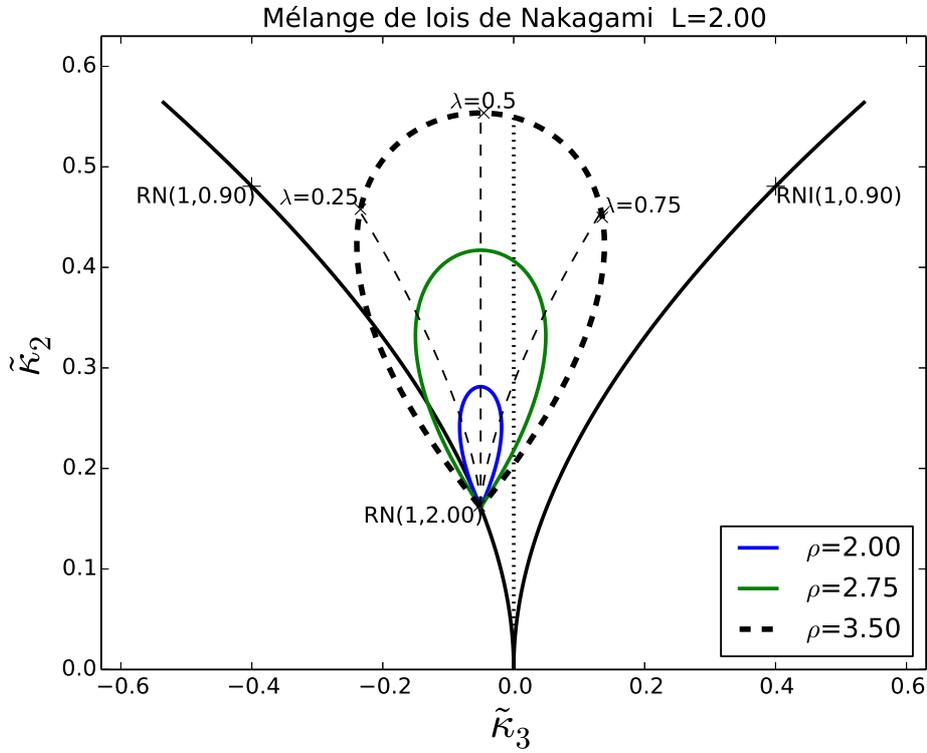


FIGURE 9.12 – Diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ pour un mélange additif de lois de Rayleigh-Nakagami.

Le système se résout comme dans le cas des données en intensité (relations 9.4 et 9.5).

9.4.3 Mélange additif de lois de Rayleigh-Nakagami et Rayleigh-Nakagami Inverse

Comme dans le cas précédent (équation 9.3), on peut écrire un mélange d'une loi de Rayleigh Nakagami avec une pénalisant loi de Rayleigh Nakagami Inverse de même paramètre de forme L :

$$(1 - \lambda) \mathcal{RN}[\rho\mu, L] + \lambda \mathcal{RN}\mathcal{I}[\mu, L]$$

La fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit :

$$\begin{aligned}\phi(s) &= \lambda \phi_{\mathcal{RN}[\mu,L]}(s) + (1-\lambda) \phi_{\mathcal{RNI}[\mu,L]}(s) \\ &= \frac{\mu^{s-1}}{\Gamma(L)} \left((1-\lambda) \frac{\Gamma(L + \frac{s-1}{2})}{L^{\frac{s-1}{2}}} + \lambda \frac{\Gamma(L + \frac{1-s}{2})}{L^{\frac{1-s}{2}}} \right)\end{aligned}$$

En suivant la même démarche qu'au paragraphe précédent, on obtient :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_2 &= \frac{1}{4} \Psi(1, L) + (\Psi(L) - \log L)^2 \lambda (1-\lambda) \\ \tilde{\kappa}_3 &= \frac{1}{8} (1-2\lambda) \Psi(2, L) - (\Psi(L) - \log L)^3 \lambda (1-\lambda) (1-2\lambda)\end{aligned}$$

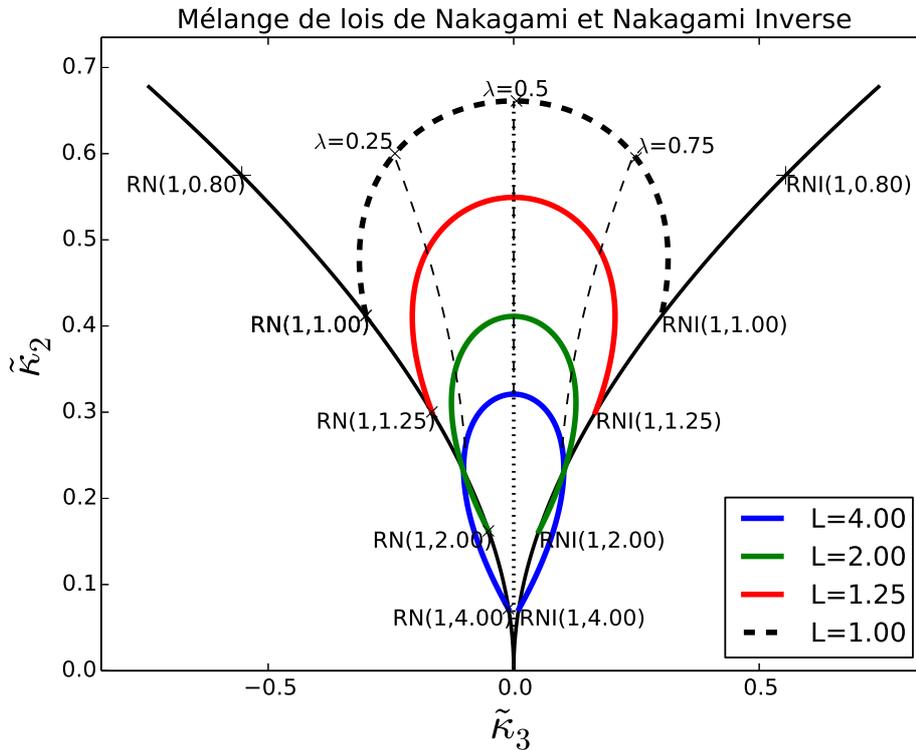


FIGURE 9.13 – Diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ pour un mélange additif de lois de Rayleigh-Nakagami et de Rayleigh-Nakagami Inverse

9.5 Conclusion

Le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ permet des illustrations des types de lois rencontrés en imagerie cohérente bien mieux adaptées que le diagramme de Pearson ($\beta_1 - \beta_2$). Il est intéressant de noter qu'un même point de ce diagramme peut correspondre à plusieurs lois possibles : des pistes permettant d'approfondir ce point seront abordées dans le chapitre 10. Certaines considérations pratiques entrent alors en compte, pouvant écarter par exemple la loi Gamma Généralisée (problème de continuité en $\eta = 0$) ou la loi de Halphen (pas d'expression analytique des log-cumulants). Ces comparaisons sont à mener avec l'aide d'outils assez classiques, comme ceux dérivés des statistiques traditionnelles (développement d'Edgeworth), mais qui doivent bien nécessairement être adaptés aux log-statistiques (certains éléments sont abordés dans [35]).

Chapitre 10

Distances entre lois

Cette dernière partie propose une ébauche sur la notion de distance entre lois revue à l'aune des log-statistiques. Les deux notions classiques de distance : la distance de Kullback-Leibler et celle de Kolmogorov-Smirnov sont ainsi décrites sur des cas réalistes. Cependant, la généralisation de ces approches est encore à prospecter sur le plan théorique, tant pour la distance de Kullback-Leibler – qui bute sur certaines difficultés dès lors que les lois n'appartiennent pas à la famille exponentielle – que pour la distance de Kolmogorov-Smirnov – qui présente de sérieux problèmes d'intégration dans le plan complexe –.

10.1 Distance de Kullback-Leibler (DKL)

10.1.1 Définition et calculs préliminaires

La distance de Kullback-Leibler entre deux lois de probabilité $p(x)$ et $q(x)$ est donnée par la relation :

$$DKL(p, q) = \int p(x) \log \left(\frac{p(x)}{q(x)} \right) dx \quad (10.1)$$

Elle présente les propriétés suivantes :

- $DKL(p, q) = 0 \Leftrightarrow p(x) = q(x) \forall x$
- $DKL(p, q) \neq DKL(q, p)$

Un point délicat de la distance de Kullback-Leibler se trouve aux bornes de l'intégrale. En effet, pour un grand nombre de lois définies sur \mathbb{R}^+ (par exemple la loi Gamma, la loi de Fisher, . . .), l'expression 10.1 s'écrit :

$$DKL(p, q) = \int_0^{\infty} p(x) \log \left(\frac{p(x)}{q(x)} \right) dx$$

Il faudra alors vérifier l'existence des termes intégraux à l'origine et à l'infini.

En revanche, si on veut calculer la distance de Kullback-Leibler entre une loi $p(x)$ dont le support est \mathbb{R}^+ et une autre loi $q(x)$ dont le support est borné sur \mathbb{R}^+ , comme par exemple la loi Beta, définie sur un compact $[0, B]$, d'une part l'existence de l'intégrale n'a de sens que sur ce support $[0, B]$ et d'autre part les deux lois doivent vérifier à l'origine et en B la relation :

$$p(x) \log(q(x)) \quad \text{fini}$$

Sur le plan analytique, il pourra s'avérer judicieux de décomposer la relation 10.1 en deux termes intermédiaires :

$$\begin{aligned}DKI(p, p) &= \int p(x) \log p(x) dx \\DKI(p, q) &= \int p(x) \log q(x) dx\end{aligned}$$

On en déduit :

$$DKL(p, q) = DKI(p, p) - DKI(p, q)$$

10.1.2 Calculs intermédiaires pour la famille exponentielle

Dans le cas particulier où les lois p et q appartiennent à la famille exponentielle, la distance de Kullback $DKL(p, q)$ s'exprime assez simplement à l'aide des moments et des log-moments de la loi p . Nous allons dans ce paragraphe nous focaliser sur trois cas : celui des lois Gamma (loi Gamma et loi Gamma inverse) et celui de la loi log-normale.

– Si $q(x)$ est la loi Gamma $\mathcal{G}[\mu_q, L_q]$, on peut écrire :

$$\log(\mathcal{G}[\mu_q, L_q](x)) = \log\left(\left(\frac{L_q}{\mu_q}\right)^{L_q} \frac{1}{\Gamma(L_q)}\right) + (L_q - 1) \log x - \frac{L_q}{\mu_q} x$$

On en déduit alors que, pour toute densité de probabilité $p(x)$ dont le premier moment m_1 est défini et dont on connaît le premier log-cumulant $\tilde{\kappa}_1$, on obtient le résultat intermédiaire suivant :

$$\begin{aligned} DKI(p, \mathcal{G}[\mu_q, L_q]) &= \int p(x) \log(\mathcal{G}[\mu_q, L_q](x)) dx \\ &= \log\left(\left(\frac{L_q}{\mu_q}\right)^{L_q} \frac{1}{\Gamma(L_q)}\right) + (L_q - 1)\tilde{\kappa}_1 - \frac{L_q}{\mu_q} m_1 \end{aligned} \quad (10.2)$$

– Si $q(x)$ est la loi Gamma Inverse $\mathcal{GI}[L_q, \mu_q]$, on peut écrire :

$$\log(\mathcal{GI}[L_q, \mu_q](x)) = \log\left((L_q \mu_q)^{L_q} \frac{1}{\Gamma(L_q)}\right) - (L_q + 1) \log x - L_q \mu_q \frac{1}{x}$$

On en déduit alors que, pour toute densité de probabilité $p(x)$ dont le moment d'ordre -1 m_{-1} est défini et dont on connaît le premier log-cumulant $\tilde{\kappa}_1$, on obtient le résultat intermédiaire suivant :

$$\begin{aligned} DKI(p, \mathcal{GI}[L_q, \mu_q]) &= \int p(x) \log(\mathcal{GI}[L_q, \mu_q](x)) dx \\ &= \log\left((L_q \mu_q)^{L_q} \frac{1}{\Gamma(L_q)}\right) - (L_q + 1)\tilde{\kappa}_1 - L_q \mu_q m_{-1} \end{aligned} \quad (10.3)$$

– Si $q(x)$ est la loi Gamma Généralisée $\mathcal{GG}[\mu, L, \eta]$, on peut écrire :

$$\log(\mathcal{GG}[\mu, L, \eta]) = \log\left(|\eta| \left(\frac{L_q}{\mu_q^\eta}\right)^{L_q} \frac{1}{\Gamma(L_q)}\right) + (\eta_q L_q - 1) \log x - \frac{L_q}{\mu_q^\eta} x^{\eta_q}$$

On en déduit alors que, pour toute densité de probabilité $p(x)$ dont le moment d'ordre η_q m_{η_q} est défini et dont on connaît le premier log-cumulant $\tilde{\kappa}_1$, on obtient le résultat intermédiaire suivant :

$$\begin{aligned} DKI(p, \mathcal{GG}[L_q, \mu_q]) &= \int p(x) \log(\mathcal{GG}[L_q, \eta_q](x)) dx \\ &= \log\left(|\eta| \left(\frac{L_q}{\mu_q^\eta}\right)^{L_q} \frac{1}{\Gamma(L_q)}\right) + (\eta_q L_q - 1) \tilde{\kappa}_1 - \frac{L_q}{\mu_q^\eta} m_{\eta_q} \end{aligned} \quad (10.4)$$

On peut vérifier qu'en posant $\eta = 1$ on retrouve la relation 10.2 et qu'avec $\eta = -1$ on retrouve la relation 10.3.

10.1.3 Calculs intermédiaires pour la loi de Fisher

Soit une loi de Fisher :

$$\mathcal{F}[\mu, L, M](x) = \frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{\left(\frac{Lx}{M\mu}\right)^{L-1}}{\left(1 + \frac{Lx}{M\mu}\right)^{L+M}} \quad (10.5)$$

Un résultat peu trivial est le suivant :

$$\int_0^\infty \mathcal{F}[\mu, L, M](x) \log \left(1 + \frac{Lx}{M\mu} \right)^{L+M} dx = (L+M) (\Psi(L+M) - \Psi(M)) \quad (10.6)$$

C'est en fait un cas particulier d'une expression du Gradshteyn ([15], p558 formule 14) :

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1} \log(\gamma+x)}{(\gamma+x)^\nu} dx = \gamma^{\mu-\nu} \frac{\Gamma(\mu) \Gamma(\nu-\mu)}{\Gamma(\nu)} (\Psi(\nu) - \Psi(\nu-\mu) + \log \gamma)$$

c'est à dire :

$$\int_0^\infty \frac{x^{L-1} \log(1+x)}{(1+x)^{L+M}} dx = \frac{\Gamma(L) \Gamma(M)}{\Gamma(L+M)} (\Psi(L+M) - \Psi(M))$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathcal{F}[\mu, L, M](x) \log(\mathcal{F}[\mu, L, M](x)) dx &= \int_0^\infty \mathcal{F}[\mu, L, M](x) \log \left(\frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{\left(\frac{Lx}{M\mu}\right)^{L-1}}{\left(1+\frac{Lx}{M\mu}\right)^{L+M}} \right) dx \\ &= \log \left(\frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \right) + \int_0^\infty \mathcal{F}[\mu, L, M](x) \log \left(\frac{Lx}{M\mu} \right)^{L-1} dx - \int_0^\infty \mathcal{F}[\mu, L, M](x) \log \left(1 + \frac{Lx}{M\mu} \right)^{L+M} dx \\ &= \log \left(\frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \right) + L \log \left(\frac{L}{M\mu} \right) + \int_0^\infty \mathcal{F}[\mu, L, M](x) \log(x^{L-1}) dx - (L+M) (\Psi(L+M) - \Psi(M)) \\ &= \log \left(\frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \right) + L \log \left(\frac{L}{M\mu} \right) + (L-1) (\log \mu + (\Psi(L) - \log(L)) - (\Psi(M) - \log(M))) \\ &\quad - (L+M) (\Psi(L+M) - \Psi(M)) \\ &= \log \left(\frac{L}{M\mu} \right) + \log \left(\frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \right) + (L-1) ((\Psi(L)) - (\Psi(M))) \\ &\quad - (L+M) (\Psi(L+M) - \Psi(M)) \\ &= \log \left(\frac{L}{M\mu} \right) + \log \left(\frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \right) + (L-1)\Psi(L) + (M+1)\Psi(M) - (L+M) \Psi(L+M) \end{aligned} \quad (10.7)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} DKI(\mathcal{F}[\mu, L, M], \mathcal{F}[\mu, L, M]) &= \\ \log \left(\frac{L}{M\mu} \right) + \log \left(\frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \right) + (L-1)\Psi(L) + (M+1)\Psi(M) - (L+M) \Psi(L+M) \end{aligned} \quad (10.8)$$

10.1.4 Résultats : Distance de Kullback-Leibler entre deux lois Gamma

Pour deux lois Gamma $\mathcal{G}[\mu_p, L_p]$ et $\mathcal{G}[\mu_q, L_q]$, connaissant la relation 10.2, le moment d'ordre 1 de la loi $\mathcal{G}[\mu_p, L_p]$:

$$m_1 = \mu_p$$

et le log-cumulant d'ordre 1 de la loi $\mathcal{G}[\mu_p, L_p]$:

$$\tilde{\kappa}_1 = \log(\mu_p) + \Psi(L_p) - \log(L_p)$$

ainsi que le moment d'ordre 1 de la loi $\mathcal{G}[\mu_q, L_q]$:

$$m_1 = \mu_q$$

et le log-cumulant d'ordre 1 de la loi $\mathcal{G}[\mu_q, L_q]$:

$$\tilde{\kappa}_1 = \log(\mu_q) + \Psi(L_q) - \log(L_q)$$

on a :

$$DKL(\mathcal{G}[\mu_p, L_p], \mathcal{G}[\mu_q, L_q]) = DKI(\mathcal{G}[\mu_p, L_p], \mathcal{G}[\mu_p, L_p]) - DKI(\mathcal{G}[\mu_p, L_p], \mathcal{G}[\mu_q, L_q])$$

avec

$$DKI(\mathcal{G}[\mu_p, L_p], \mathcal{G}[\mu_p, L_p]) = \log \left(\left(\frac{L_p}{\mu_p} \right)^{L_p} \frac{1}{\Gamma(L_p)} \right) + (L_p-1) (\log(\mu_p) + \Psi(L_p) - \log(L_p)) - \frac{L_p}{\mu_p} (\mu_p)$$

et

$$DKI(\mathcal{G}[\mu_p, L_p], \mathcal{G}[\mu_q, L_q]) = \log \left(\left(\frac{L_q}{\mu_q} \right)^{L_q} \frac{1}{\Gamma(L_q)} \right) + (L_q - 1) (\log(\mu_p) + \Psi(L_p) - \log(L_p)) - \frac{L_q}{\mu_q} (\mu_p)$$

ce qui donne :

$$DKL(\mathcal{G}[\mu_p, L_p], \mathcal{G}[\mu_q, L_q]) = \log \left(\left(\frac{L_p}{\mu_p} \right)^{L_p} \left(\frac{\mu_q}{L_q} \right)^{L_q} \frac{\Gamma(L_q)}{\Gamma(L_p)} \right) + (L_p - L_q) (\log(\mu_p) + \Psi(L_p) - \log(L_p)) - L_p + L_q \frac{\mu_p}{\mu_q} \quad (10.9)$$

10.1.5 Résultats : Distance de Kullback-Leibler entre une loi de Fisher et une loi Gamma

Par un calcul similaire, on obtient une expression analytique de la distance de Kullback entre une loi de Fisher $\mathcal{F}[\mu, L, M]$ et une loi Gamma :

$$DKL(\mathcal{F}[\mu, L, M], \mathcal{G}[\mu', L']) = \log \left(\frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \right) + (L-1)\Psi(L) + (M+1)\Psi(M) - (L+M)\Psi(L+M) - L' \log \left(\frac{L'}{\mu'} \right) + \log \Gamma(L') + \frac{L'}{\mu'} \frac{M}{M-1} \mu - (L'-1) \left(\log \left(\frac{M\mu}{L} \right) + \Psi(L) - \Psi(M) \right) \quad (10.10)$$

10.2 La distance de Kolmogorov-Smirnov

10.2.1 Définition

La distance de Kolmogorov-Smirnov entre deux lois de probabilité $p(x)$ et $q(x)$ dont les fonctions de répartition sont respectivement $\mathcal{FR}_p(x)$ et $\mathcal{FR}_q(x)$ est donnée par la relation :

$$DKS(p, q) = \int (\mathcal{FR}_p(x) - \mathcal{FR}_q(x))^2 dx$$

Elle présente les propriétés suivantes :

- $DKS(p, q) = 0 \Leftrightarrow p(x) = q(x) \forall x$
- $DKS(p, q) = DKS(q, p)$

Cette distance est aisée à appliquer dès lors que l'on connaît la fonction de répartition des lois de probabilités analysées, ce qui est le cas des lois rencontrées dans ce document qui sont presque toutes exprimables sous forme de fonction de Meijer.

Les exemples qui seront choisis dans ce paragraphe ne relèvent que des lois "classiques", c'est à dire les lois en intensité : au lecteur de refaire les calculs pour les lois en amplitude.

10.2.2 Une propriété intégrale des fonctions de Meijer

Soient deux fonctions de Meijer, $\bar{G}_{p,q}^{m,n}$ et $\bar{G}_{r,s}^{k,l}$, dont la définition est donnée par les deux relations suivantes :

$$\bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} ; \begin{array}{l} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} x^{-s} ds \quad (10.11)$$

$$\bar{G}_{r,s}^{k,l} \left(x \left| \begin{array}{cc} c_1, \dots, c_l & ; & c_{l+1}, \dots, c_r \\ d_1, \dots, d_k & ; & d_{k+1}, \dots, d_s \end{array} \right. \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^k \Gamma(d_j + s) \prod_{j=1}^l \Gamma(1 - c_j - s)}{\prod_{j=k+1}^s \Gamma(1 - d_j - s) \prod_{j=l+1}^r \Gamma(c_j + s)} x^{-s} ds \quad (10.12)$$

Dans la mesure où elle vérifient un certain nombre de propriétés, il est possible d'écrire ([7], p 422) :

$$\int_0^\infty \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(\alpha x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; & a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; & b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \bar{G}_{r,s}^{k,l} \left(\beta x \left| \begin{array}{cc} c_1, \dots, c_l & ; & c_{l+1}, \dots, c_r \\ d_1, \dots, d_k & ; & d_{k+1}, \dots, d_s \end{array} \right. \right) dx = \frac{1}{\alpha} \bar{G}_{q+r,p+s}^{k+n,l+m} \left(\frac{\beta}{\alpha} \left| \begin{array}{cc} -b_1, \dots, -b_m, c_1, \dots, c_l & ; & c_{l+1}, \dots, c_r, -b_{m+1}, \dots, -b_q \\ -a_1, \dots, -a_n, d_1, \dots, d_k & ; & d_{k+1}, \dots, d_s, -a_{n+1}, \dots, -a_p \end{array} \right. \right) \quad (10.13)$$

dont la transformée de Mellin s'écrit :

$$\frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(-a_j + s) \prod_{j=1}^k \Gamma(d_j + s)}{\prod_{j=k+1}^s \Gamma(1 - d_j - s) \prod_{j=n+1}^q \Gamma(1 + a_j - s)} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(1 + b_j - s) \prod_{j=1}^l \Gamma(1 - c_j - s)}{\prod_{j=l+1}^r \Gamma(c_j + s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(-b_j + s)} \quad (10.14)$$

10.2.3 Distance de Kolmogorov-Smirnov entre deux lois Gamma

Considérons deux lois Gamma : $\mathcal{G}[\mu_1, L_1]$ et $\mathcal{G}[\mu_2, L_2]$. Elles s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}[\mu_1, L_1](x) &= \frac{1}{\Gamma(L_1)} \frac{L_1}{\mu_1} \left(\frac{L_1 x}{\mu_1} \right)^{L_1-1} e^{-\frac{L_1 x}{\mu_1}} = \frac{L_1}{\mu_1} \frac{1}{\Gamma(L_1)} \bar{G}_{0,1}^{1,0} \left(\frac{L_1 x}{\mu_1} \left| \begin{array}{cc} \cdot & ; & \cdot \\ L_1 - 1 & ; & \cdot \end{array} \right. \right) \\ \mathcal{G}[\mu_2, L_2](x) &= \frac{1}{\Gamma(L_2)} \frac{L_2}{\mu_2} \left(\frac{L_2 x}{\mu_2} \right)^{L_2-1} e^{-\frac{L_2 x}{\mu_2}} = \frac{L_2}{\mu_2} \frac{1}{\Gamma(L_2)} \bar{G}_{0,1}^{1,0} \left(\frac{L_2 x}{\mu_2} \left| \begin{array}{cc} \cdot & ; & \cdot \\ L_2 - 1 & ; & \cdot \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

et leur fonction de répartition s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{FR}_{\mathcal{G}}[\mu_1, L_1](x) &= \frac{1}{\Gamma(L_1)} \bar{G}_{1,2}^{1,1} \left(\frac{L_1 x}{\mu_1} \left| \begin{array}{cc} 1 & ; & \cdot \\ L_1 & ; & 0 \end{array} \right. \right) \\ \mathcal{FR}_{\mathcal{G}}[\mu_2, L_2](x) &= \frac{1}{\Gamma(L_2)} \bar{G}_{1,2}^{1,1} \left(\frac{L_2 x}{\mu_2} \left| \begin{array}{cc} 1 & ; & \cdot \\ L_2 & ; & 0 \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

En appliquant la relation 10.13, on peut écrire :

$$\int_0^\infty \mathcal{G}[\mu_1, L_1](x) \mathcal{G}[\mu_2, L_2](x) dx = \frac{\mu_2}{L_2} \frac{1}{\Gamma(L_1)} \frac{1}{\Gamma(L_2)} \bar{G}_{1,1}^{1,1} \left(\frac{\mu_1 L_2}{\mu_2 L_1} \left| \begin{array}{cc} -L_1 + 1 & ; & \cdot \\ L_2 - 1 & ; & \cdot \end{array} \right. \right) \quad (10.15)$$

ainsi que :

$$\int_0^\infty \mathcal{FR}_{\mathcal{G}}[\mu_1, L_1](x) \mathcal{FR}_{\mathcal{G}}[\mu_2, L_2](x) dx = \frac{\mu_1}{L_1} \frac{1}{\Gamma(L_1)} \frac{1}{\Gamma(L_2)} \bar{G}_{3,3}^{2,2} \left(\frac{\mu_1 L_2}{\mu_2 L_1} \left| \begin{array}{cc} -L_1, 1 & ; & 0 \\ -1, L_2 & ; & 0 \end{array} \right. \right) \quad (10.16)$$

Dans la mesure où l'on peut écrire¹ :

$$\begin{aligned} DKS(p, q) &= \int (\mathcal{FR}_p(x) - \mathcal{FR}_q(x))^2 dx \\ &= \int \mathcal{FR}_p(x) \mathcal{FR}_p(x) dx + \int \mathcal{FR}_q(x) \mathcal{FR}_q(x) dx - \int \mathcal{FR}_p(x) \mathcal{FR}_q(x) dx - \int \mathcal{FR}_q(x) \mathcal{FR}_p(x) dx \end{aligned}$$

on peut donner une expression analytique de la distance de Kolmogorov-Smirnov entre deux lois Gamma :

$$\begin{aligned} DKS(\mathcal{G}[\mu_1, L_1], \mathcal{G}[\mu_2, L_2]) &= \frac{\mu_1}{L_1} \frac{1}{\Gamma(L_1)} \frac{1}{\Gamma(L_1)} \bar{G}_{3,3}^{2,2} \left(1. \left| \begin{array}{l} -L_1, 1 \\ -1, L_1 \end{array} \right. ; \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right) \\ &+ \frac{\mu_2}{L_2} \frac{1}{\Gamma(L_2)} \frac{1}{\Gamma(L_2)} \bar{G}_{3,3}^{2,2} \left(1. \left| \begin{array}{l} -L_2, 1 \\ -1, L_2 \end{array} \right. ; \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right) \\ &- \frac{\mu_1}{L_1} \frac{1}{\Gamma(L_1)} \frac{1}{\Gamma(L_2)} \bar{G}_{3,3}^{2,2} \left(\frac{\mu_1 L_2}{\mu_2 L_1} \left| \begin{array}{l} -L_1, 1 \\ -1, L_2 \end{array} \right. ; \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right) \\ &- \frac{\mu_2}{L_2} \frac{1}{\Gamma(L_1)} \frac{1}{\Gamma(L_2)} \bar{G}_{3,3}^{2,2} \left(\frac{\mu_2 L_1}{\mu_1 L_2} \left| \begin{array}{l} -L_2, 1 \\ -1, L_1 \end{array} \right. ; \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (10.18)$$

10.2.4 Distance de Kolmogorov-Smirnov entre une loi Gamma et une loi de Fisher

Considérons une loi Gamma $\mathcal{G}[\mu_1, L_1]$ et une loi de Fisher $\mathcal{F}[\mu_2, L_2, M_2]$. Elles s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}[\mu_1, L_1](x) &= \frac{L_1}{\mu_1} \frac{1}{\Gamma(L_1)} \bar{G}_{0,1}^{1,0} \left(\frac{L_1 x}{\mu_1} \left| \begin{array}{l} \cdot \\ L_1 - 1 \end{array} \right. ; \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \\ \mathcal{F}[\mu_2, L_2, M_2](x) &= \frac{L_2}{M_2 \mu_2} \frac{1}{\Gamma(L_2) \Gamma(M_2)} \bar{G}_{1,1}^{1,1} \left(\frac{L_2 x}{M_2 \mu_2} \left| \begin{array}{l} -M_2 \\ L_2 - 1 \end{array} \right. ; \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \end{aligned}$$

et leur fonction de répartition s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{FR}_{\mathcal{G}}[\mu_1, L_1](x) &= \frac{1}{\Gamma(L_1)} \bar{G}_{1,2}^{1,1} \left(\frac{L_1 x}{\mu_1} \left| \begin{array}{l} 1 \\ L_1 \end{array} \right. ; \begin{array}{l} \cdot \\ 0 \end{array} \right) \\ \mathcal{FR}_{\mathcal{F}}[\mu_2, L_2, M_2](x) &= \frac{1}{\Gamma(L_2) \Gamma(M_2)} \bar{G}_{2,2}^{1,2} \left(\frac{L_2 x}{M_2 \mu_2} \left| \begin{array}{l} 1, -M_2 + 1 \\ L_2 \end{array} \right. ; \begin{array}{l} \cdot \\ 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

L'application de la relation 10.13 permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathcal{FR}_{\mathcal{G}}[\mu_1, L_1](x) \mathcal{FR}_{\mathcal{F}}[\mu_2, L_2, M_2](x) dx &= \\ \frac{\mu_1}{L_1} \frac{1}{\Gamma(L_1)} \frac{1}{\Gamma(L_2) \Gamma(M_2)} \bar{G}_{4,3}^{2,3} \left(\frac{\mu_1 L_2}{\mu_2 M_2 L_1} \left| \begin{array}{l} -L_1, -M_2 + 1, 1 \\ L_2, -1 \end{array} \right. ; \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (10.19)$$

qui s'exprime aussi comme :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathcal{FR}_{\mathcal{F}}[\mu_2, L_2, M_2](x) \mathcal{FR}_{\mathcal{G}}[\mu_1, L_1](x) dx &= \\ \frac{\mu_2 M_2}{L_2} \frac{1}{\Gamma(L_1)} \frac{1}{\Gamma(L_2) \Gamma(M_2)} \bar{G}_{3,4}^{3,2} \left(\frac{\mu_2 M_2 L_1}{\mu_1 L_2} \left| \begin{array}{l} -L_2, 1 \\ M_2 - 1, L_1, -1 \end{array} \right. ; \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (10.20)$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathcal{FR}_{\mathcal{F}}[\mu_2, L_2, M_2](x) \mathcal{FR}_{\mathcal{F}}[\mu_2, L_2, M_2](x) dx &= \\ \frac{\mu_2 M_2}{L_2} \frac{1}{\Gamma(L_2) \Gamma(M_2)} \frac{1}{\Gamma(L_2) \Gamma(M_2)} \bar{G}_{4,4}^{3,3} \left(1 \left| \begin{array}{l} -L_2, -M_2 + 1, 1 \\ L_2, M_2 - 1, -1 \end{array} \right. ; \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (10.21)$$

1. Ceci demanderait à être justifié par une analyse des parcours d'intégration dans le plan complexe, voir le paragraphe 10.2.6.

et on adapte la relation 10.16 de sorte que

$$\int_0^\infty \mathcal{FR}_G[\mu_1, L_1](x) \mathcal{FR}_G[\mu_1, L_1](x) dx = \frac{\mu_1}{L_1} \frac{1}{\Gamma(L_1)} \frac{1}{\Gamma(L_1)} \bar{G}_{3,3}^{2,2} \left(1. \left| \begin{array}{l} -L_1, 1 \\ -1, L_1 \end{array} ; \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right. \right) \quad (10.22)$$

On peut maintenant donner une expression analytique de la distance de Kullback-Leibler de Kolmogorov-Smirnov entre une loi Gamma et une loi de Fisher :

$$\begin{aligned} DKS(\mathcal{G}[\mu_1, L_1], \mathcal{F}[\mu_2, L_2, M_2]) &= \frac{\mu_1}{L_1} \frac{1}{\Gamma(L_1)} \frac{1}{\Gamma(L_1)} \bar{G}_{3,3}^{2,2} \left(1. \left| \begin{array}{l} -L_1, 1 \\ -1, L_1 \end{array} ; \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right. \right) \\ &- \frac{\mu_1}{L_1} \frac{1}{\Gamma(L_1)} \frac{1}{\Gamma(L_2)\Gamma(M_2)} \bar{G}_{4,3}^{2,3} \left(\frac{\mu_1 L_2}{\mu_2 M_2 L_1} \left| \begin{array}{l} -L_1, -M_2 + 1, 1 \\ L_2, -1 \end{array} ; \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right. \right) \\ &- \frac{\mu_2 M_2}{L_2} \frac{1}{\Gamma(L_1)} \frac{1}{\Gamma(L_2)\Gamma(M_2)} \bar{G}_{3,4}^{3,2} \left(\frac{\mu_2 M_2 L_1}{\mu_1 L_2} \left| \begin{array}{l} -L_2, 1 \\ M_2 - 1, L_1, -1 \end{array} ; \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right. \right) \\ &+ \frac{\mu_2 M_2}{L_2} \frac{1}{\Gamma(L_2)\Gamma(M_2)} \frac{1}{\Gamma(L_2)\Gamma(M_2)} \bar{G}_{4,4}^{3,3} \left(1 \left| \begin{array}{l} -L_2, -M_2 + 1, 1 \\ L_2, M_2 - 1, -1 \end{array} ; \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right. \right) \end{aligned} \quad (10.23)$$

10.2.5 Distance de Kolmogorov-Smirnov entre deux lois de Fisher

Considérons une loi de Fisher $\mathcal{F}[\mu_1, L_1, M_1]$ et une loi de Fisher $\mathcal{F}[\mu_2, L_2, M_2]$. Elles s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mu_1, L_1, M_1](x) &= \frac{L_1}{M_1 \mu_1} \frac{1}{\Gamma(L_1)\Gamma(M_1)} \bar{G}_{1,1}^{1,1} \left(\frac{L_1 x}{M_1 \mu_1} \left| \begin{array}{l} -M_1 \\ L_1 - 1 \end{array} ; \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \right) \\ \mathcal{F}[\mu_2, L_2, M_2](x) &= \frac{L_2}{M_2 \mu_2} \frac{1}{\Gamma(L_2)\Gamma(M_2)} \bar{G}_{1,1}^{1,1} \left(\frac{L_2 x}{M_2 \mu_2} \left| \begin{array}{l} -M_2 \\ L_2 - 1 \end{array} ; \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

et leur fonction de répartition s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{FR}_F[\mu_1, L_1, M_1](x) &= \frac{1}{\Gamma(L_1)\Gamma(M_1)} \bar{G}_{2,2}^{1,2} \left(\frac{L_1 x}{M_1 \mu_1} \left| \begin{array}{l} 1, -M_1 + 1 \\ L_1 \end{array} ; \begin{array}{l} \cdot \\ 0 \end{array} \right. \right) \\ \mathcal{FR}_F[\mu_2, L_2, M_2](x) &= \frac{1}{\Gamma(L_2)\Gamma(M_2)} \bar{G}_{2,2}^{1,2} \left(\frac{L_2 x}{M_2 \mu_2} \left| \begin{array}{l} 1, -M_2 + 1 \\ L_2 \end{array} ; \begin{array}{l} \cdot \\ 0 \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

L'application de la relation 10.13 permet d'écrire :

$$\int_0^\infty \mathcal{FR}_F[\mu_1, L_1, M_1](x) \mathcal{FR}_F[\mu_2, L_2, M_2](x) dx = \frac{M_1 \mu_1}{L_1} \frac{1}{\Gamma(L_1)\Gamma(M_1)} \frac{1}{\Gamma(L_2)\Gamma(M_2)} \bar{G}_{4,4}^{3,3} \left(\frac{\mu_1 M_1 L_2}{\mu_2 M_2 L_1} \left| \begin{array}{l} -L_1, -M_2 + 1, 1 \\ L_2, 1 - M_1, -1 \end{array} ; \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right. \right) \quad (10.24)$$

qui s'exprime aussi comme :

$$\int_0^\infty \mathcal{FR}_F[\mu_2, L_2, M_2](x) \mathcal{FR}_F[\mu_1, L_1, M_1](x) dx = \frac{\mu_2 M_2}{L_2} \frac{1}{\Gamma(L_1)\Gamma(M_1)} \frac{1}{\Gamma(L_2)\Gamma(M_2)} \bar{G}_{4,4}^{3,3} \left(\frac{\mu_2 M_2 L_1}{\mu_1 M_1 L_2} \left| \begin{array}{l} -L_2, M_1 - 1, 1 \\ L_1, M_2 - 1, -1 \end{array} ; \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right. \right) \quad (10.25)$$

On a aussi :

$$\int_0^\infty \mathcal{FR}_F[\mu_2, L_2, M_2](x) \mathcal{FR}_F[\mu_2, L_2, M_2](x) dx = \frac{\mu_2 M_2}{L_2} \frac{1}{\Gamma(L_2)\Gamma(M_2)} \frac{1}{\Gamma(L_2)\Gamma(M_2)} \bar{G}_{4,4}^{3,3} \left(1 \left| \begin{array}{l} -L_2, -M_2 + 1, 1 \\ L_2, M_2 - 1, -1 \end{array} ; \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right. \right) \quad (10.26)$$

ainsi que

$$\int_0^\infty \mathcal{F}\mathcal{R}_{\mathcal{F}}[\mu_1, L_1, M_1](x) \mathcal{F}\mathcal{R}_{\mathcal{F}}[\mu_1, L_1, M_1](x) dx = \frac{\mu_1 M_1}{L_1} \frac{1}{\Gamma(L_1)\Gamma(M_1)} \frac{1}{\Gamma(L_1)\Gamma(M_1)} \bar{G}_{4,4}^{3,3} \left(1 \left| \begin{array}{l} -L_1, -M_1 + 1, 1 \\ L_1, M_1 - 1, -1 \end{array} \right. ; \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right) \quad (10.27)$$

On peut maintenant donner une expression analytique de la distance de Kolmogorov-Smirnov entre deux lois de Fisher :

$$\begin{aligned} DKS(\mathcal{F}[\mu_1, L_1, M_1], \mathcal{F}[\mu_2, L_2, M_2]) = & \\ & \frac{\mu_1 M_1}{L_1} \frac{1}{\Gamma(L_1)\Gamma(M_1)} \frac{1}{\Gamma(L_1)\Gamma(M_1)} \bar{G}_{4,4}^{3,3} \left(1 \left| \begin{array}{l} -L_1, -M_1 + 1, 1 \\ L_1, M_1 - 1, -1 \end{array} \right. ; \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right) \\ & + \frac{\mu_2 M_2}{L_2} \frac{1}{\Gamma(L_2)\Gamma(M_2)} \frac{1}{\Gamma(L_2)\Gamma(M_2)} \bar{G}_{4,4}^{3,3} \left(1 \left| \begin{array}{l} -L_2, -M_2 + 1, 1 \\ L_2, M_2 - 1, -1 \end{array} \right. ; \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right) \\ & - \frac{M_1 \mu_1}{L_1} \frac{1}{\Gamma(L_1)\Gamma(M_1)} \frac{1}{\Gamma(L_2)\Gamma(M_2)} \bar{G}_{4,4}^{3,3} \left(\begin{array}{l} \frac{\mu_1 M_1 L_2}{\mu_2 M_2 L_1} \\ \frac{\mu_2 M_2 L_1}{\mu_1 M_1 L_2} \end{array} \left| \begin{array}{l} -L_1, -M_2 + 1, 1 \\ L_2, 1 - M_1, -1 \end{array} \right. ; \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right) \\ & - \frac{M_2 \mu_2}{L_2} \frac{1}{\Gamma(L_2)\Gamma(M_2)} \frac{1}{\Gamma(L_1)\Gamma(M_1)} \bar{G}_{4,4}^{3,3} \left(\begin{array}{l} \frac{\mu_2 M_2 L_1}{\mu_1 M_1 L_2} \\ \frac{\mu_1 M_1 L_2}{\mu_2 M_2 L_1} \end{array} \left| \begin{array}{l} -L_2, -M_1 + 1, 1 \\ L_1, 1 - M_2, -1 \end{array} \right. ; \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (10.28)$$

10.2.6 Les problèmes de la Distance de Kolmogorov-Smirnov

Les calculs proposés ont omis un point essentiel à toute opération dans le plan complexe : celui de l'existence et de l'unicité –pour une fonction donnée– de la bande de définition liée à la transformée de Mellin Inverse (voir le chapitre 2, paragraphe 2.1.1). Ce point devrait être analysé en profondeur pour justifier comment on peut utiliser en pratique l'expression formelle 10.17. S'ajoute à cela des limitations intrinsèques à la programmation des fonctions de Meijer sous Python : la librairie `mpmath` ne peut en effet traiter des fonctions de Meijer avec un trop grand nombre de paramètres et induit parfois dans ces cas des erreurs imprévisibles.

Néanmoins, les formules présentées dans ce document ont été validées par comparaison avec une intégration numérique des relations sur des cas simulés, ce qui montre qu'il y a des pistes à explorer à partir de cette approche analytique des Distance de Kolmogorov-Smirnov pour les lois de Meijer.

10.3 Les “lois mimes” ou “Mimick”

Les “lois mimes” ou “Mimick” (Hélène Sportouche [44]) ont pour fondement le fait que les allures de deux lois de forme analytique différente mais présentant les mêmes grandeurs statistiques empiriques (par exemple les premiers moments (ou les mêmes premiers log-cumulants) peuvent s'avérer suffisamment ressemblantes pour que l'on puisse confondre en pratique ces deux lois et les utiliser indifféremment l'une pour l'autre. A priori séduisante, la démarche peut s'avérer très dangereuse comme nous l'avons déjà observé dans l'application de la méthode des moments à la loi de Fisher car l'identité des grandeurs extraites ne garantit en rien que la loi trouvée ait un sens. Sur la figure 10.1, on montre le résultat d'une simulation d'une loi de Fisher $\mathcal{F}[\mu = 10., L = 2.2, M = 2.5]$ (histogramme empirique) sur laquelle on a superposé une loi de Fisher estimée par la méthode des log-cumulants (pour laquelle on trouve $\mu = 9.856, L = 2.299, M = 2.256$) qui représente correctement l'histogramme empirique, ainsi qu'une loi de Fisher estimée par la méthode des moments qui n'a pas de sens, hormis une stricte égalité des trois premiers moments. Une loi mime doit donc vérifier des conditions autres qu'une simple identité sur des grandeurs extraites : en ce sens, il faudrait poser des conditions de distance et utiliser des distances (DKL ou DKS) pour qualifier un mime, ce qui ouvre de nouveaux domaines de recherche à mener dans le domaine des log-statistiques.

10.3.1 La loi de Fisher et la loi Gamma Généralisée comme Mimick : cadre général

Les lois de Fisher et Gamma Généralisée sont en pratique les plus populaires en imagerie RSO car elles ont comme cas particulier la loi Gamma et la loi Gamma Inverse. Ce sont des lois à 3 paramètres :

Simulation d'une loi de Fisher : $F(10.000, 2.200, 2.500)$

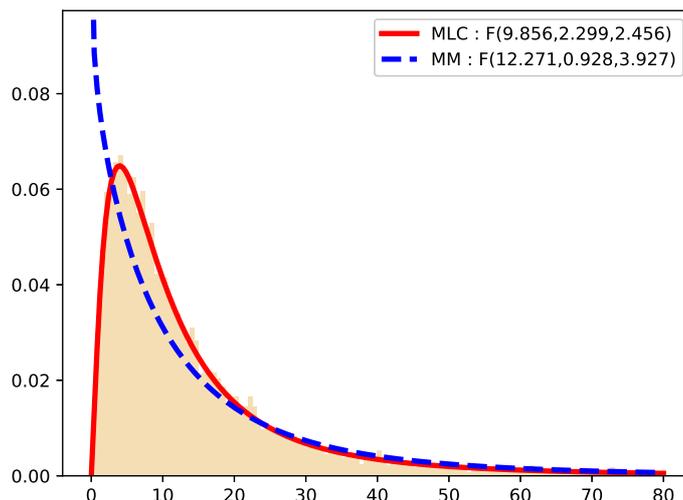


FIGURE 10.1 – Simulation d’une loi de Fisher $\mathcal{F}[\mu = 10., L = 2.2, M = 2.5]$ et estimation des paramètres par la méthode des moments et la méthode des log-cumulants. La méthode des moments est inadaptée puisque la loi ne possède aucun moment d’ordre supérieur à 2.5. On ne peut parler de mime dans ce cas là.

un paramètre d’échelle et 2 paramètres de forme. Il est toujours possible d’associer à une loi de Fisher une loi Gamma Généralisée partageant les trois premiers log-cumulants : ce sera à partir du quatrième log-cumulant que la différence sera marquée.

La figure 10.2 illustre comment se “ressemblent” une loi de Fisher et une loi Gamma Généralisée partageant les trois premiers log-cumulants d’une même loi K. A première vue, sur les 6 exemples proposés, les deux lois sont capables d’avoir des paramètres garantissant l’égalité des log-cumulants et donnant au final des lois mimées tout à fait réalistes. On remarque qu’en apparence la loi Gamma Généralisée semble beaucoup plus apte à coller au tracé de la loi K sous jacente. Cependant, si on souhaite analyser la robustesse des estimations, la figure 10.3 montre comment varient les lois mimées autour de leur référence : en faisant varier les paramètres des lois d’environ $\pm 10\%$, on observe que les lois de Fisher restent plus proches de la loi de référence que les lois Gamma Généralisées. Bien que très qualitatif, ce premier résultat montre de fortes capacités de mime pour les lois de Fisher.

Les capacités de mime des lois de Fisher et des lois Gamma Généralisées sont aussi à analyser dans les cas extrêmes suivants :

- Si on recherche un mime de la loi log-normale, ou en son voisinage, on peut noter que cette loi ne peut avoir de mime avec la loi Gamma Généralisée puisque celle-ci n’est pas définie pour $\tilde{\kappa}_3 = 0$ car ce cas correspondrait à $\eta = 0$, cas de loi Gamma Généralisée non définie excepté que comme cas limite vérifiant la relation 9.2 :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} L\eta^2 = \lim_{\eta \rightarrow 0^-} L\eta^2 = \text{constante}$$

Aussi, en pratique, il est préférable de prendre comme loi mime la loi de Fisher dès lors que la loi à mimer peut présenter des valeurs de $\tilde{\kappa}_3$ proches de 0.

- si on cherche un mime pour la loi de Nakagami (cas des données en amplitude) ou pour la loi Gamma (cas des données en intensité), on se trouve alors sur la frontière des lois de Fisher (en amplitude pour le premier cas, lois de Fisher traditionnelles dans le second cas). Si on opère avec des jeux de données réelles, il se peut que les log-cumulants empiriques débordent dans le domaine des lois Beta : il ne sera alors pas possible de trouver une loi de Fisher mimant les données réelles.

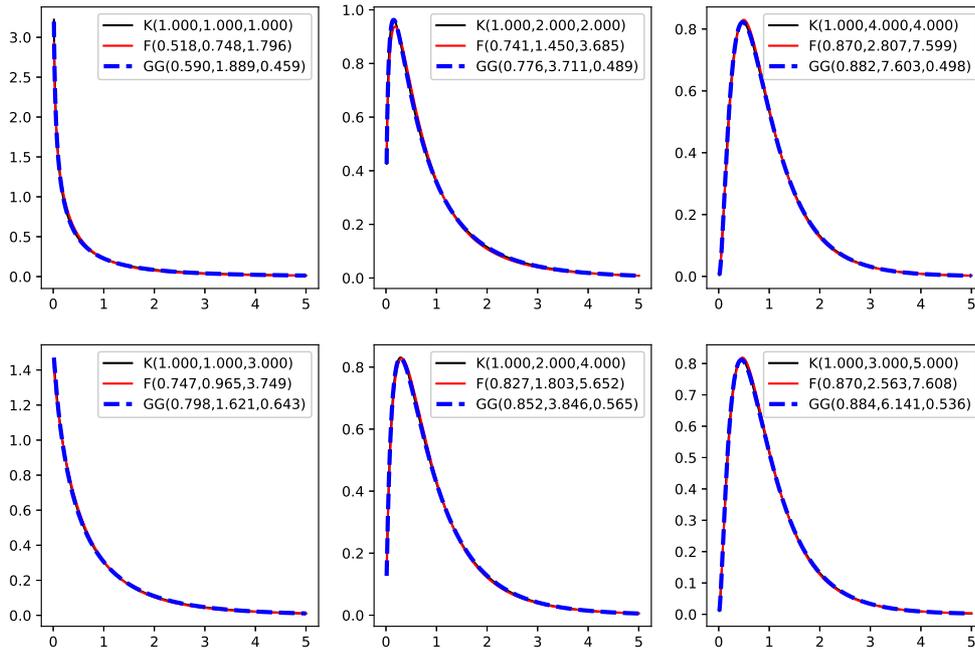


FIGURE 10.2 – Exemple de diverses lois K et de ses mimes (Loi de Fisher et loi Gamma Généralisée). Les valeurs des paramètres de la loi K sont celles de [44].

En revanche, la caustique limitant les lois Gamma Généralisées étant donnée par la relation 9.2 :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} L\eta^2 = \lim_{\eta \rightarrow 0^-} L\eta^2 = \text{constante}$$

on peut noter que les lois Gamma Généralisées seront tout à fait adaptées à ce cas, la zone entre la branche de la loi Gamma (ou de la loi de Nakagami) et la caustique de la loi Gamma Généralisé étant assez souple d'utilisation pour cette loi.

10.3.2 La loi de Fisher en amplitude et la loi Gamma Généralisée comme Mimick : cadre général

La même approche peut être menée sur les lois en amplitude, ce qu'illustre la figure 10.4. On note là aussi que les lois Gamma généralisées semblent mieux adaptées pour être mimes de loi K en amplitude que les lois de Fisher en amplitude.

10.3.3 Mimes sur cas réels

Pour illustrer comment diverses lois peuvent correctement “fitter” un histogramme empirique, considérons une image Terrasar-X d’Australie (site d’Uluru, ©EADS-Astrium) acquise en mode SpotLight_HS)². Les trois lois considérées sont la loi K en amplitude, la loi de Fisher en amplitude et la loi Gamma Généralisée.

On peut remarquer que la loi K mime a des paramètres dont les valeurs sont comparables avec le second cas de la figure 10.4 : les comportements observés sur ce cas concret entre la loi K en amplitude

2. Cette image fait partie des données mises gratuitement à disposition sur le site Airbus.

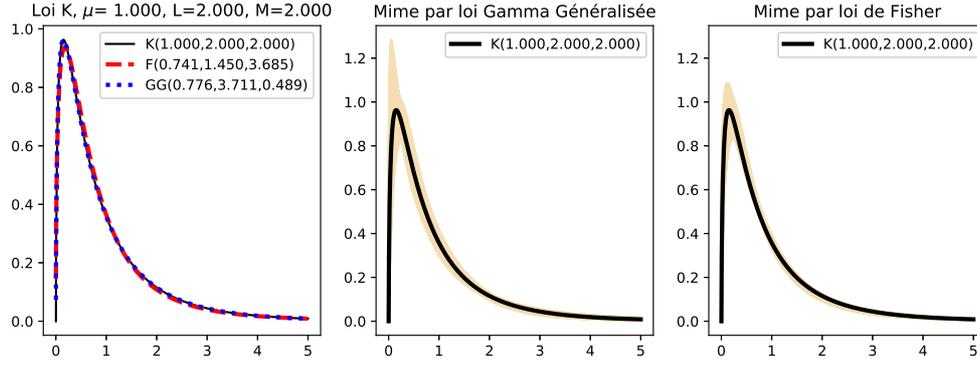


FIGURE 10.3 – Cas de la loi $\mathcal{K} [\mu = 1., L = 2, M = 2]$. Une fois la loi mime estimée, on fait varier les paramètres de cette loi entre 90% et 110% de leurs valeurs nominales, ce qui donne une zone (en jaune) caractérisant une erreur vis à vis de la loi initiale. On remarque que les lois de Fisher (à droite) sont représentés à l’intérieur d’un “tube” plus étroit que celui de la loi Gamma Généralisée (au milieu).

mime et la loi Gamma Généralisée sont donc très similaires. La partie de l’histogramme relatif au mode est donc mieux mimé par ces deux lois que par la loi de Fisher en amplitude.

Cependant la queue de distribution est beaucoup mieux modélisée par la loi de Fisher en amplitude. Cette observation est corroborée par d’autres expérimentation effectuées sur des sites différents et avec des capteurs différents, ce qui suggère que des travaux complémentaires mériteraient d’être menés sur les queues de distribution en imagerie RSO.

10.3.4 Mime parfait : cas d’égalité stricte entre lois

Il est instructif de noter que certaines formules analytiques spécifiques aux fonctions spéciales donnent lieu à des calculs analytiques permettant une stricte identité entre lois. On a ainsi des strictes identités entre lois K en amplitude et lois Gamma, ainsi qu’entre lois K et lois Gamma Généralisées dans deux cas d’école présentés dans les paragraphes suivants.

Données en amplitude

Soit une loi K en amplitude :

$$\mathcal{KA}[\mu, L, M](x) = \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{4\sqrt{LM}}{\mu} \left(\frac{\sqrt{LM}x}{\mu} \right)^{M+L-1} K_{M-L} \left[2\frac{\sqrt{LM}x}{\mu} \right]$$

et sa log-fonction caractéristique :

$$\phi(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L + \frac{s-1}{2})}{L^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M + \frac{s-1}{2})}{M^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(M)}$$

Considérons le cas $M = L + \frac{1}{2}$. La log-fonction caractéristique s’écrit alors :

$$\begin{aligned} \phi_H(s) &= \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L + \frac{s-1}{2})}{L^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(L + \frac{s-1}{2} + \frac{1}{2})}{(L + \frac{1}{2})^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(L + \frac{1}{2})} \\ &= \mu^{s-1} \frac{1}{(L(L + \frac{1}{2}))^{\frac{s-1}{2}}} \frac{\Gamma(L + \frac{s-1}{2}) \Gamma(L + \frac{s-1}{2} + \frac{1}{2})}{\Gamma(L) \Gamma(L + \frac{1}{2})} \end{aligned}$$

Grâce à la formule de duplication de Legendre :

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

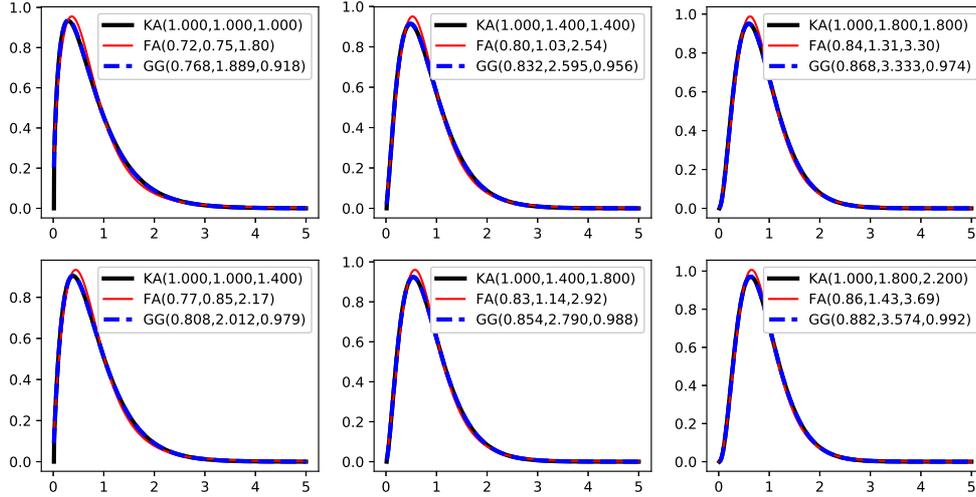


FIGURE 10.4 – Exemple de diverses lois K en amplitude et de ses mimés (Loi de Fisher en amplitude et loi Gamma Généralisée).

on déduit :

$$\Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}} \Gamma(2x)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \phi_H(s) &= \mu^{s-1} \frac{1}{\left(\sqrt{L(L + \frac{1}{2})}\right)^{s-1}} \frac{\Gamma(2L + s - 1) 2^{2L+s-2}}{\Gamma(2L) 2^{2L-1}} \\ &= \left(\frac{2\mu}{\sqrt{L(L + \frac{1}{2})}}\right)^{s-1} \frac{\Gamma(2L + s - 1) 2^{2L+s-2}}{\Gamma(2L)} \end{aligned}$$

On reconnaît dans cette dernière expression la log-fonction caractéristique de la loi Gamma $\mathcal{G}\left[\frac{2\mu}{\sqrt{L(L + \frac{1}{2})}}, 2L\right]$.

Ceci démontre la relation :

$$\mathcal{KA}\left[\mu, L, L + \frac{1}{2}\right](x) = \mathcal{G}\left[\frac{2\mu}{\sqrt{L(L + \frac{1}{2})}}, 2L\right](x) \quad (10.29)$$

que l'on peut aussi écrire (ceci pour permettre une comparaison avec le cas suivant) :

$$\mathcal{KA}\left[\mu, L, L + \frac{1}{2}\right](x) = \mathcal{GG}\left[\frac{2\mu}{\sqrt{L(L + \frac{1}{2})}}, 2L, 1\right](x)$$

Données en intensité

Par un raisonnement analogue, on peut considérer la loi K dans son formalisme en intensité :

$$\mathcal{K}[\mu, L, M](x) = \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{2LM}{\mu} \left(\frac{LMx}{\mu}\right)^{\frac{M+L}{2}-1} K_{M-L}\left[2\left(\frac{LMx}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

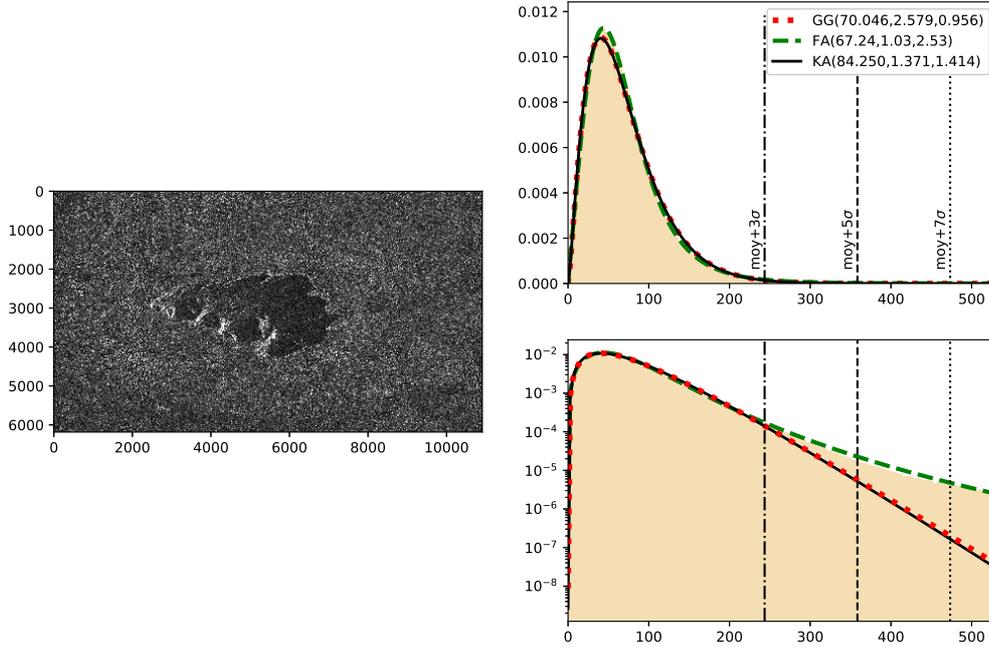


FIGURE 10.5 – Image Terrasar-X d’Australie (site d’Uluru, ©Airbus). L’histogramme empirique de la totalité de l’image a été modélisé par une loi K en amplitude, une loi de Fisher en amplitude et une loi Gamma Généralisée. On note que ces lois ont visuellement de bonnes capacités de mime. Si on détaille la queue de distribution en échelle semi logarithmique, on note que les comportements asymptotiques des trois lois sont très différentes et s’expliquent par la forme analytique des lois, et que très curieusement la loi de Fisher est assez fidèle à la queue de distribution de l’histogramme.

et en utilisant la loi Gamma Généralisée \mathcal{GG} , on montre, après quelques calculs faciles mais pénibles, la relation :

$$\mathcal{K} \left[\mu, L, L + \frac{1}{2} \right] (x) = \mathcal{GG} \left[\frac{\mu L}{L + \frac{1}{2}}, 2L, 0.5 \right] (x) \quad (10.30)$$

Un résultat général

Ces relations peuvent s’obtenir à partir d’un cadre plus général qui s’appuie sur l’expression de la transformée de Mellin de la fonction de Bessel modifiée de troisième espèce donnée par les tables :

$$\mathcal{M}[K_\nu](s) = 2^{s-2} \Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)$$

Dans le cas $\nu = \frac{1}{2}$, on peut écrire :

$$\mathcal{M}[K_{0.5}](s) = 2^{s-2} \Gamma\left(\frac{s-\frac{1}{2}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+\frac{1}{2}}{2}\right)$$

c’est à dire, grâce à la formule de duplication de Legendre (relation A.8) :

$$\mathcal{M}[K_{0.5}](s) = 2^{s-2} \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= 2^{s-2} \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \\
&= 2^{s-2} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{s-\frac{3}{2}}} \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Comme il est bien connu que :

$$\mathcal{M}\left[\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right] = \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)$$

on en déduit (grâce à la relation **TM 2** liée aux propriétés fondamentales de la transformée de Mellin) :

$$K_{0.5}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} \quad (10.31)$$

relation qui permet d'obtenir directement 10.29 et 10.30.

Il faut noter que cette dernière relation est curieusement absente des Bateman, mais se trouve dans le Gradshteyn ([15], relation 8.469.3).

Quatrième partie

Annexes

Annexe A

Fonctions spéciales

A.1 La fonction Gamma et ses dérivées

A.1.1 Définition

La fonction Gamma est définie par la relation intégrale [8] :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (\text{A.1})$$

Elle vérifie la relation :

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z) \quad (\text{A.2})$$

avec $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$.

Pour z réel positif, la fonction Gamma s'utilise plus souvent sous la forme de la fonction factorielle définie pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$n! = \Gamma(n+1)$$

Son minimum est atteint en $z \simeq 1.4616$ et vaut approximativement 0.8856.

Remarquons au passage que la fonction Gamma permet une définition de l'exponentielle :

$$e^{-x} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \Gamma(s) ds$$

expression que le mathématicien Hardy appelle "formule de Mellin".

A.1.2 Quelques propriétés (formules d'Euler et de Legendre)

Formule de réflexion d'Euler

Une des propriétés les plus intéressantes de la fonction Gamma est qu'elle vérifie la relation appelée formule de réflexion d'Euler, définie pour $x \notin \mathbb{Z}$, donnée par :

$$\Gamma(1-x) \Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (\text{A.3})$$

que l'on peut aussi réécrire sous la forme :

$$\Gamma(-x) \Gamma(x+1) = -\frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (\text{A.4})$$

On en déduit –dans la mesure où elles existent– plusieurs relations parfois bien utiles :

– Une relation pour passer de $\Gamma(1-x)$ à $\Gamma(x)$:

$$\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x) \Gamma(x)}$$

– En posant $x = y - \frac{1}{2}$, la relation A.3 s'écrit :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - y\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + y\right) = \frac{\pi}{\cos \pi y} \quad (\text{A.5})$$

– En posant $x = \frac{1}{2}$, la relation A.3 permet d'écrire :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (\text{A.6})$$

– Ces résultats permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

relation qui permettra de simplifier certains paramètres de la loi de Rayleigh (coefficient de variation, variance,...)

Formule de duplication de Legendre

Une autre propriété intéressante de la fonction Gamma est la relation dite de duplication de Legendre :

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) \quad (\text{A.8})$$

qui permet d'écrire les deux relations suivantes :

$$\Gamma(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \quad (\text{A.9})$$

$$\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}} \frac{\Gamma(2x)}{\Gamma(x)} \quad (\text{A.10})$$

En utilisant les propriétés A.4 et A.8, on a (dans la mesure où ces relations sont définies, ce qui impose quelques conditions triviales sur les valeurs de x) :

$$\begin{aligned} \Gamma(-2x) &= -\frac{\pi}{\sin(2\pi x)} \frac{1}{\Gamma(2x+1)} \\ &= -\frac{\pi}{\sin(2\pi x)} \frac{1}{\Gamma\left(2\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)} \\ &= -\frac{\sqrt{\pi}}{\sin(2\pi x)} \frac{\pi}{2^{2x} \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) \Gamma(x+1)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x+1}} \Gamma(-x) \Gamma\left(-x - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

d'où la relation :

$$\Gamma(-x) = \frac{2^{-x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{-x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-x+1}{2}\right) \quad (\text{A.11})$$

On démontre ainsi que la relation de duplication de Legendre peut s'appliquer aux valeurs négatives de x à condition que $2x \notin \mathbf{Z}$.

A.1.3 Comportement asymptotique en $z = 0^+$

Partant de la relation :

$$\Gamma(z + 1) = z \Gamma(z)$$

on en déduit :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z + 1)}{z}$$

et comme pour $z \rightarrow 0^+$ on a :

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \Gamma(z + 1) = \Gamma(1) = 1$$

on en déduit le comportement à l'origine :

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \Gamma(z) = \frac{1}{z}$$

A.1.4 La fonction Digamma

La fonction Digamma $\Psi(x)$ se définit comme la dérivée logarithmique de la fonction $\Gamma(x)$:

$$\Psi(x) = \frac{d \log \Gamma(x)}{dx} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

Remarquons que la constante d'Euler γ_E peut s'exprimer à l'aide de la fonction Digamma :

$$\gamma_E = -\Psi(1) \tag{A.12}$$

Pour x grand, on montre que :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Psi(x)}{\log(x)} = 1 \tag{A.13}$$

ainsi que la relation :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\Psi(x) - \log(x)) = 0 \tag{A.14}$$

Considérons le logarithme de la relation fondamentale A.2 :

$$\log \Gamma(x + 1) = \log x + \log \Gamma(x)$$

En dérivant cette expression, il vient la relation utile suivante :

$$\boxed{\Psi(x + 1) - \Psi(x) = \frac{1}{x}} \tag{A.15}$$

Enfin, en prenant la dérivée logarithmique de la relation A.8, on obtient aisément la relation de duplication suivante :

$$\Psi(2x) = \log(2) + \frac{1}{2} \left(\Psi(x) + \Psi\left(x + \frac{1}{2}\right) \right) \tag{A.16}$$

A.1.5 Définitions des fonctions Polygamma

Par définition

$$\Psi(r, x) = \frac{d^r \Psi(x)}{dx^r}$$

Comme pour la fonction Digamma, la dérivation $(r + 1)$ -ème du logarithme de la relation fondamentale A.2 va permettre d'écrire :

$$\boxed{\Psi(r, x + 1) - \Psi(r, x) = (-1)^r \frac{\Gamma(r + 1)}{x^{r+1}}} \tag{A.17}$$

Notons que l'on trouve parfois dans la littérature la fonction Digamma sous la notation suivante :

$$\Psi(x) = \Psi(0, x)$$

ce qui étend la définition de la fonction Polygamma à la fonction Digamma (cas $r = 0$).

Les fonctions Polygamma sont strictement monotones et tendent vers 0 pour $x \rightarrow \infty$. Elles vérifient aussi les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} \Psi(2n, x) < 0 \\ \Psi(2n + 1, x) > 0 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (\text{A.18})$$

Leur comportement asymptotique à l'infini est donné par la relation suivante :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\Psi(r, x) x^r| = \Gamma(r)$$

qui peut s'écrire aussi pour x grand :

$$\Psi(r, x) \sim \frac{\Gamma(r)}{x^r}. \quad (\text{A.19})$$

On en déduit en particulier ces relations utiles pour les lois de l'imagerie radar :

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} |\Psi(1, L) L| &= 1 \\ \lim_{L \rightarrow \infty} |\Psi(2, L) L^2| &= 1 \\ \lim_{L \rightarrow \infty} |\Psi(3, L) L^3| &= 2 \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

A.1.6 Fonction de Pochhammer

La fonction de Pochhammer, notée dans ce document $\text{Poch}(x, \nu)$, est donnée par l'expression :

$$\text{Poch}(x, \nu) = \frac{\Gamma(x + \nu)}{\Gamma(x)}$$

On trouve dans [3] une relation qui s'avère utile :

$$\frac{\Gamma(x + a)}{\Gamma(x)} = (x + 1)^a \left(1 + \frac{a + a^2}{2(x + 1)} + O\left(\frac{1}{(x + 1)^2}\right) \right)$$

et dont on peut déduire la relation :

$$\frac{\text{Poch}(x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\sqrt{x}} \simeq 1 + \frac{1}{8x} \quad (\text{A.21})$$

A.1.7 La fonction Zeta

A partir des fonctions Polygamma, il est possible de donner une définition de la fonction Zeta de Riemann à l'aide de l'expression suivante :

$$\zeta(r) = (-1)^r \frac{\Psi(r - 1, 1)}{\Gamma(r)}.$$

parfois utilisée dans certains articles.

A.2 Les fonctions de Bessel

A.2.1 Fonctions de Bessel, de Neumann et de Hankel

Par définition [9], une fonction $w(z)$ est une fonction de Bessel si elle vérifie l'équation différentielle :

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2) w = 0 \quad (\text{A.22})$$

On la note généralement $J_\nu(z)$.

En effectuant certaines combinaisons linéaires de $J_\nu(z)$ et $J_{-\nu}(z)$, on trouve les fonctions de Bessel de deuxième espèce, souvent notées $N_\nu(z)$ (parfois Y_ν), appelées parfois fonctions de Neumann et solution de l'équation différentielle A.22 :

$$N_\nu(z) = \frac{1}{\sin \pi z} (J_\nu(z) \cos \pi z - J_{-\nu}(z)) \quad (\text{A.23})$$

ainsi que les fonctions de Bessel de troisième espèce (souvent notées H_ν et appelées aussi fonctions de Hankel) définies par :

$$H_\nu^{(1)}(iz) = J_\nu(z) + i N_\nu(z)$$

Si l'on remplace z par iz , l'équation différentielle (équation A.22) devient :

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - (z^2 + \nu^2) w = 0$$

et bien évidemment a pour solution $J_\nu(iz)$. Il se trouve que traditionnellement, on considère les solutions sous une forme modifiée :

$$I_\nu(z) = e^{-\frac{i\pi\nu}{2}} J_\nu(iz) = i^{-\nu} J_\nu(iz)$$

ces solutions portant alors le nom de fonctions de Bessel modifiées de première espèce.

A.2.2 Spécificités de la fonction de Bessel modifiée de troisième espèce (seconde fonction de Bessel)

La fonction de Bessel modifiée de troisième espèce $K_\nu(z)$, élément essentiel du *Compound Speckle* de Goodman, est définie à partir des fonctions de Bessel de troisième espèce (c'est à dire les fonctions de Hankel) par l'expression donnée par le Bateman ([9], paragraphe 7.2.2, formule 15) :

$$K_\nu(z) = \frac{i\pi}{2} e^{-\frac{i\pi\nu}{2}} H_\nu^{(1)}(iz)$$

et c'est sous cette appellation que Colombo [11] en donne cette définition :

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z \operatorname{ch}(t) - \nu t} dt$$

On l'appelle aussi fonction de Basset (qui l'a définie dans une publication en 1889 [5]), ainsi que seconde fonction de Bessel. Tout ceci est bien entendu cohérent avec l'indémorable ouvrage de référence sur les fonctions de Bessel qu'est le Watson [48].

Or à l'heure actuelle de nombreuses sources en général très fiables n'adoptent pas cette convention historique (à commencer par Wikipedia qui, par exemple, signale que l'appellation de "fonction de Basset" est obsolète et doit être remplacée par *modified Bessel functions of the second kind*!). De son côté, MathWorks appelle cette fonction *Modified Bessel Function of the Second Kind*. Sous Maple, l'appel se fait avec l'ordre `BesselK`, et l'aide en ligne dénomme cette fonction "*Bessel function of the second kind*". Tout ceci semble incorrect puisque les fonctions de Bessel de deuxième espèce sont en fait les fonctions de Neumann, définies par la relation A.23 et que la notion de "fonction de Bessel modifiée de deuxième

espèce” doit en toute logique se fonder sur la notion de “fonction de Bessel de deuxième espèce”. Sous Python, la bibliothèque `scipy` la dénomme fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce en signalant que l’on peut aussi utiliser la terminologie “fonction de Bessel modifiée de troisième espèce”, ce qui ne simplifie rien¹.

La transformée de Mellin est familière de la seconde fonction de Bessel puisque dans la table de transformées de Mellin du projet Bateman [6], on trouve la relation de sa transformée directe (6.8,(26)) :

$$\mathcal{M}[K_\nu(ax)] = a^{-s} 2^{s-2} \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$$

ainsi que la relation de sa transformée inverse (6.3,(17)) :

$$\mathcal{M}\left[e^{-\alpha x^h - \beta x^{-h}}\right] = \frac{2}{h} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}\frac{s}{h}} K_{\frac{s}{h}}\left(2\sqrt{\alpha\beta}\right)$$

La seconde fonction de Bessel possède d’intéressantes propriétés [25] largement exploitées dans l’étude des lois de Halphen [16] (plus connues sous le nom de lois gaussiennes inverses généralisées) :

$$K_\lambda = K_{-\lambda} \tag{A.24}$$

$$K_{\lambda+1}(\omega) = \frac{2\lambda}{\omega} K_\lambda(\omega) + K_{\lambda-1}(\omega) \tag{A.25}$$

$$K_{\lambda-1}(\omega) + K_{\lambda+1}(\omega) = -2K'_\lambda(\omega) \tag{A.26}$$

A.2.3 Spécificités de la fonction de Bessel modifiée de première espèce

La fonction de Bessel modifiée de première espèce n’apparaît pas directement dans les tables de transformées de Mellin. On trouve cependant dans les tables la relation suivante ([6], relation 6.8.23) :

$$\mathcal{M}\left[e^{-ax} I_\nu(ax)\right] = \frac{1}{a^s 2^s \sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - s\right) \Gamma(s + \nu)}{\Gamma(1 + \nu - s)}$$

ainsi que la transformée suivante ([6], relation 6.8.23) :

$$\mathcal{M}^{-1}\left[\Gamma(s) {}_1F_1(s; \nu + 1; a)\right] = \Gamma(\nu + 1) (ax)^{-\frac{1}{2}\nu} e^{-x} I_\nu(2\sqrt{ax})$$

utilisée pour la loi de Rice (pour le calcul de la fonction caractéristique de deuxième espèce, voir le descriptif de la fiche détaillée de la loi de Rice page 154 ou le rapport de recherche [38]).

A.3 Les fonctions hypergéométriques

Sous cette terminologie se niche une famille de fonctions spéciales dont les appellations diverses et les propriétés sont un monde difficile à pénétrer. En imagerie cohérente, on les retrouve principalement dans les expressions des lois de probabilités des paramètres liés à la phase et à la cohérence interférométrique (voir par exemple [28]). Sous une autre notation (fonctions de Whittaker) elles sont utilisées dans certains cas de *Compound Speckle*.

Ce paragraphe donne quelques définitions et propriétés fondamentales de ces fonctions, et vise dans sa présentation à montrer combien il peut être difficile d’obtenir une simple relation entre deux fonctions, voire même une simple identité, tant les bons auteurs semblent prendre un véritable plaisir à complexifier leurs présentations.

1. Force est de constater que si Internet a beaucoup apporté aux scientifiques actuels (il en est pour preuve que le Watson ou les Bateman sont accessibles en version pdf sur des sites universitaires), il génère dans le même temps un grand nombre d’imprécisions fort regrettables.

A.3.1 Les fonctions ${}_2F_1$ (hypergéométrique), ${}_1F_1$ (hypergéométrique confluyente), ${}_2F_0$ (Tricomi) et ${}_0F_1$

La fonction ${}_2F_1$ (hypergéométrique)

L'origine de la fonction hypergéométrique remonte à Gauss qui, en prenant la fonction associée à une série dite hypergéométrique², définit la fonction hypergéométrique $F(a, b, c; z)$ de la variable complexe z , à 3 paramètres, dont la notation contemporaine est :

$${}_2F_1(a, b; c; z)$$

Une caractérisation possible et concise des fonctions hypergéométriques peut se faire par le biais de la transformée de Mellin puisque l'on trouve dans les tables de transformée de Mellin (par exemple [6]) :

$$\mathcal{M} [{}_2F_1(a, b; c; z)](s) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \Gamma(s) \frac{\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(c-s)} \quad 0 < \operatorname{Re}(s) < \min(\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b) \quad (\text{A.27})$$

De cette observation, nous verrons qu'il s'en déduit une réécriture très simple de la fonction hypergéométrique dans le formalisme des fonctions de Meijer (voir annexe B.3.2).

La fonction ${}_1F_1$ (hypergéométrique confluyente)

La fonction hypergéométrique confluyente ${}_1F_1(a; c; z)$ correspond au cas $z' = \frac{z}{b}, b \rightarrow \infty$. Elle est souvent notée $\Phi(a, c; x)$ (symbole de Humbert), mais aussi $M(a, c, x)$ (fonction de Kummer). Elle porte aussi le nom de fonction hypergéométrique dégénérée.

$$\Phi(a, c; x) = M(a, c, x) = {}_1F_1(a; c; z)$$

On peut en retenir la caractérisation concise par sa transformée de Mellin :

$$\mathcal{M} [{}_1F_1(a; c; z)](s) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \Gamma(s) \frac{\Gamma(a-s)}{\Gamma(c-s)} \quad 0 < \operatorname{Re}(s) < \operatorname{Re} a$$

qui peut moyennant quelques justifications, se déduire de l'expression A.27 en faisant abstraction du terme $\frac{\Gamma(b-s)}{\Gamma(b)}$

La fonction hypergéométrique confluyente possède une propriété connue sous le nom de transformation de Kummer :

$${}_1F_1(a; c; z) = e^x {}_1F_1(c-a; c; -z) \quad (\text{A.28})$$

Une application un peu étonnante de cette fonction est donnée par la relation suivante :

$${}_1F_1(a, a; x) = e^x \quad \forall a \quad (\text{A.29})$$

ce qui fait correspondre à l'exponentielle une infinité de fonctions hypergéométriques confluentes.

La fonction ${}_2F_0$

Un second cas particulier de la fonction hypergéométrique passe par la fonction ancillaire $\Psi(\alpha, \gamma; x)$ (voir [8], page 257), mais plus couramment notée $U(\alpha, \gamma; x)$, qui a été introduite en 1924 par Tricomi³ : celui-ci a traité, dans le cadre des fonctions hypergéométriques ${}_2F_1$, le cas $z' = 1 - \frac{x}{c}, c \rightarrow \infty$. Cette fonction Ψ permet de définir une nouvelle fonction de la famille des fonctions hypergéométriques, la fonction ${}_2F_0$, définie par la relation :

$${}_2F_0\left(a, b; -\frac{1}{x}\right) = x^a \Psi(a, a-b+1; x) \quad (\text{A.30})$$

2. probablement introduite la première fois par Wallis d'après Wikipedia

3. Tricomi la note G , choix malheureux car cette lettre G est maintenant réservée aux fonctions de Meijer. Le Bateman en donne d'autres notations et définitions : M selon Kummer, F_1 selon Meixner (notation assez malheureuse aussi), E selon MacRobert

La relation A.30 donne au passage une définition de la fonction Ψ de Tricomi par le biais de la fonction ${}_2F_0$:

$$\Psi(a, b; x) = U(a, b; x) = x^{-a} {}_2F_0 \left(a, a - b + 1; -\frac{1}{x} \right) \quad (\text{A.31})$$

Dans ce labyrinthe de fonctions, la fonction U est donnée par la relation ([8] p 257) :

$$\Psi(a, c; x) = U(a, c, z) = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)} {}_1F_1(a, c; z) + z^{1-c} \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} {}_1F_1(a-c+1, 2-c; z) \quad (\text{A.32})$$

ou sous une forme équivalente [1] :

$$\Psi(a, c; x) = U(a, c, z) = \frac{\pi}{\sin \pi c} \left(\frac{{}_1F_1(a, c; z)}{\Gamma(c)\Gamma(a-c+1)} - z^{1-c} \frac{{}_1F_1(a-c+1, 2-c; z)}{\Gamma(a)\Gamma(2-c)} \right)$$

(que l'on peut déduire de la relation A.32 grâce à la formule de réflexion d'Euler A.3). ce qui permet d'écrire une relation assez curieuse entre une expression fondée sur des fonctions ${}_1F_1$ (relation A.32) et une expression fondée sur une fonction ${}_2F_0$ (relation A.31) :

$$x^{-a} {}_2F_0 \left(a, a - c + 1; -\frac{1}{x} \right) = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)} {}_1F_1(a, c; z) + z^{1-c} \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} {}_1F_1(a-c+1, 2-c; z)$$

Les bons auteurs sont peu bavards sur la transformée de Mellin de la fonction ${}_2F_0$, mais donnent tous les éléments nécessaires. Il faut partir de la définition A.30, et connaissant l'expression de Ψ sous forme d'intégrale de Barnes ([8], page 256), cette dernière relation conduit à une expression analytique de la transformée de Mellin de la fonction ${}_2F_0$

$$\mathcal{M} [{}_2F_0(a, b; z)](s) = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \Gamma(s) \Gamma(a-s)\Gamma(b-s) \quad 0 < \text{Re}(s) < \min(\text{Re } a, \text{Re } b)$$

qui peut, moyennant quelques justifications, se déduire de l'expression A.27 en faisant abstraction du terme $\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-s)}$.

La fonctions ${}_0F_1$

Enfin, on rencontre parfois⁴ la fonction ${}_0F_1$, qui très curieusement n'a pas de nom spécifique (on la cite comme la "fonction hypergéométrique ${}_0F_1$ ") et dont la définition concise à partir de sa transformée de Mellin s'écrit :

$$\mathcal{M} [{}_0F_1(c; z)](s) = \Gamma(c) \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(c-s)} \quad 0 < \text{Re}(s) < \text{Re } c$$

finalemt très peu usitée car nous verrons au paragraphe A.3.4 qu'il existe une expression équivalente sous forme de fonction de Bessel (relation A.36).

A.3.2 Généralisation : les fonctions ${}_pF_q$

A partir de la fonction hypergéométrique, fonction initialement à 3 paramètres, il est possible de construire une classe de fonctions à $p+q$ paramètres, notées ${}_pF_q$ telles que⁵ :

$$\mathcal{M} [{}_pF_q(a_1, \dots, a_p; 1, \dots, c_q; z)](s) = \frac{\prod_{j=1}^q \Gamma(c_j)}{\prod_{i=1}^p \Gamma(a_i)} \Gamma(s) \frac{\prod_{i=1}^p \Gamma(a_i - s)}{\prod_{j=1}^q \Gamma(c_j - s)}$$

Cette expression très générale permet bien évidemment de retrouver les quatre cas particuliers précédents (tableau A.1).

4. en interférométrie en particulier

5. pour alléger l'expression, les conditions sur s ainsi que celles sur les coefficients a_i et b_i ont été omises.

Fonction	Notation	Transformée de Mellin
hypergéométrique	${}_2F_1(a, b; c; x)$	$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \Gamma(s) \frac{\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(c-s)}$
Tricomi	${}_2F_0(a, b; x)$	$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \Gamma(s) \Gamma(a-s)\Gamma(b-s)$
hypergéométrique confluente	${}_1F_1(a; c; x)$	$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \Gamma(s) \frac{\Gamma(a-s)}{\Gamma(c-s)}$
	${}_0F_1(c; x)$	$\Gamma(c) \Gamma(s) \frac{1}{\Gamma(c-s)}$

TABLE A.1 – Transformées de Mellin des fonctions hypergéométriques les plus usuelles.

A.3.3 Fonctions associées : les fonctions de Whittaker

A partir de la représentation de Tricomi –la fonction notée U ou Ψ , relation A.31–, la fonction de Whittaker⁶ $W_{a,b}$ s’écrit :

$$\begin{aligned} W_{a,b}(z) &= e^{-\frac{z}{2}} z^{b+1/2} \Psi \left(b - a + \frac{1}{2}, 1 + 2b; z \right) \\ &= e^{-\frac{z}{2}} z^{b+1/2} U \left(b - a + \frac{1}{2}, 1 + 2b; z \right) \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

mais, en faisant intervenir directement la fonction ${}_2F_0$, elle est parfois définie comme ([8], page 264) :

$$W_{a,b}(z) = e^{-\frac{z}{2}} z^a {}_2F_0 \left(b - a + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - a - b; -\frac{1}{z} \right) \quad (\text{A.34})$$

ce que l’on retrouve en exprimant la fonction U par la relation A.31.

C’est cette fonction de Whittaker qu’utilise Delignon pour caractériser un de ses modèles de *compound speckle* (la loi W, [13]). Delignon utilise aussi la fonction U pour un autre de ses modèles (la loi U, [13]), mais la définition même de la fonction W (relation A.33) montre que l’on peut aussi bien utiliser U que W dans l’expression de la loi U.

Pour être exhaustif, il existe une autre fonction de Whittaker, notée $M_{a,b}$ (à ne pas confondre avec la notation de Kummer M pour la fonction ${}_1F_1$), et qui s’écrit soit à partir de la fonction ${}_1F_1$, soit à partir de la fonction Φ ([8], page 264) :

$$\begin{aligned} M_{a,b}(z) &= e^{-\frac{z}{2}} z^{b+1/2} \Phi \left(b - a + \frac{1}{2}, 1 + 2b; z \right) \\ &= e^{-\frac{z}{2}} z^{b+1/2} {}_1F_1 \left(b - a + \frac{1}{2}; 1 + 2b; z \right) \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

A.3.4 Fonctions hypergéométriques et fonctions de Bessel

Il existe des liens très étroits entre fonctions hypergéométriques et fonctions de Bessel. En effet :

6. Très justement, le Bateman parle de “notation de Whittaker” plutôt que de fonction de Whittaker, mais l’usage actuel semble fidèle à la notion de fonction.

- la fonction de Bessel $J_\nu(z)$ peut s'exprimer à l'aide d'une fonction hypergéométrique confluite ${}_1F_1$ de la variable z puisque l'on a la relation (voir [9]) :

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu e^{-iz} {}_1F_1\left(\nu + \frac{1}{2}; 2\nu + 1; 2iz\right)}{\Gamma(\nu + 1)}$$

Elle peut aussi s'exprimer à l'aide de la fonction hypergéométrique ${}_0F_1$ de la variable z^2 :

$$J_\nu(z) = z^\nu {}_0F_1\left(\nu; -\frac{z^2}{4}\right) \quad (\text{A.36})$$

- la fonction de Bessel modifiée de troisième espèce (autrement dit, la seconde fonction de Bessel) s'exprime traditionnellement en fonction de la fonction de Tricomi Ψ ([8]) :

$$K_\nu(x) = \sqrt{\pi} e^{-x} (2x)^\nu \Psi\left(\frac{1}{2} + \nu, 1 + 2\nu; 2x\right)$$

ce qui en prenant comme définition de la fonction de Tricomi la relation A.31 permet d'écrire :

$$K_\nu(x) = \sqrt{\pi} e^{-x} (2x)^{-\frac{1}{2}} {}_2F_0\left(\frac{1}{2} + \nu, \frac{1}{2} - \nu; -\frac{1}{2x}\right) \quad (\text{A.37})$$

Ainsi la célèbre loi K aurait pu être appelée loi de Tricomi. D'autres expressions de la seconde fonction de Bessel seront analysées à l'aune des fonctions de Meijer (voir B.3.3).

Annexe B

Les fonctions de Meijer

B.1 Historique et notations

B.1.1 Définition des fonctions de Meijer

Cornelis Simon Meijer propose en 1936 la définition des G-fonctions [8], qui se veulent être la forme la plus générale possible des intégrales de Barnes. Meijer voyait ces nouvelles fonctions comme une généralisation des fonctions hypergéométriques : il se trouve qu'accessoirement elles permettent un formalisme unifié pour un très grand nombre de fonctions courantes, ce qui leur donne une portée universelle (le paragraphe B.3.1 de cette annexe donne l'expression de fonctions usuelles –logarithme, sinus, . . .– sous forme de fonction de Meijer). Elle sont définies dans le plan complexe sur un parcours \mathcal{L} par la relation :

$$G_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)} x^s ds$$

avec une condition (suffisante) sur les indices :

$$p + q < 2(m + n) \quad (\text{B.1})$$

Le parcours \mathcal{L} doit être bien évidemment précisé. Meijer propose trois types de parcours dans le plan complexe : deux qui sont constitués par des boucles dans le plan complexe, le troisième qui consiste en une droite du plan complexe parallèle à l'axe des ordonnées.

C'est ce troisième type de fonctions de Meijer qui joue un rôle majeur en log-statistiques puisque, formellement, une intégration selon une droite du plan complexe parallèle à l'axe des ordonnées est l'opération mathématique utilisée pour définir la transformée de Mellin inverse (relation 2.2). Dans ce document, les fonctions de Meijer de ce type, notées $\bar{G}_{p,q}^{m,n}$, seront le plus souvent définies par la relation :

$$\bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)} x^s ds \quad (\text{B.2})$$

la valeur de c devant vérifier des conditions d'existence spécifiques. Dans le cadre des log-statistiques, la valeur $c = 1$ doit être un cas possible pour l'intégration, le rôle $s = 1$ étant essentiel pour la caractérisation d'une densité de probabilité.

L'expression B.2 mérite d'être réécrite en effectuant un changement de variable $s \rightarrow -s$. On obtient alors :

$$\bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} x^{-s} ds \quad (\text{B.3})$$

expression qui montre que la fonction $\bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right)$ est la transformée de Mellin inverse de la fonction

$$\frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} \quad (\text{B.4})$$

On retrouve ainsi la relation des tables de transformée de Mellin inverse du Bateman[6].

Dans ce document, nous proposons d'effectuer une légère modification typographique pour simplifier la lecture des paramètres de cette fonction (ce qui facilitera aussi l'appel de ces fonctions dans les logiciels actuels, voir le paragraphe B.4) et de privilégier, pour définir la fonction de Meijer \bar{G} , la démarche fondée sur la transformée de Mellin Inverse. On a au final, comme définition de la fonction de Meijer \bar{G} adoptée dans ce document, l'expression :

$$\bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} \right. ; \begin{array}{l} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} x^{-s} ds \quad (\text{B.5})$$

Cette notation offre un moyen simple de repérer l'appartenance des familles d'indices a_i et b_j à la partie numérateur ou à la partie dénominateur de la transformée de Mellin de \bar{G} :

- pour les p coefficients a_i , les n coefficients correspondant au numérateur et les $p - n + 1$ coefficients correspondant au dénumérateur, qui forment la ligne supérieure des paramètres de Meijer :

$$\bar{G}_{\mathbb{P},q}^{m,\mathbb{N}} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_{\mathbb{N}} \\ b_1, \dots, b_m \end{array} \right. ; \begin{array}{l} a_{n+1}, \dots, a_{\mathbb{P}} \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right)$$

- pour les q coefficients b_i , les m coefficients correspondant au numérateur et les $q - m + 1$ coefficients correspondant au dénumérateur, qui forment la ligne inférieure des paramètres de Meijer :

$$\bar{G}_{p,\mathbb{Q}}^{\mathbb{N},n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_{\mathbb{Q}} \end{array} \right. ; \begin{array}{l} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_{\mathbb{Q}} \end{array} \right)$$

B.1.2 Transformée de Mellin des fonctions de Meijer

L'expression B.5 étant formellement celle d'un transformée de Mellin inverse, on a :

$$\mathcal{M} \left[\bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} \right. ; \begin{array}{l} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right) \right] (s) = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} \quad (\text{B.6})$$

On peut en détailler les quatre cas théoriques suivants :

- Seuls les coefficients $a_j, j \in [1, n]$ sont définis. On a alors :

$$\mathcal{M} \left[\bar{G}_{n,0}^{0,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \\ \cdot \end{array} \right. ; \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \right] (s) = \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s) \quad (\text{B.7})$$

- Seuls les coefficients $a_j, j \in [1, p]$ sont définis. On a alors :

$$\mathcal{M} \left[\bar{G}_{p,0}^{0,0} \left(x \left| \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \end{array} \right. ; \begin{array}{l} a_1, \dots, a_p \\ \cdot \end{array} \right) \right] (s) = \frac{1}{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j + s)} \quad (\text{B.8})$$

- Seuls les coefficients $b_j, j \in [1, m]$ sont définis. On a alors :

$$\mathcal{M} \left[\bar{G}_{0,m}^{m,0} \left(x \left| \begin{array}{l} \cdot \\ b_1, \dots, b_m \end{array} \right. ; \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \right] (s) = \prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \quad (\text{B.9})$$

– Seuls les coefficients $b_j, j \in [1, q]$ sont définis. On a alors :

$$\mathcal{M} \left[\bar{G}_{0,q}^{0,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \ ; \\ \cdot \ ; \end{array} \right. \begin{array}{c} \cdot \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right) \right] (s) = \frac{1}{\prod_{j=1}^q \Gamma(1 - b_j - s)} \quad (\text{B.10})$$

La relation B.6, très générale et plutôt complexe, permet de traiter les deux cas particuliers suivants qui sont directement utilisables pour l'étude des densités de probabilités en imagerie cohérente :

$$\mathcal{M} \left[\bar{G}_{0,m}^{m,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \ ; \\ b_1, \dots, b_m \ ; \end{array} \right. \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \right] (s) = \prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \quad (\text{B.11})$$

$$\mathcal{M} \left[\bar{G}_{n,0}^{0,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \ ; \\ \cdot \ ; \end{array} \right. \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \right] (s) = \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s) \quad (\text{B.12})$$

B.1.3 Comportement asymptotique des fonctions de Meijer (cas général)

Le comportement asymptotique des fonctions de Meijer n'a manifestement rien de simple et le Bateman [9] ne donne que quelques règles très succinctes rappelées ici.

Dans le cas général d'une fonction de Meijer $G(x) = G_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \ ; \\ b_1, \dots, b_m \ ; \end{array} \right. \begin{array}{c} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right)$, et en se restreignant à une variable x réelle, on a :

– au voisinage de 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = O(|x|^\beta) \text{ si } p < q \text{ avec } \beta = \max b_j, j \in [1, m] \quad (\text{B.13})$$

– pour $x \rightarrow \infty$, $G(x)$ décroît exponentiellement vers 0 si $p < q$, $m > \frac{p+q}{2}$ et $n = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) \rightarrow 0 \text{ si } m > \frac{p+q}{2} \text{ et } n = 0 \quad (\text{B.14})$$

– pour $x \rightarrow \infty$, $G(x)$ a le comportement d'une puissance de x si $p < q$, $n \geq 1$ et $m + n \geq \frac{p+q}{2}$, ou bien si $q = p + 1$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) \rightarrow O(x^\beta) \text{ si } \begin{cases} m + n > \frac{p+q}{2} \text{ et } n \geq 1 \\ \text{ou} \\ q = p + 1 \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

– pour $x \rightarrow \infty$, $G(x)$ devient infini de manière exponentielle si $q \geq p + 2$ et $m + n \leq \frac{p+q}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) \rightarrow \infty \text{ si } q \geq p + 2 \text{ et } m + n \leq \frac{p+q}{2} \quad (\text{B.16})$$

ou bien si $q = p + 1$.

B.1.4 Comportement asymptotique des fonctions de Meijer \bar{G}

Les précédentes règles de comportement asymptotique, définies pour toutes les formes de fonctions de Meijer, sont bien évidemment applicables aux lois \bar{G} qui vérifient $m + n > \frac{p+q}{2}$ (relation B.1). On a alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \bar{G}(x) = O(|x|^\beta) \text{ si } p < q \text{ avec } \beta = \max b_j, j \in [1, m] \quad (\text{B.17})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{G}(x) \rightarrow 0 \text{ si } n = 0 \quad (\text{B.18})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{G}(x) \rightarrow O(x^\beta) \text{ si } \begin{cases} n \geq 1 \\ \text{ou} \\ q = p + 1 \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{G}(x) \rightarrow \infty \text{ si } q \geq p + 2 \quad (\text{B.20})$$

B.1.5 Fonction inverse d'une fonction de Meijer donnée

Soit une fonction de Meijer $f(x)$ s'écrivant (relation fondamentale B.5) :

$$\bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \quad ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m \quad ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} x^{-s} ds$$

Soit $g(x)$ telle que, par définition (et si elle existe) :

$$g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

En appliquant simplement la définition d'une fonction de Meijer, on a :

$$\begin{aligned} g(x) &= \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(\frac{1}{x} \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \quad ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m \quad ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} \left(\frac{1}{x}\right)^{-s} ds \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} x^s ds \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)} x^{-s} ds \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s) \prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s)}{\prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s)} x^{-s} ds \end{aligned}$$

cette dernière expression étant une fonction de Meijer sous sa forme canonique B.5. On en déduit :

$$\boxed{\bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(\frac{1}{x} \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \quad ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m \quad ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = \bar{G}_{q,p}^{n,m} \left(x \left| \begin{array}{c} 1 - b_1, \dots, 1 - b_m \quad ; \quad 1 - b_{m+1}, \dots, 1 - b_q \\ 1 - a_1, \dots, 1 - a_n \quad ; \quad 1 - a_{n+1}, \dots, 1 - a_p \end{array} \right. \right)} \quad (\text{B.21})$$

Ceci permet de construire la fonction inverse d'une fonction de Meijer donnée selon la règle :

$$\bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \quad ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m \quad ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \rightarrow \bar{G}_{q,p}^{n,m} \left(x \left| \begin{array}{c} 1 - b_1, \dots, 1 - b_m \quad ; \quad 1 - b_{m+1}, \dots, 1 - b_q \\ 1 - a_1, \dots, 1 - a_n \quad ; \quad 1 - a_{n+1}, \dots, 1 - a_p \end{array} \right. \right) \quad (\text{B.22})$$

On a par exemple :

$$\bar{G}_{1,0}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1 \quad ; \quad \cdot \\ \cdot \quad ; \quad \cdot \end{array} \right. \right) \rightarrow \bar{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \quad ; \quad \cdot \\ 1 - a_1 \quad ; \quad \cdot \end{array} \right. \right) \quad (\text{B.23})$$

$$\bar{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \quad ; \quad \cdot \\ b_1 \quad ; \quad \cdot \end{array} \right. \right) \rightarrow \bar{G}_{1,0}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{c} 1 - b_1 \quad ; \quad \cdot \\ \cdot \quad ; \quad \cdot \end{array} \right. \right) \quad (\text{B.24})$$

B.2 Propriétés des fonctions de Meijer $\bar{G}_{p,q}^{m,n}$

Nous nous limitons aux propriétés des fonctions de Meijer $\bar{G}_{p,q}^{m,n}$, c'est à dire celles dont la transformée de Mellin est définie dans un voisinage du point $c = 1$ dans le plan complexe.

B.2.1 Propriété de notation

Considérons la transformée de Mellin d'une fonction de Meijer (relation B.6)

$$\frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)}$$

et regroupons les différents termes sous la forme :

$$\frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s)}{\prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s)}$$

Remarquons tout d'abord qu'au sein d'un groupe de paramètres, l'ordre des grandeurs n'intervient pas. Analysons ensuite les termes qui font intervenir la variable s avec un signe positif : Si un coefficients a_l , $l \in [n+1, p]$ est égal à un des coefficients b_k , $k \in [1, m]$, une simplification évidente s'impose. Il suffit de réordonner les paramètres pour les placer en fin de liste (de sorte que $a_p = b_m$) et de les enlever. On a alors :

$$\bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_{p-1}, \textcircled{a}_p \\ b_1, \dots, b_{m-1}, \textcircled{b}_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = \bar{G}_{p-1,q-1}^{m-1,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_{p-1} \\ b_1, \dots, b_{m-1} & ; \quad b'_m, \dots, b'_{q-1} \end{array} \right. \right)$$

avec $b'_t = b_{t+1}$, $t \in [m, q-1]$.

De même, analysons les termes qui font intervenir la variable s avec un signe négatif : Si un coefficients a_l , $l \in [1, n]$ est égal à un des coefficients b_k , $k \in [m+1, p]$, une simplification évidente s'impose. Il suffit de réordonner les paramètres pour les placer en fin de liste (de sorte que $a_n = b_q$) et de les enlever. On a alors :

$$\bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_{n-1}, \textcircled{a}_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_{q-1}, \textcircled{b}_q \end{array} \right. \right) = \bar{G}_{p-1,q-1}^{m,n-1} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_{n-1} & ; \quad a'_n, \dots, a'_{p-1} \\ b_1, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_{q-1} \end{array} \right. \right)$$

avec $a'_t = a_{t+1}$, $t \in [n, p-1]$.

B.2.2 Multiplication par la variable x

A partir de la définition B.2, on peut écrire (dans la mesure où les intégrales existent) :

$$\begin{aligned} x^r \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) &= x^r \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)} x^s ds \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)} x^{s+r} ds \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + r - s - r) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - r + s + r)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - r + s + r) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + r - s - r)} x^{s+r} ds \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + r - s') \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - r + s')}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - r + s') \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + r - s')} x^{s'} ds' \end{aligned}$$

ce qui donne la relation fondamentale suivante :

$$x^r \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1 + r, \dots, a_n + r & ; \quad a_{n+1} + r, \dots, a_p + r \\ b_1 + r, \dots, b_m + r & ; \quad b_{m+1} + r, \dots, b_q + r \end{array} \right. \right) \quad (\text{B.25})$$

Remarquons que cette relation s'applique au cas $r = -1$, ce qui permet de retrouver l'expression B.21.

On a donc une propriété très facile à mettre en œuvre : multiplier une fonction de Meijer par une puissance r de la variable x revient à ajouter la valeur r à tous les paramètres de cette fonction.

B.2.3 Convolution de Mellin

La définition même de la transformée de Mellin des fonctions de Meijer (relation B.6) :

$$\frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)}$$

montre que le produit des transformées de Mellin de deux fonctions de Meijer s'exprime sous cette même forme :

$$\begin{aligned} & \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} \frac{\prod_{j=1}^{m'} \Gamma(b'_j + s) \prod_{j=n'+1}^{p'} \Gamma(1 - a'_j - s)}{\prod_{j=m'+1}^{q'} \Gamma(1 - b'_j - s) \prod_{j=n'+1}^{p'} \Gamma(a'_j + s)} \\ &= \frac{\prod_{j=1}^{m''} \Gamma(b''_j + s) \prod_{j=n''+1}^{p''} \Gamma(1 - a''_j - s)}{\prod_{j=m''+1}^{q''} \Gamma(1 - b''_j - s) \prod_{j=n''+1}^{p''} \Gamma(a''_j + s)} \end{aligned}$$

On obtient alors la relation fondamentale pour la convolution de Mellin de deux fonctions de Meijer :

$$\boxed{\begin{aligned} & \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n; a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m; b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \hat{\star} \bar{G}_{p',q'}^{m',n'} \left(x \left| \begin{array}{l} a'_1, \dots, a'_{n'}; a'_{n'+1}, \dots, a_{p'} \\ b'_1, \dots, b'_{m'}; b'_{m'+1}, \dots, b_{q'} \end{array} \right. \right) \\ &= \bar{G}_{p+p',q+q'}^{m+m',n+n'} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_{n'}; a_{n+1}, \dots, a_p, a'_{n'+1}, \dots, a_{p'} \\ b_1, \dots, b_m, b'_1, \dots, b'_{m'}; b_{m+1}, \dots, b_q, b'_{m'+1}, \dots, b_{q'} \end{array} \right. \right) \end{aligned}} \quad (\text{B.26})$$

B.2.4 Dirac-Mellin

Prenons comme définition du Dirac-Mellin la relation suivante :

$$\delta_\mu^{\mathcal{M}}(x) = \delta\left(\frac{x}{\mu} - 1\right)$$

Le Dirac-Mellin possède une transformée de Mellin :

$$\mathcal{M}[\delta_\mu^{\mathcal{M}}](s) = \mu^s$$

ce qui permet de retrouver la propriété fondamentale du Dirac-Mellin :

$$(f \hat{\star} \delta_\mu^{\mathcal{M}})(x) = f\left(\frac{x}{\mu}\right).$$

Le Dirac-Mellin peut donc s'écrire formellement comme une fonction de Meijer :

$$\delta_\mu^{\mathcal{M}}(x) = \bar{G}_{0,0}^{0,0} \left(\frac{x}{\mu} \left| \begin{array}{l} \cdot \ ; \cdot \\ \cdot \ ; \cdot \end{array} \right. \right)$$

et sa transformée de Mellin, déduite de l'expression B.6, s'écrit :

$$\mathcal{M}[\delta_\mu^{\mathcal{M}}(x)] = 1$$

D'autres expressions du Dirac-Mellin peuvent se déduire en recherchant les fonctions de Meijer vérifiant cette dernière relation. On trouve ainsi cinq expressions formelles :

$$\bar{G}_{1,1}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{l} a; \cdot \\ \cdot; a \end{array} \right. \right) = \delta^{\mathcal{M}} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad (\text{B.27})$$

$$\bar{G}_{1,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{l} \cdot; b \\ b; \cdot \end{array} \right. \right) = \delta^{\mathcal{M}} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad (\text{B.28})$$

$$\bar{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{l} a; b \\ b; a \end{array} \right. \right) = \delta^{\mathcal{M}} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad (\text{B.29})$$

$$\bar{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{l} c-r; c \\ c-r; c \end{array} \right. \right) = (-1)^r \delta^{\mathcal{M}} \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad \forall r \in \mathbb{Z} \quad (\text{B.30})$$

$$\bar{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{l} c; c-r \\ c; c-r \end{array} \right. \right) = (-1)^r \delta^{\mathcal{M}} \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad \forall r \in \mathbb{Z} \quad (\text{B.31})$$

B.2.5 Dérivation d'une fonction de Meijer

La dérivée d'une fonction de Meijer est une fonction de Meijer. On a en effet deux expressions possibles pour la dérivée [8], principalement caractérisées par une décrémentation des paramètres ($a_i \rightarrow a_i - 1$ et $b_i \rightarrow b_i - 1$) :

- une première (caractérisée par les valeurs -1 et 0 sur la “diagonale” des indices de Meijer) :

$$\frac{d}{dx} \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} ; \begin{array}{c} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = \bar{G}_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(x \left| \begin{array}{c} \textcircled{1}, a_1 - 1, \dots, a_n - 1 \\ b_1 - 1, \dots, b_m - 1 \end{array} ; \begin{array}{c} a_{n+1} - 1, \dots, a_p - 1 \\ \textcircled{0}, b_{m+1} - 1, \dots, b_q - 1 \end{array} \right. \right) \quad (\text{B.32})$$

- une seconde (caractérisée par les valeurs 0 et -1 sur l’“anti-diagonale” des indices de Meijer) :

$$\frac{d}{dx} \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} ; \begin{array}{c} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = -\bar{G}_{p+1,q+1}^{m+1,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1 - 1, \dots, a_n - 1 \\ \textcircled{0}, b_1 - 1, \dots, b_m - 1 \end{array} ; \begin{array}{c} \textcircled{1}, a_{n+1} - 1, \dots, a_p - 1 \\ b_{m+1} - 1, \dots, b_q - 1 \end{array} \right. \right) \quad (\text{B.33})$$

En appliquant l'expression B.32 au Dirac-Mellin, on en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_\mu^{\mathcal{M}}}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\bar{G}_{0,0}^{0,0} \left(\frac{x}{\mu} \left| \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \right) \right) \\ &= \frac{1}{\mu} \bar{G}_{1,1}^{0,1} \left(\frac{x}{\mu} \left| \begin{array}{c} -1 \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ 0 \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

B.2.6 Primitive d'une fonction de Meijer

Grâce à la propriété fondamentale de simplifications des indices (voir paragraphe B.2), on déduit des deux expressions de la dérivée d'une fonction de Meijer que la primitive d'une fonction de Meijer est une fonction de Meijer, avec deux formulations possibles, principalement caractérisées par une incrémentation des paramètres ($a_i \rightarrow a_i + 1$ et $b_i \rightarrow b_i + 1$) :

- une première (caractérisée par les valeurs 1 et 0 sur la “diagonale” des indices de Meijer) grâce à l'utilisation de la relation B.32 :

$$\frac{d}{dx} \bar{G}_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(x \left| \begin{array}{c} \textcircled{1}, a_1 + 1, \dots, a_n + 1 \\ b_1 + 1, \dots, b_m + 1 \end{array} ; \begin{array}{c} a_{n+1} + 1, \dots, a_p + 1 \\ \textcircled{0}, b_{m+1} + 1, \dots, b_q + 1 \end{array} \right. \right) = \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} ; \begin{array}{c} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \quad (\text{B.34})$$

- une seconde (caractérisée par les valeurs 0 et 1 sur l’“anti-diagonale” des indices de Meijer) grâce à l'utilisation de la relation B.33 :

$$-\frac{d}{dx} \bar{G}_{p+1,q+1}^{m+1,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1 + 1, \dots, a_n + 1 \\ \textcircled{0}, b_1 + 1, \dots, b_m + 1 \end{array} ; \begin{array}{c} \textcircled{1}, a_{n+1} + 1, \dots, a_p + 1 \\ b_{m+1} + 1, \dots, b_q + 1 \end{array} \right. \right) = \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} ; \begin{array}{c} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \quad (\text{B.35})$$

On a donc deux expressions possibles pour la primitive d'une fonction de Meijer :

$$\int_0^\infty \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} ; \begin{array}{c} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) dx = \bar{G}_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(x \left| \begin{array}{c} 1, a_1 + 1, \dots, a_n + 1 \\ b_1 + 1, \dots, b_m + 1 \end{array} ; \begin{array}{c} a_{n+1} + 1, \dots, a_p + 1 \\ 0, b_{m+1} + 1, \dots, b_q + 1 \end{array} \right. \right) \quad (\text{B.36})$$

et

$$\int_0^\infty \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \quad ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m \quad ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) dx = -\bar{G}_{p+1,q+1}^{m+1,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1 + 1, \dots, a_n + 1 \quad ; \quad 1, a_{n+1} + 1, \dots, a_p + 1 \\ 0, b_1 + 1, \dots, b_m + 1 \quad ; \quad b_{m+1} + 1, \dots, b_q + 1 \end{array} \right. \right) \quad (\text{B.37})$$

Les expressions B.36 et B.37 permet d'obtenir deux expressions équivalentes pour la primitive du Dirac-Mellin, mais dont l'usage nécessite toujours quelques justifications :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{G}_{1,1}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{l} 1 \quad ; \quad \cdot \\ \cdot \quad ; \quad 0 \end{array} \right. \right) \\ 1 - \bar{G}_{1,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{l} \cdot \quad ; \quad 0 \\ 1 \quad ; \quad \cdot \end{array} \right. \right) \end{array} \right. \quad (\text{B.38})$$

qui sont bien toutes les deux des fonctions de Heaviside.

B.2.7 Développement en série

L'expression de la dérivée d'une fonction de Meijer (B.32) permet une représentation en série en un point $z = z_0$:

$$\begin{aligned} \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(z \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \quad ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m \quad ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = \\ \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(z_0 \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \quad ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m \quad ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \\ + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\Gamma(k+1)} \bar{G}_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(z_0 \left| \begin{array}{l} -k, a_1 - k, \dots, a_n - k \quad ; \quad a_{n+1} - k, \dots, a_p - k \\ b_1 - k, \dots, b_m - k \quad ; \quad 0, b_{m+1} - k, \dots, b_q - k \end{array} \right. \right) (z - z_0)^k \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

Plus spécifiquement, au voisinage de l'origine, on peut écrire ([49], formule 07.34.06.0006.01) :

$$\begin{aligned} \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(z \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \quad ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m \quad ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = \\ \sum_{k=1}^m \frac{\prod_{j=1, j \neq k}^m \Gamma(b_j - b_k) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + b_k)}{\prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - b_k) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + b_k)} z^{b_k} (1 + O(z)) \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

Cette expression est étonnante car elle montre le rôle spécifique et essentiel, au voisinage de l'origine, des coefficients $b_k, k \in [1, m]$. Rappelons l'expression de la transformée de Mellin d'une fonction de Meijer telle que seuls les coefficients $b_j, j \in [1, m]$ soient définis (relation B.9) :

$$\mathcal{M} \left[\bar{G}_{0,m}^{m,0} \left(x \left| \begin{array}{l} \cdot \quad ; \quad \cdot \\ b_1, \dots, b_m \quad ; \quad \cdot \end{array} \right. \right) \right] (s) = \prod_{j=n+1}^p \Gamma(b_j + s)$$

Appliquée à une fonction de Meijer que l'on souhaite nulle à l'origine et croissante à l'origine, on doit avoir la condition :

$$\forall j \in [1, m], \quad b_j > 0 \quad (\text{B.41})$$

Ensuite, en définissant b_{\min} tel que $\forall j \in [1, m], b_{\min} \leq b_j$, l'expression B.40 peut se réduire au terme correspondant à la plus petite puissance de x :

$$\bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(z \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \quad ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m \quad ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = \frac{\prod_{j=1, j \neq k}^m \Gamma(b_j - b_{\min}) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + b_{\min})}{\prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - b_{\min}) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + b_{\min})} z^{b_{\min}} (1 + O(z))$$

ce qui permet de poser les conditions suivantes :

$$1 - a_j + b_{min} > 0 \quad \forall j \in [1, n] \quad (\text{B.42})$$

$$a_j - b_{min} > 0 \quad \forall j \in [n + 1, p] \quad (\text{B.43})$$

$$1 - b_j + b_{min} > 0 \quad \forall j \in [m + 1, q] \quad (\text{B.44})$$

B.2.8 Le groupe commutatif $\mathcal{GM}(\bar{G}_{q,p}^{m,m}, \hat{\star})$

Soient les fonctions de Meijer définies par (relation B.5) :

$$\bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} ; \begin{array}{c} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} x^{-s} ds$$

A partir de cette notation, il est évident que toute fonction de Meijer $\bar{G}_{q,p}^{m,m}$ se décompose en convolution de fonctions de Meijer $\bar{G}_{0,n}^{n,0}$, $\bar{G}_{m,0}^{0,m}$, $\bar{G}_{0,p}^{0,0}$ et $\bar{G}_{q,0}^{0,0}$:

$$\begin{aligned} \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} ; \begin{array}{c} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = \\ \bar{G}_{n,0}^{0,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \right) \hat{\star} \bar{G}_{0,q}^{0,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ b_1, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \\ \hat{\star} \bar{G}_{p,0}^{0,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ \cdot \end{array} \right. \right) \hat{\star} \bar{G}_{0,m}^{m,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ b_1, \dots, b_m \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

Reprenons les propriétés de notations (paragraphe B.2.1)

Au final, nous avons vu que :

- la convolution de Mellin possède un élément neutre, le “Dirac-Mellin”, qui peut s’exprimer comme une fonction de Meijer $\bar{G}_{0,0}^{0,0}$ (paragraphe B.2.4) :

$$\delta_\mu^{\mathcal{M}}(x) = \bar{G}_{0,0}^{0,0} \left(\frac{x}{\mu} \left| \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \right)$$

- la convolution de Mellin était un opérateur interne pour ces fonctions.
- toute fonction de Mellin possède un élément inverse pour la convolution de Mellin.

Comme, de plus, la convolution de Mellin est commutative, on en déduit que les fonctions de Meijer $\bar{G}_{q,p}^{m,m}$ associées à la convolution de Mellin forment un groupe commutatif.

Les lois de Meijer associées à la convolution de Mellin forment un groupe commutatif.

B.2.9 Changement de notation : $x \rightarrow x^2$

Soit une fonction de Meijer $f(x)$ s’écrivant (relation fondamentale B.5) :

$$\bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} ; \begin{array}{c} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} x^{-s} ds$$

On peut réécrire cette dernière expression sous la forme :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} (x)^{-s} ds \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} (x^2)^{-\frac{s}{2}} ds \end{aligned}$$

En appliquant la formule de duplication de Legendre (relation A.9), on peut réécrire chaque fonction Gamma dépendant de la variable s sous une forme dépendant de $\frac{s}{2}$, ce qui donne :

$$\Gamma(b_j + s) = \frac{2^{b_j}}{\sqrt{\pi}} 4^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{b_j}{2} + \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{b_j + 1}{2} + \frac{s}{2}\right)$$

ainsi que, dans les cas où cette relation s'applique aux x négatifs :

$$\Gamma(1 - a_j - s) = \frac{2^{1-a_j}}{\sqrt{\pi}} 4^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-a_j}{2} - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2-a_j}{2} - \frac{s}{2}\right)$$

En analysant le terme dans l'intégrale ne concernant que les fonctions Gamma de la variable s , on remarque qu'il peut s'écrire maintenant en fonction de $\frac{s}{2}$:

$$\propto \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \left(\Gamma\left(\frac{b_j}{2} + \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{b_j+1}{2} + \frac{s}{2}\right)\right) \prod_{j=1}^n \left(\Gamma\left(\frac{1-a_j}{2} - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2-a_j}{2} - \frac{s}{2}\right)\right)}{\prod_{j=m+1}^q \left(\Gamma\left(\frac{1-b_j}{2} - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2-b_j}{2} - \frac{s}{2}\right)\right) \prod_{j=n+1}^p \left(\Gamma\left(\frac{a_j}{2} + \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{a_j+1}{2} + \frac{s}{2}\right)\right)} (x^2)^{-\frac{s}{2}} ds$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$\propto \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \left(\Gamma\left(\frac{b_j}{2} + s\right) \Gamma\left(\frac{b_j+1}{2} + s\right)\right) \prod_{j=1}^n \left(\Gamma\left(\frac{1-a_j}{2} - s\right) \Gamma\left(\frac{2-a_j}{2} - s\right)\right)}{\prod_{j=m+1}^q \left(\Gamma\left(\frac{1-b_j}{2} - s\right) \Gamma\left(\frac{2-b_j}{2} - s\right)\right) \prod_{j=n+1}^p \left(\Gamma\left(\frac{a_j}{2} + s\right) \Gamma\left(\frac{a_j+1}{2} + s\right)\right)} (x^2)^{-s} ds$$

expression qui est celle d'une fonction de Meijer de la variable x^2 , ce qui donne :

$$\begin{aligned} \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \quad ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m \quad ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = \\ K \bar{G}_{2p,2q}^{2m,2n} \left((\alpha x)^2 \left| \begin{array}{l} \frac{a_1}{2}, \frac{a_1+1}{2}, \dots, \frac{a_n}{2}, \frac{a_n+1}{2} \quad ; \quad \frac{a_{n+1}}{2}, \frac{a_{n+1}-1}{2}, \dots, \frac{a_p}{2}, \frac{a_p-1}{2} \\ \frac{b_1}{2}, \frac{b_1+1}{2}, \dots, \frac{b_m}{2}, \frac{b_m+1}{2} \quad ; \quad \frac{b_{m+1}-1}{2}, \frac{b_{m+1}-1}{2}, \dots, \frac{b_q}{2}, \frac{b_q-1}{2} \end{array} \right. \right) \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

avec :

$$\alpha = 2^{q-p}$$

et

$$K = \sqrt{\pi}^{p+q} \frac{\prod_{j=1}^m 2^{b_j} \prod_{j=1}^n 2^{1-a_j}}{\prod_{j=m+1}^q 2^{1-b_j} \prod_{j=n+1}^p 2^{a_j}}$$

relation que l'on peut appeler "relation de duplication des fonctions de Meijer" : toute fonction de Meijer de la variable x peut s'écrire comme une fonction de Meijer de la variable x^2 .

B.3 Quelques fonctions usuelles sous forme de fonction de Meijer

B.3.1 Fonctions courantes

– la fonction "Mellin-Heaviside" Y_M :

$$\begin{cases} Y_M(x) = 0 & x < 1 \\ Y_M(x) = 1 & x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow Y_M(x) = \bar{G}_{1,1}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{l} 1 \quad ; \quad \cdot \\ \cdot \quad ; \quad 0 \end{array} \right. \right)$$

ce qui permet d'en déduire la fonction de Heaviside traditionnelle $Y(x - \mu)$ (avec $\mu > 0$) :

$$\begin{cases} Y(x - \mu) = 0 & x < \mu \\ Y(x - \mu) = 1 & x > \mu \end{cases} \Leftrightarrow Y(x - \mu) = \bar{G}_{1,1}^{0,1} \left(\frac{x}{\mu} \left| \begin{array}{l} 1 \quad ; \quad \cdot \\ \cdot \quad ; \quad 0 \end{array} \right. \right)$$

– la fonction logarithme :

$$\log x = \bar{G}_{2,2}^{1,2} \left(x - 1 \left| \begin{array}{l} 1, 1 \quad ; \quad \cdot \\ 1 \quad ; \quad 0 \end{array} \right. \right)$$

ou de manière équivalente :

$$\bar{G}_{2,2}^{1,2} \left(x \left| \begin{array}{l} 1, 1 \quad ; \quad \cdot \\ 1 \quad ; \quad 0 \end{array} \right. \right) = \log(x + 1)$$

– la fonction exponentielle décroissante :

$$e^{-x} = \bar{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ 0 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \right) \quad (\text{B.46})$$

– l'inverse de la fonction exponentielle décroissante qui s'obtient en appliquant la relation B.22 à l'expression B.46 :

$$e^{-\frac{1}{x}} = \bar{G}_{1,0}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{c} 1 \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \right) \quad (\text{B.47})$$

– la fonction Gamma Incomplète $\gamma(a, x)$:

$$\gamma(a, x) = \bar{G}_{1,0}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{c} 1 \\ a \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ 0 \end{array} \right. \right) \quad (\text{B.48})$$

– la fonction d'erreur erfc :

$$\text{erfc}(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \bar{G}_{1,2}^{1,1} \left(x^2 \left| \begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{2} \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ 0 \end{array} \right. \right) \quad (\text{B.49})$$

– la fonction exponentielle croissante :

$$e^x = \bar{G}_{1,1}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{c} a \\ a \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \right) \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad (\text{B.50})$$

– la fonction sinus :

$$\sin x = \sqrt{\pi} \bar{G}_{0,2}^{1,0} \left(\frac{x^2}{4} \left| \begin{array}{c} \cdot \\ 0 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \frac{1}{2} \end{array} \right. \right)$$

– la fonction cosinus :

$$\cos x = \sqrt{\pi} \bar{G}_{0,2}^{1,0} \left(\frac{x^2}{4} \left| \begin{array}{c} \cdot \\ \frac{1}{2} \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ 0 \end{array} \right. \right)$$

– un exemple de fraction rationnelle :

$$\frac{x}{1+x} = \bar{G}_{2,2}^{1,2} \left(x-1 \left| \begin{array}{c} 1,1 \\ 1 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ 1 \end{array} \right. \right)$$

B.3.2 Fonctions Hypergéométriques

Les fonctions hypergéométriques possèdent des expressions assez simples sous forme de fonction de Meijer ([8] page 215) :

$$\begin{aligned} & {}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x) \\ &= \frac{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j)}{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j)} G_{p,q+1}^{1,p} \left(-x \left| \begin{array}{c} 1-a_1, \dots, 1-a_p \\ 0 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ 1-b_1, \dots, 1-b_q \end{array} \right. \right) \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j)}{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j)} G_{q+1,p}^{p,1} \left(-\frac{1}{x} \left| \begin{array}{c} 1 \\ a_1, \dots, a_p \end{array} ; \begin{array}{c} b_1, \dots, b_q \\ \cdot \end{array} \right. \right) \quad (\text{B.52})$$

C'est la seconde expression qui est utilisée pour l'expression sous forme de fonctions "classiques" de la loi \mathcal{Q}_y (voir 4.30).

Le formalisme des fonctions de Meijer permet alors d'en avoir les expressions analytiques de la dérivée (exprimée à partir de la relation B.51) :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} {}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x) \\ &= -\frac{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j)}{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j)} G_{p+1, q+2}^{1, p+1} \left(-x \left| \begin{array}{c} -1, -a_1, \dots, -a_p \\ -1. \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ 0, -b_1, \dots, -b_q \end{array} \right) \end{aligned}$$

ainsi que de la primitive :

$$\begin{aligned} & {}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x) \\ &= -\frac{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j)}{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j)} \frac{d}{dx} G_{p+1, q+2}^{1, p+1} \left(-x \left| \begin{array}{c} 1, 2 - a_1, \dots, 2 - a_p \\ 1 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ 0, 2 - b_1, \dots, 2 - b_q \end{array} \right) \end{aligned}$$

On déduit aussi de ces formulations très générales (reprises en partie au tableau B.1) :

– l'expression de la fonction hypergéométrique ${}_2F_1$:

$${}_2F_1(a_1, a_2; b_1; x) = \frac{\Gamma(b_1)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} G_{2,2}^{1,2} \left(-x \left| \begin{array}{c} 1 - a_1, 1 - a_2 \\ 0 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ 1 - b_1 \end{array} \right) \quad (\text{B.53})$$

dont la primitive a la forme :

$$\frac{\Gamma(b_1)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} G_{3,3}^{1,3} \left(-x \left| \begin{array}{c} 1, 2 - a_1, 2 - a_2 \\ 0 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ 2 - b_1, 0 \end{array} \right)$$

– l'expression de la fonction hypergéométrique confluyente ${}_1F_1$ (fonction de Kummer) :

$${}_1F_1(a; b; x) = M(a, b, x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} G_{1,2}^{1,1} \left(-x \left| \begin{array}{c} 1 - a \\ 0 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ 1 - b \end{array} \right) \quad (\text{B.54})$$

– l'expression de la fonction hypergéométrique de Tricomi ${}_2F_0$:

$${}_2F_0(a_1, a_2; x) = \frac{1}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} G_{2,1}^{1,2} \left(-x \left| \begin{array}{c} 1 - a_1, 1 - a_2 \\ 0 \end{array} \right. ; \cdot \right) \quad (\text{B.55})$$

– l'expression de la fonction hypergéométrique ${}_0F_1$:

$${}_0F_1(c; x) = \Gamma(c) G_{0,2}^{1,0} \left(-x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ 0 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ 1 - c \end{array} \right) \quad (\text{B.56})$$

– la fonction ${}_3F_2$:

$${}_3F_2(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x) = \frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(a_3)} G_{3,3}^{1,3} \left(-x \left| \begin{array}{c} 1 - a_1, 1 - a_2, 1 - a_3 \\ 0 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ 1 - b_1, 1 - b_2 \end{array} \right)$$

dont la primitive a la forme :

$$\frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(a_3)} G_{4,4}^{1,4} \left(-x \left| \begin{array}{c} 1, 2 - a_1, 2 - a_2, 2 - a_3 \\ 0 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ 2 - b_1, 2 - b_2, 0 \end{array} \right)$$

Parmi les autres fonctions parfois utiles de l'univers des fonction hypergéométrique et que l'on peut rencontrer en imagerie cohérente, on a :

Fonction	Notation	Expressions sous forme de fonction de Meijer
hypergéométrique	${}_2F_1(a, b; c; x)$	$\frac{\Gamma(b_1)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} G_{2,2}^{1,2} \left(-x \left \begin{array}{c} 1 - a_1, 1 - a_2 \\ 0 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ 1 - b_1 \end{array} \right)$
Tricomi	${}_2F_0(a, b; x)$	$\frac{1}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} G_{2,1}^{1,2} \left(-x \left \begin{array}{c} 1 - a_1, 1 - a_2 \\ 0 \end{array} \right. ; \cdot \right)$
hypergéométrique confluente	${}_1F_1(a; c; x)$	$\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} G_{1,2}^{1,1} \left(-x \left \begin{array}{c} 1 - a \\ 0 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ 1 - b \end{array} \right)$
	${}_0F_1(c; x)$	$\Gamma(c) G_{0,2}^{1,0} \left(-x \left \begin{array}{c} \cdot \\ 0 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ 1 - c \end{array} \right)$

TABLE B.1 – Expressions des fonctions hypergéométriques les plus usuelles sous forme de fonctions de Meijer (voir le tableau A.1 page 279 qui en donne les transformées de Mellin).

- la fonction U (qui est en fait la fonction de Tricomi Ψ , relation A.31), que l'on peut exprimer sous forme de fonction de Meijer (grâce à la relation B.55) :

$$\begin{aligned}
U_{a,b}(z) &= z^{-a} {}_2F_0 \left(a, a - b + 1; -\frac{1}{x} \right) \\
&= z^{-a} \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(a-b+1)} G_{2,1}^{1,2} \left(\frac{1}{x} \left| \begin{array}{c} 1 - a, b - a \\ 0 \end{array} \right. ; \cdot \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(a-b+1)} G_{1,2}^{2,1} \left(x \left| \begin{array}{c} 1 - a \\ 0, 1 - b \end{array} \right. ; \cdot \right)
\end{aligned}$$

- la fonction de Whittaker W , définie par (relation A.34)

$$W_{a,b}(z) = e^{-\frac{z}{2}} z^a {}_2F_0 \left(b - a + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - a - b; -\frac{1}{z} \right)$$

qui s'écrit :

$$W_{a,b}(z) = e^{-\frac{z}{2}} z^a \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2} + b - a)\Gamma(\frac{1}{2} - a - b)} G_{2,1}^{1,2} \left(1/z \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} + a - b, \frac{1}{2} + a + b \\ 0 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \quad (\text{B.57})$$

expression bien caractéristique d'une fonction hypergéométrique ${}_2F_0$ mais qui, après quelques jongleries, peut aussi s'écrire :

$$W_{a,b}(z) = e^{-\frac{z}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2} + b - a)\Gamma(\frac{1}{2} - a - b)} G_{2,1}^{1,2} \left(z \left| \begin{array}{c} a + 1 \\ \frac{1}{2} + b, \frac{1}{2} - b \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \quad (\text{B.58})$$

expression au final assez sympathique.

B.3.3 Fonctions de Bessel

La fonction de Bessel modifiée de troisième espèce $K_\nu(x)$ (c'est à dire la seconde fonction de Bessel) s'exprime à partir de la fonction hypergéométrique ${}_2F_0$ (relation A.37) :

$$K_\nu(x) = \sqrt{\pi} e^{-x} (2x)^{-\frac{1}{2}} {}_2F_0 \left(\frac{1}{2} + \nu, \frac{1}{2} - \nu; -\frac{1}{2x} \right)$$

En exprimant ${}_2F_0$ comme une fonction de Meijer, on obtient :

$$K_\nu(x) = \sqrt{\pi} e^{-x} (2x)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2} + \nu) \Gamma(\frac{1}{2} - \nu)} G_{2,1}^{1,2} \left(\frac{1}{2x} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} - \nu, \frac{1}{2} + \nu \\ 0 \end{array} \right. ; \cdot \right)$$

ce qui se simplifie en (application de la relation B.25) :

$$K_\nu(x) = \sqrt{\pi} e^{-x} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2} + \nu) \Gamma(\frac{1}{2} - \nu)} G_{2,1}^{1,2} \left(\frac{1}{2x} \left| \begin{array}{c} 1 + \nu, 1 - \nu \\ \frac{1}{2} \end{array} \right. ; \cdot \right)$$

puis, en appliquant la méthode B.22, on obtient :

$$K_\nu(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2} + \nu) \Gamma(\frac{1}{2} - \nu)} e^{-x} G_{1,2}^{2,1} \left(2x \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \nu, -\nu \end{array} \right. ; \cdot \right)$$

ce qui est une des relations fondamentales des fonctions de Meijer recensées dans le Bateman ([8], paragraphe 5.6, formule 7).

Pour compléter ce labyrinthe, il faut noter que le Bateman donne la relation générale suivante ([8], paragraphe 5.6, formule 4) :

$$K_{a-b}(2\sqrt{x}) = \frac{x^{-\frac{a+b}{2}}}{2} \bar{G}_{0,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ a, b \end{array} \right. ; \cdot \right) \quad (\text{B.59})$$

ce qui après quelques jonglerie mène par exemple à cette relation somme toute assez simple mais méconnue :

$$K_\nu(2y) = \frac{1}{2} \bar{G}_{0,2}^{2,0} \left(y^2 \left| \begin{array}{c} \cdot \\ \frac{\nu}{2}, -\frac{\nu}{2} \end{array} \right. ; \cdot \right) \quad (\text{B.60})$$

qui est celle généralement utilisée en imagerie radar (loi K en amplitude).

B.4 Les fonctions de Meijer dans les logiciels actuels

La définition B.5 permet aisément l'utilisation de certains logiciels ayant les fonctions de Meijer dans leurs boîtes à outils. Par exemple, pour une fonction de Meijer $\bar{G}_{p,q}^{m,n}$:

$$\bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} \right. ; \begin{array}{c} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right)$$

– sous Maple, on utilise la fonction `MeijerG` sous la forme :

$$\text{MeijerG}([a_1, \dots, a_n], [a_{n+1}, \dots, a_p], [b_1, \dots, b_m], [b_{m+1}, \dots, b_q], x)$$

– en Python, on utilise la fonction `meijerg` de la librairie `mpmath` :

$$\text{mpmath.meijerg}([a_1, \dots, a_n], [a_{n+1}, \dots, a_p], [b_1, \dots, b_m], [b_{m+1}, \dots, b_q], x)$$

Dans les deux cas, les paramètres m, n, p, q de la fonction de Meijer $\bar{G}_{p,q}^{m,n}$ vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} \overbrace{a_1, \dots, a_n}^n \\ \underbrace{b_1, \dots, b_m}_m \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \overbrace{a_{n+1}, \dots, a_p}^{p-n} \\ \underbrace{b_{m+1}, \dots, b_q}_{q-m} \end{array} \right) \\ \text{mpmath.meijerg} \left(\left[\underbrace{[a_1, \dots, a_n]}_n, \underbrace{[a_{n+1}, \dots, a_p]}_{p-n} \right], \left[\underbrace{[b_1, \dots, b_m]}_m, \underbrace{[b_{m+1}, \dots, b_q]}_{q-m} \right], x \right) \end{array} \right.$$

Pour passer d'une formulation de ces logiciels à la notation canonique \bar{G} , on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{mpmath.meijerg} \left(\left[\underbrace{[a_1, \dots, a_n]}_n, \underbrace{[a'_1, \dots, a'_{n'}]}_{n'} \right], \left[\underbrace{[b_1, \dots, b_m]}_m, \underbrace{[b'_1, \dots, b'_{m'}]}_{m'} \right], x \right) \\ \bar{G}_{n+n', m+m'}^{m, n} \left(x \left| \begin{array}{l} \underbrace{a_1, \dots, a_n}_n ; \underbrace{a'_1, \dots, a'_{n'}}_{n'} \\ \underbrace{b_1, \dots, b_m}_m ; \underbrace{b'_1, \dots, b'_{m'}}_{m'} \end{array} \right. \right) \end{array} \right.$$

Annexe C

Densité de probabilité et fonctions de Meijer

Cette annexe est dédiée aux lois de probabilité s'exprimant sous forme de fonctions de Meijer (comme évoqué au paragraphe 3.4.3, on peut attribuer à ces lois le nom de "lois de Meijer"). Elle pose aussi les conditions que doit suivre une fonction de Meijer pour qu'elle puisse effectivement représenter une densité de probabilité définie sur \mathbb{R}^+ .

C.1 Densités de probabilité et formalisme "à la Meijer"

C.1.1 Loi de probabilité s'exprimant comme une fonction de Meijer

Soit une densité de probabilité $p(x)$ s'exprimant comme une fonction de Meijer. Au chapitre 3, paragraphe 3.4.3, nous avons proposé le nom de loi de Meijer à ce type de densité de probabilité ainsi que la notation $\overline{LG}_{p,q}^{m,n}(x)$ pour ce type de lois.

On a alors (relation 3.37) :

$$\overline{LG}_{p,q}^{m,n}(x) = K \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \quad ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m \quad ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right)$$

K étant une constante ne dépendant que des a_i et b_i :

$$K = \frac{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(-b_j) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + 1)}{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + 1) \prod_{j=1}^n \Gamma(-a_j)}$$

Sous cette forme, sa fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit :

$$\phi(s) = K \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)}$$

et on vérifie que l'on a bien :

$$\phi(s)|_{s=1} = 1$$

C.1.2 Propriétés fondamentales

Soit $\overline{LG}_{p,q}^{m,n}(x)$ une loi de probabilité s'exprimant sous forme de fonction de Meijer :

$$\overline{LG}_{p,q}^{m,n}(x) = \frac{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(-b_j) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + 1)}{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + 1) \prod_{j=1}^n \Gamma(-a_j)} \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} ; \begin{array}{l} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right)$$

Sa fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit :

$$\phi(s) = \frac{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(-b_j) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + 1)}{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + 1) \prod_{j=1}^n \Gamma(-a_j)} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)}$$

et vérifie $\phi(s = 1) = 1$.

Ses moments d'ordre r (s'ils existent) s'écrivent :

$$m_r = \frac{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(-b_j) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + 1)}{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + 1) \prod_{j=1}^n \Gamma(-a_j)} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + r + 1) \prod_{j=1}^n \Gamma(-a_j - r)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(-b_j - r) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + r + 1)} \quad (C.1)$$

Par dérivation de la seconde fonction caractéristique de deuxième espèce (c'est à dire par dérivation logarithmique de la seconde fonction caractéristique), on obtient ses log-cumulants ($\forall r \geq 2$) :

$$\sum_{j=1}^m \Psi(r - 1, b_j + 1) + (-1)^r \sum_{j=1}^n \Psi(1, -a_j) - \sum_{j=n+1}^p \Psi(r - 1, a_j) - (-1)^r \sum_{j=m+1}^q \Psi(r - 1, -b_j) \quad (C.2)$$

C.1.3 Fonction de répartition

Soit $f(x)$ une loi de probabilité sur \mathbb{R}^+ telle que :

$$f(x) \propto \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} ; \begin{array}{l} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right)$$

En appliquant la règle opératoire de la primitive d'une fonction de Meijer B.36, on obtient sa primitive, c'est à dire sa fonction de répartition :

$$F(x) = \bar{G}_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(x \left| \begin{array}{l} 1, a_1 + 1, \dots, a_n + 1 \\ b_1 + 1, \dots, b_m + 1 \end{array} ; \begin{array}{l} a_{n+1} + 1, \dots, a_p + 1 \\ 0, b_{m+1} + 1, \dots, b_q + 1 \end{array} \right. \right) \quad (C.3)$$

Il est facile de montrer à l'aide des relations C.4 et C.3 que, pour une loi de probabilité, la loi de répartition de sa loi inverse est la loi inverse de sa loi de répartition.

C.1.4 Conditions d'existence

Soit une fonction de Meijer $p(x) = \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} ; \begin{array}{l} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right)$. Si elle est supposée être une densité de probabilité correspondant à la variable X , il existe une fonction $f(x)$ telle que $f'(x) = p(x)$. Elle doit vérifier :

– A l’infini, la ddp doit être nulle :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = 0^+$$

– A l’origine, la fonction de répartition doit être nulle :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0^+$$

– L’intégrale d’une ddp est égale à 1 :

$$\int_0^{\infty} p(x) dx = 1$$

c’est à dire

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1^-$$

Considérons maintenant la variable aléatoire Y telle que

$$Y = \frac{1}{X}$$

soient $q(y)$ sa densité de probabilité et $g(y)$ sa fonction de répartition. On alors bien évidemment les mêmes conditions :

– A l’infini, la ddp doit être nulle :

$$\lim_{y \rightarrow \infty} q(y) = 0^+$$

– A l’origine, la fonction de répartition doit être nulle :

$$\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 0^+$$

– L’intégrale d’une ddp est égale à 1 :

$$\int_0^{\infty} q(y) dy = 1$$

c’est à dire

$$\lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = 1^-$$

$$\int_0^{\infty} \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \quad ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m \quad ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) dx = 1$$

A l’origine, le comportement des fonctions de répartition

$$\bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \quad ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m \quad ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right)$$

et

$$\bar{G}_{q,p}^{n,m} \left(x \left| \begin{array}{l} -b_1 - 1, \dots, -b_m - 1 \quad ; \quad -b_{m+1} - 1, \dots, -b_q - 1 \\ -a_1 - 1, \dots, -a_n - 1 \quad ; \quad -a_{n+1} - 1, \dots, -a_p - 1 \end{array} \right. \right)$$

Pour $f(x)$, on a :

$$a_j - b_{min} > 0 \quad \forall j \in [n+1, p]$$

ce qui donne pour $g(y)$:

$$a_{max} - b_j > 0 \quad \forall j \in [m+1, q]$$

C.2 Changement de variable : loi inverse et loi généralisée

C.2.1 Loi inverse

Soit une variable aléatoire X et $f(x)$ sa densité de probabilité sur \mathbb{R}^+ telle que :

$$f(x) \propto \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} ; \begin{array}{l} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right)$$

Si Y est une variable aléatoire telle que $Y = \frac{1}{X}$, sa densité de probabilité $h(x)$ vérifie (relation 2.46) :

$$h(x) = \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\propto \frac{1}{x^2} \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(\frac{1}{x} \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} ; \begin{array}{l} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

En appliquant les règles opératoires B.22 (passage de x à $1/x$) et B.25 (pour la multiplication par $1/x^2$), on obtient :

$$h(x) \propto \bar{G}_{q,p}^{n,m} \left(x \left| \begin{array}{l} -b_1 - 1, \dots, -b_m - 1 \\ -a_1 - 1, \dots, -a_n - 1 \end{array} ; \begin{array}{l} -b_{m+1} - 1, \dots, -b_q - 1 \\ -a_{n+1} - 1, \dots, -a_p - 1 \end{array} \right. \right)$$

On a donc un mode opératoire assez simple pour définir la loi inverse d'une loi de probabilité donnée :

$$\begin{array}{c} \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} ; \begin{array}{l} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \\ \uparrow \\ \text{Loi inverse} \\ \downarrow \\ \bar{G}_{q,p}^{n,m} \left(x \left| \begin{array}{l} -b_1 - 1, \dots, -b_m - 1 \\ -a_1 - 1, \dots, -a_n - 1 \end{array} ; \begin{array}{l} -b_{m+1} - 1, \dots, -b_q - 1 \\ -a_{n+1} - 1, \dots, -a_p - 1 \end{array} \right. \right) \end{array} \quad (\text{C.4})$$

On en déduira que pour une loi de Meijer $\overline{LG}_{p,q}^{m,n}(x)$:

$$\overline{LG}_{p,q}^{m,n}(x) = \frac{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(-b_j) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + 1)}{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + 1) \prod_{j=1}^n \Gamma(-a_j)} \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} ; \begin{array}{l} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right)$$

alors sa loi inverse $q(x)$ s'exprime comme :

$$q(x) = \frac{\prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - 1) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(-b_j)}{\prod_{j=1}^n \Gamma(-a_j) \prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - 1)} \bar{G}_{q,p}^{n,m} \left(x \left| \begin{array}{l} -b_1 - 1, \dots, -b_m - 1 \\ -a_1 - 1, \dots, -a_n - 1 \end{array} ; \begin{array}{l} -b_{m+1} - 1, \dots, -b_q - 1 \\ -a_{n+1} - 1, \dots, -a_p - 1 \end{array} \right. \right)$$

et est donc aussi une loi de Meijer.

C.2.2 Lois généralisées

Soit une variable aléatoire X décrite par sa densité de probabilité $p_X(x)$, qui s'exprime sous la forme d'une fonction de Meijer. Soit une nouvelle variable aléatoire Y telle que $X = Y^\eta$, et soit $p_Y(y)$ sa densité de probabilité. On a la relation fondamentale (relation 2.55) :

$$p_Y(y) = |\eta| y^{(\eta-1)} p_X(y^\eta)$$

Puisque $p_X(x)$ s'exprime sous la forme d'une fonction de Meijer, on a :

$$p_X(x) = K \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} \right. ; \begin{array}{l} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right)$$

on a :

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= |\eta| y^{(\eta-1)} p_X(y^\eta) \\ &= |\eta| y^{(\eta-1)} K \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(y^\eta \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} \right. ; \begin{array}{l} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right) \\ &= |\eta| (y^\eta)^{\frac{\eta-1}{\eta}} K \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(y^\eta \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} \right. ; \begin{array}{l} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right) \\ &= |\eta| K \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(y^\eta \left| \begin{array}{l} a_1 + \frac{\eta-1}{\eta}, \dots, a_n + \frac{\eta-1}{\eta} \\ b_1 + \frac{\eta-1}{\eta}, \dots, b_m + \frac{\eta-1}{\eta} \end{array} \right. ; \begin{array}{l} a_{n+1} + \frac{\eta-1}{\eta}, \dots, a_p + \frac{\eta-1}{\eta} \\ b_{m+1} + \frac{\eta-1}{\eta}, \dots, b_q + \frac{\eta-1}{\eta} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (C.5)$$

C.2.3 Lois en amplitude

C'est un cas particulier de lois généralisées pour lesquelles $\eta = 2$. Pour la variable aléatoire X décrite par sa densité de probabilité $p_X(x)$ (qui s'exprime sous la forme d'une fonction de Meijer), on considère la nouvelle variable aléatoire Y telle que $X = Y^2$, et soit $p_Y(y)$ sa densité de probabilité. On a alors :

$$p_Y(y) = |2y| p_X(y^2)$$

et au final

$$p_Y(y) = |2y| K \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(y^2 \left| \begin{array}{l} a_1 + \frac{1}{2}, \dots, a_n + \frac{1}{2} \\ b_1 + \frac{1}{2}, \dots, b_m + \frac{1}{2} \end{array} \right. ; \begin{array}{l} a_{n+1} + \frac{1}{2}, \dots, a_p + \frac{1}{2} \\ b_{m+1} + \frac{1}{2}, \dots, b_q + \frac{1}{2} \end{array} \right) \quad (C.6)$$

C.3 Passage d'une expression selon x à une expression selon x^2

La "relation de duplication des fonctions de Meijer" (relation B.45) peut tout à fait s'appliquer aux lois sur \mathbb{R}^+ dans leur formalisme normal (fonction de la variable x : lois en intensité). On peut ainsi exprimer toute loi en intensité comme une loi en amplitude (fonction de la variable x^2).

A titre d'exemple, on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}[\mu, L](x) &= \frac{L}{\mu} \frac{1}{\Gamma(L)} \bar{G}_{0,1}^{1,0} \left(\frac{Lx}{\mu} \left| \begin{array}{l} \cdot \\ L-1 \end{array} \right. ; \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \\ &= \frac{L}{\mu} \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \bar{G}_{0,2}^{2,0} \left(\left(\frac{Lx}{\mu} \right)^2 \left| \begin{array}{l} \cdot \\ \frac{L-1}{2}, \frac{L}{2} \end{array} \right. ; \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \end{aligned}$$

c'est à dire¹

$$\mathcal{G}[\mu, L](x) = \mathcal{KA} \left[\mu \frac{\sqrt{L+1}}{\sqrt{L}}, \frac{L}{2}, \frac{L+1}{2} \right](x) \quad (C.7)$$

1. L'expression obtenue prend en compte le particularisme de la définition des lois en amplitude et du choix du paramètre μ qui doit permettre, dans l'hypothèse où x est une variable physique ayant une certaine dimension, d'avoir $\frac{x}{\mu}$ sans dimension.

C.4 Deux propriétés importantes des lois de Meijer

C.4.1 Lois de Meijer et convolution de Mellin

Un des aspects les plus spectaculaires des lois de Meijer est qu'elles forment un groupe commutatif vis à vis de la convolution de Mellin : ce point est une conséquence des conclusions du paragraphe B.2.8. En reprenant les notations du paragraphe 3.4.3 définissant les lois de Meijer $\overline{LG}_{p,q}^{m,n}$, on a donc :

$$\begin{aligned} \overline{LG}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n; a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m; b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) & \star \overline{LG}_{p',q'}^{m',n'} \left(x \left| \begin{array}{l} a'_1, \dots, a'_{n'}; a'_{n'+1}, \dots, a_{p'} \\ b'_1, \dots, b'_{m'}; b'_{m'+1}, \dots, b_{q'} \end{array} \right. \right) \\ & = \overline{LG}_{p+p',q+q'}^{m+m',n+n'} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_{n'}; a_{n+1}, \dots, a_p, a'_{n'+1}, \dots, a_{p'} \\ b_1, \dots, b_m, b'_1, \dots, b'_{m'}; b_{m+1}, \dots, b_q, b'_{m'+1}, \dots, b_{q'} \end{array} \right. \right) \end{aligned} \quad (C.8)$$

C.4.2 Moyenne géométrique d'une loi de Meijer

Principe

La relation C.8 peut être appliqué dans le calcul de la moyenne géométrique d'une variable aléatoire suivant une loi de Meijer donnée.

Dans le cas où X et Y sont deux réalisations d'une loi de Meijer donnée, on calcule alors la variable aléatoire Z telle que :

$$Z = \sqrt{XY} = \sqrt{X}\sqrt{Y} \quad \text{avec } N = 2$$

On remarque deux étapes bien connues :

- le passage des variables X et Y à la variable XY : on sait que cette étape se modélise par une convolution de Mellin des lois de la variable X et de la variable Y et il suffit d'appliquer la relation C.8.
- le passage de la variable Z à la variable \sqrt{Z} et il suffit d'appliquer la relation C.6

Au final on obtient aisément la loi de Meijer d'une moyenne géométrique d'une loi de Meijer donnée $\overline{LG}_{p,q}^{m,n}$, de fonction caractéristique de deuxième espèce $\phi_X(s)$ grâce à l'expression de sa fonction caractéristique de deuxième espèce $\phi_Z(s)$:

$$\phi_Z(s) = \left(\phi_X \left(\frac{s+N-1}{N} \right) \right)^N = \left(\phi_X \left(\frac{s}{N} + 1 - \frac{1}{N} \right) \right)^N$$

et, dans le cas d'une loi de Meijer :

$$\overline{LG}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n; a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m; b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right)$$

on voit que l'opération racine N -ème modifie les paramètres et que l'opération d'élevation à la puissance N de la fonction caractéristique de deuxième espèce va opérer en répliquant N fois les paramètres, ce qui donne au final :

$$\overline{LG}_{Np,Nq}^{Nm,Nn} \left(x^N \left| \begin{array}{l} \underbrace{a_1 + 1 - \frac{1}{N}, \dots, a_1 + 1 - \frac{1}{N}}_{N \text{ fois}}, \dots, \underbrace{a_n + 1 - \frac{1}{N}, \dots, a_n + 1 - \frac{1}{N}}_{N \text{ fois}} ; \\ \underbrace{b_1 + 1 - \frac{1}{N}, \dots, b_1 + 1 - \frac{1}{N}}_{N \text{ fois}}, \dots, \underbrace{b_m + 1 - \frac{1}{N}, \dots, b_m + 1 - \frac{1}{N}}_{N \text{ fois}} ; \\ \underbrace{a_{n+1} + 1 - \frac{1}{N}, \dots, a_{n+1} + 1 - \frac{1}{N}}_{N \text{ fois}}, \dots, \underbrace{a_p + 1 - \frac{1}{N}, \dots, a_p + 1 - \frac{1}{N}}_{N \text{ fois}} ; \\ \underbrace{b_{m+1} + 1 - \frac{1}{N}, \dots, b_{m+1} + 1 - \frac{1}{N}}_{N \text{ fois}}, \dots, \underbrace{b_q + 1 - \frac{1}{N}, \dots, b_q + 1 - \frac{1}{N}}_{N \text{ fois}} \end{array} \right)$$

Exemples de lois usuelles “en intensité”

- Dans le cas d’une loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L](x)$, sous sa forme “loi de Meijer” :

$$\frac{L}{\mu} \frac{1}{\Gamma(L)} \bar{G}_{0,1}^{1,0} \left(\frac{Lx}{\mu} \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L-1 \end{array} ; \cdot \right. \right)$$

la densité de probabilité de sa moyenne géométrique s’écrit :

$$\frac{NL}{\mu} \left(\frac{1}{\Gamma(L)} \right)^N \bar{G}_{0,N}^{N,0} \left(\left(\frac{Lz}{\mu} \right)^N \left| \underbrace{L - \frac{1}{N}, L - \frac{1}{N}, \dots, L - \frac{1}{N}}_{N \text{ fois}} ; \cdot \right. \right)$$

Sa log-fonction caractéristique est donnée par la relation :

$$\phi(s) = \mu^{s-1} \left(\frac{\Gamma(L + \frac{s-1}{N})}{L^{\frac{s-1}{N}} \Gamma(L)} \right)^N \quad (\text{C.9})$$

et ses log-cumulants s’écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_1 &= \log(\mu) + \Psi(L) - \log(L) \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{\Psi(1, L)}{N} \\ \tilde{\kappa}_r &= \frac{\Psi(r-1, L)}{N^{r-1}} \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

- Dans le cas d’une loi de Fisher $\mathcal{F}[\mu, L, M](x)$, sous sa forme “loi de Meijer” :

$$\frac{L}{M\mu} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \bar{G}_{1,1}^{1,1} \left(\frac{Lx}{M\mu} \left| \begin{array}{c} -M \\ L-1 \end{array} ; \cdot \right. \right)$$

la densité de probabilité de sa moyenne géométrique s’écrit :

$$\frac{NL}{M\mu} \left(\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \right)^N \bar{G}_{N,N}^{N,N} \left(\left(\frac{Lz}{M\mu} \right)^N \left| \underbrace{-M+1 - \frac{1}{N}, -M+1 - \frac{1}{N}, \dots, -M+1 - \frac{1}{N}}_{N \text{ fois}} ; \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \underbrace{L - \frac{1}{N}, L - \frac{1}{N}, \dots, L - \frac{1}{N}}_{N \text{ fois}} ; \cdot \right. \right)$$

Sa log-fonction caractéristique est donnée par la relation :

$$\phi(s) = \mu^{s-1} \left(\frac{\Gamma(L + \frac{s-1}{N})}{L^{\frac{s-1}{N}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M + \frac{1-s}{N})}{M^{\frac{1-s}{N}} \Gamma(M)} \right)^N \quad (\text{C.11})$$

- Dans le cas d’une loi K $\mathcal{K}[\mu, L, M](x)$, sous sa forme “loi de Meijer” :

$$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{LM}{\mu} \bar{G}_{0,2}^{2,0} \left(\frac{LMx}{\mu} \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L-1, M-1 \end{array} ; \cdot \right. \right)$$

la densité de probabilité de sa moyenne géométrique s’écrit :

$$\frac{NLM}{\mu} \left(\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \right)^N \bar{G}_{0,2N}^{2N,0} \left(\left(\frac{LMz}{\mu} \right)^N \left| \underbrace{L - \frac{1}{N}, L - \frac{1}{N}, \dots, L - \frac{1}{N}}_{N \text{ fois}}, \underbrace{M - \frac{1}{N}, M - \frac{1}{N}, \dots, M - \frac{1}{N}}_{N \text{ fois}} ; \cdot \right. \right)$$

Sa log-fonction caractéristique est donnée par la relation :

$$\phi(s) = \mu^{s-1} \left(\frac{\Gamma(L + \frac{s-1}{N})}{L^{\frac{s-1}{N}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M + \frac{s-1}{N})}{M^{\frac{s-1}{N}} \Gamma(M)} \right)^N \quad (\text{C.12})$$

– Dans le cas d'une loi Beta $\mathcal{B}[\mu, L, M](x)$, sous sa forme "loi de Meijer" :

$$\frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)} \bar{G}_{1,1}^{1,0} \left(\frac{Lx}{M\mu} \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L-1 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} M-1 \\ \cdot \end{array} \right)$$

la densité de probabilité de sa moyenne géométrique s'écrit :

$$\frac{NL}{M\mu} \left(\frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)} \right)^N \bar{G}_{N,N}^{N,0} \left(\left(\frac{Lz}{M\mu} \right)^N \left| \begin{array}{c} \cdot \\ \underbrace{L - \frac{1}{N}, L - \frac{1}{N}, \dots, L - \frac{1}{N}}_{N \text{ fois}} \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \underbrace{M - \frac{1}{N}, M - \frac{1}{N}, \dots, M - \frac{1}{N}}_{N \text{ fois}} \\ \cdot \end{array} \right)$$

Sa log-fonction caractéristique est donnée par la relation :

$$\phi(s) = \mu^{s-1} \left(\frac{\Gamma(L + \frac{s-1}{N})}{L^{\frac{s-1}{N}} \Gamma(L)} \frac{M^{\frac{1-s}{N}} \Gamma(M)}{\Gamma(M + \frac{1-s}{N})} \right)^N \quad (\text{C.13})$$

Exemples de lois usuelles "en amplitude"

– Dans le cas d'une loi de Nakagami $\mathcal{RN}[\mu, L](x)$, sous sa forme "loi de Meijer" :

$$\frac{2\sqrt{L}}{\mu \Gamma(L)} \bar{G}_{0,1}^{1,0} \left(\left(\frac{\sqrt{L}x}{\mu} \right)^2 \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L - \frac{1}{2} \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right)$$

la densité de probabilité de sa moyenne géométrique s'écrit :

$$\frac{2N\sqrt{L}}{\mu} \left(\frac{1}{\Gamma(L)} \right)^N \bar{G}_{0,N}^{N,0} \left(\left(\frac{\sqrt{L}z}{\mu} \right)^{2N} \left| \begin{array}{c} \cdot \\ \underbrace{L - \frac{1}{2N}, L - \frac{1}{2N}, \dots, L - \frac{1}{2N}}_{N \text{ fois}} \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right)$$

Sa log-fonction caractéristique est donnée par la relation :

$$\phi(s) = \mu^{s-1} \left(\frac{\Gamma(L + \frac{s-1}{2N})}{L^{\frac{s-1}{2N}} \Gamma(L)} \right)^N \quad (\text{C.14})$$

– Dans le cas d'une loi de Fisher en amplitude $\mathcal{FA}[\mu, L, M](x)$:

$$\frac{2\sqrt{L}}{\mu} \frac{1}{\sqrt{M} \Gamma(L) \Gamma(M)} \bar{G}_{1,1}^{1,1} \left(\left(\sqrt{\frac{L}{M}} \frac{x}{\mu} \right)^2 \left| \begin{array}{c} -M + \frac{1}{2} \\ L - \frac{1}{2} \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right)$$

la densité de probabilité de sa moyenne géométrique s'écrit :

$$\frac{2N\sqrt{L}}{\mu} \frac{1}{\sqrt{M} \Gamma(L) \Gamma(M)} \left(\frac{1}{\Gamma(L) \Gamma(M)} \right)^N \bar{G}_{N,N}^{N,N} \left(\left(\sqrt{\frac{L}{M}} \frac{x}{\mu} \right)^{2N} \left| \begin{array}{c} \underbrace{-M + 1 - \frac{1}{2N}, -M + 1 - \frac{1}{2N}, \dots, -M + 1 - \frac{1}{2N}}_{N \text{ fois}} \\ \underbrace{L - \frac{1}{2N}, L - \frac{1}{2N}, \dots, L - \frac{1}{2N}}_{N \text{ fois}} \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right)$$

Sa log-fonction caractéristique est donnée par la relation :

$$\phi(s) = \mu^{s-1} \left(\frac{\Gamma(L + \frac{s-1}{2N})}{L^{\frac{s-1}{2N}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M + \frac{1-s}{2N})}{M^{\frac{1-s}{2N}} \Gamma(M)} \right)^N \quad (\text{C.15})$$

– Dans le cas d'une loi K en amplitude $\mathcal{KA}[\mu, L, M](x)$:

$$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{\sqrt{LM}}{\mu} \bar{G}_{0,2}^{2,0} \left(\left(\frac{\sqrt{LM}x}{\mu} \right)^2 \middle| \begin{array}{c} \cdot \\ L - \frac{1}{2}, M - \frac{1}{2} \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right)$$

la densité de probabilité de sa moyenne géométrique s'écrit :

$$\frac{2N\sqrt{LM}}{\mu} \left(\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \right)^N \bar{G}_{0,2N}^{2N,0} \left(\left(\frac{\sqrt{LM}z}{\mu} \right)^{2N} \middle| \underbrace{\begin{array}{c} \cdot \\ L - \frac{1}{2N}, L - \frac{1}{2N}, \dots, L - \frac{1}{2N} \\ \cdot \end{array}}_{N \text{ fois}}, \underbrace{\begin{array}{c} \cdot \\ M - \frac{1}{2N}, M - \frac{1}{2N}, \dots, M - \frac{1}{2N} \\ \cdot \end{array}}_{N \text{ fois}} ; \cdot \right)$$

Sa log-fonction caractéristique est donnée par la relation :

$$\phi(s) = \mu^{s-1} \left(\frac{\Gamma(L + \frac{s-1}{2N})}{L^{\frac{s-1}{2N}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M + \frac{s-1}{2N})}{M^{\frac{s-1}{2N}} \Gamma(M)} \right)^N \quad (\text{C.16})$$

– Dans le cas d'une loi Beta en amplitude $\mathcal{BA}[\mu, L, M](x)$:

$$\frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{M}} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)} \bar{G}_{1,1}^{1,0} \left(\left(\frac{\sqrt{L}x}{\sqrt{M}\mu} \right)^2 \middle| \begin{array}{c} \cdot \\ L - \frac{1}{2} \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ M - \frac{1}{2} \\ \cdot \end{array} \right)$$

la densité de probabilité de sa moyenne géométrique s'écrit :

$$\frac{2N}{\mu} \sqrt{\frac{L}{M}} \left(\frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)} \right)^N \bar{G}_{N,N}^{N,0} \left(\left(\sqrt{\frac{L}{M}} \frac{z}{\mu} \right)^{2N} \middle| \underbrace{\begin{array}{c} \cdot \\ L - \frac{1}{2N}, L - \frac{1}{2N}, \dots, L - \frac{1}{2N} \\ \cdot \end{array}}_{N \text{ fois}} ; \underbrace{\begin{array}{c} \cdot \\ M - \frac{1}{2N}, M - \frac{1}{2N}, \dots, M - \frac{1}{2N} \\ \cdot \end{array}}_{N \text{ fois}} \right)$$

Sa log-fonction caractéristique est donnée par la relation :

$$\phi(s) = \mu^{s-1} \left(\frac{\Gamma(L + \frac{s-1}{2N})}{L^{\frac{s-1}{2N}} \Gamma(L)} \frac{M^{\frac{1-s}{2N}} \Gamma(M)}{\Gamma(M + \frac{1-s}{2N})} \right)^N \quad (\text{C.17})$$

Annexe D

Modèles RPM : applications aux lois de l'imagerie cohérente

Cette annexe reprend certaines approximations abordées dans [40].

D.1 Approximation et inversion des fonctions Polygamma

D.1.1 Approximation des fonctions Polygamma

$\Psi(x)$	$\simeq \frac{1.000000 + 0.712948 x - 0.837487 x^2 - 0.081094 x^3}{-0.009079 - 0.916387 x - 0.436530 x^2 - 0.016771 x^3}$
$\Psi(x) - \log(x)$	$\simeq \frac{1.000000 + 3.068163 x + 3.359825 x^2 - 0.000013 x^3}{0.006222 - 1.132967 x - 5.022964 x^2 - 6.718980 x^3}$
$\Psi(1, x)$	$\simeq \frac{1.000000 + 2.227731 x + 3.335376 x^2 - 0.000080 x^3}{-0.006725 + 0.085115 x + 0.578380 x^2 + 3.333423 x^3}$
$\Psi(2, x)$	$\simeq \frac{1.000000 + 1.014673 x + 0.008057 x^2 - 0.000352 x^3}{0.006304 - 0.072868 x + 0.303145 x^2 - 1.079702 x^3}$
$\Psi(3, x)$	$\simeq \frac{1.000000 + 0.145391 x^2 + 0.001224 x^4 - 0.000002 x^6}{-0.000018 + 0.000505 x^2 + 0.165628 x^4 + 0.009387 x^6}$

TABLE D.1 – Approximation de fonctions Polygamma

D.1.2 Inversion des fonctions Polygamma

$x = \Psi(1, L)$	$L \simeq \frac{1.000000 + 0.899712 x + 0.106635 x^2 + 0.000891 x^3}{-0.000085 + 1.001475 x + 0.390803 x^2 + 0.015221 x^3}$
$x = \Psi(2, L)$	$L \simeq \frac{1.000000 - 1.040182 x^{0.5} + 0.130305 x - 0.000886 x^{1.5}}{-0.000143 - 1.002479 x^{0.5} + 0.524941 x - 0.030360 x^{1.5}}$
$x = \Psi(3, L)$	$L \simeq \frac{1.000000 + 14.721010 x^{0.5} + 21.765669 x + 3.263541 x^{1.5} + 0.023304 x^2}{0.019003 + 2.541448 x^{0.5} + 14.565046 x + 7.348012 x^{1.5} + 0.288223 x^2}$
$x = \Psi(L)$	$L \simeq \frac{1.000000 + 0.053442 x + 0.046578 x^2 + 0.002517 x^3}{0.683940 - 0.445950 x + 0.118939 x^2 - 0.012645 x^3}$
$x = \Psi(L) - \log(L)$	$L \simeq \frac{1.000000 - 31.158014 x + 27.024720 x^2 - 0.292582 x^3}{0.000118 - 1.994320 x + 61.750886 x^2 - 32.866199 x^3}$

TABLE D.2 – Inversion de fonctions Polygamma

D.2 Quelques relations utiles pour l'imagerie cohérente : lois en intensité

D.2.1 Utilitaire de la loi Gamma : expression de $\tilde{\kappa}_3$ en fonction de $\tilde{\kappa}_2$

Les deux log-cumulants de la loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L]$ sont liés par une relation biunivoque ne dépendant que du paramètre L puisque l'on a :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_2 &= \Psi(1, L) \\ \tilde{\kappa}_3 &= \Psi(2, L)\end{aligned}$$

Il est tout à fait possible de trouver un RPC donnant directement $\tilde{\kappa}_3$ à partir de $\tilde{\kappa}_2$ sans passer par l'étape d'inversion du second log-cumulant. On obtient :

$$\hat{\kappa}_{3,G} \simeq \frac{-0.000143 - 0.993792 \hat{\kappa}_2^2 - 0.249196 \hat{\kappa}_2^4 - 0.004537 \hat{\kappa}_2^6}{1.000000 + 0.313414 \hat{\kappa}_2^2 + 0.009037 \hat{\kappa}_2^4 + 0.000008 \hat{\kappa}_2^6} \quad (\text{D.1})$$

Cette expression permet, dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$, de savoir si une loi est dans la zone des lois de Fisher ou des lois Beta. En effet, connaissant $\tilde{\kappa}_2$ et en appliquant la relation D.6, on obtient la valeur test $\hat{\kappa}_{3,G}$ de sorte que :

- si $\tilde{\kappa}_3 < \hat{\kappa}_{3,G}$, alors on a une loi Beta
- si $\hat{\kappa}_{3,G} \leq \tilde{\kappa}_3 \leq -\hat{\kappa}_{3,G}$, alors on a une loi de Fisher
- si $\tilde{\kappa}_3 > -\hat{\kappa}_{3,G}$, alors on a une loi Beta inverse

D.2.2 Utilitaire des caustiques de la loi K : expression de $\tilde{\kappa}_3$ en fonction de $\tilde{\kappa}_2$

Le cas des lois \mathcal{K} s'exprimant sous la forme $\mathcal{K}[\mu, L, L]$ donne un cas limite des lois \mathcal{K} (l'autre étant le cas $\lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{K}[\mu, L, M] = \mathcal{G}[\mu, L]$). Dans ce cas, le log-cumulant d'ordre 3 est lié au log-cumulant d'ordre 2 puisque l'on a :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_2 &= 2\Psi(1, L) \\ \tilde{\kappa}_3 &= 2\Psi(2, L)\end{aligned}$$

Il est alors possible de construire un RPM permettant d'approximer $\tilde{\kappa}_3$ en fonction de $\tilde{\kappa}_2$, ce qui donne :

$$\hat{\tilde{\kappa}}_{3,K} \simeq \frac{1.000000 - 8.717075 \hat{\tilde{\kappa}}_2 + 230.993168 \hat{\tilde{\kappa}}_2^2 - 66.375044 \hat{\tilde{\kappa}}_2^3}{-422.510885 + 95.213370 \hat{\tilde{\kappa}}_2 + 8.342860 \hat{\tilde{\kappa}}_2^2 - 0.103926 \hat{\tilde{\kappa}}_2^3} \quad (\text{D.2})$$

Cette expression a été obtenue sur l'intervalle $L \in [0.3, 20]$ et l'erreur relative maximale est inférieure à 0.06%.

On trouve de manière équivalente la relation suivante :

$$\hat{\tilde{\kappa}}_{2,K} \simeq \frac{1.000000 - 122.852492 \hat{\tilde{\kappa}}_3 + 319.997616 \hat{\tilde{\kappa}}_3^2 - 34.750552 \hat{\tilde{\kappa}}_3^3}{14.029426 - 212.537862 \hat{\tilde{\kappa}}_3 + 105.369924 \hat{\tilde{\kappa}}_3^2 - 1.186557 \hat{\tilde{\kappa}}_3^3} \quad (\text{D.3})$$

Les expressions D.1 et D.2 permettent de déterminer si une loi est potentiellement une loi \mathcal{K} grâce à un test sur $\tilde{\kappa}_3$ connaissant $\tilde{\kappa}_2$. En effet, connaissant $\tilde{\kappa}_2$, on calcule $\tilde{\kappa}_{3,G}$ (relation D.1) et $\tilde{\kappa}_{3,K}$ (relation D.2). Si on a :

$$\tilde{\kappa}_{3,G} \leq \tilde{\kappa}_3 \leq \tilde{\kappa}_{3,K}$$

alors la loi dont les log-cumulants d'ordre 2 et 3 sont $\tilde{\kappa}_2$ et $\tilde{\kappa}_3$ peut être décrite par une loi \mathcal{K} .

D.3 Quelques relations utiles pour l'imagerie cohérente : lois généralisées

D.3.1 Loi de Weibull : inversion du coefficient de variation

Dans le cas de la loi de Weibull $\mathcal{W}[\mu, \eta]$ on trouve l'expression reliant le coefficient de variation γ et le facteur de forme η :

$$\gamma = \sqrt{\frac{\Gamma(1 + \frac{2}{\eta})}{\Gamma(1 + \frac{1}{\eta})^2} - 1} \quad \eta > 0 \text{ ou } \eta < -2$$

L'inversion numérique donne :

$$\eta \simeq \frac{1.000000 + 0.804336 \gamma + 0.453554 \gamma^2 + 0.023463 \gamma^3}{0.013085 + 0.665238 \gamma + 1.416508 \gamma^2 + 0.185671 \gamma^3}$$

D.3.2 Gamma Généralisée : inversion de la fonction $\frac{\Psi(2,L)}{\Psi(1,L)^{1.5}}$

Dans le cas de la loi Gamma Généralisée $\mathcal{GG}[\mu, L, \eta]$, on montre que les log-cumulants d'ordre 2 et 3 vérifient les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_2 &= \frac{\Psi(1,L)}{\eta^2} \\ \tilde{\kappa}_3 &= \frac{\Psi(2,L)}{\eta^3} \end{aligned}$$

On en déduit que le rapport :

$$x = \frac{\tilde{\kappa}_3}{\tilde{\kappa}_2^{1.5}} = \frac{\Psi(2,L)}{\Psi(1,L)^{1.5}}$$

ne dépend que du facteur de forme L . L'inversion numérique donne :

$$L \simeq \frac{1.000000 + 0.653026 x^2 - 0.274110 x^4 + 0.014915 x^6}{-0.000058 + 1.001300 x^2 + 0.142117 x^4 - 0.055452 x^6} \quad (\text{D.4})$$

D.4 Quelques relations utiles pour l'imagerie cohérente : lois en amplitude

D.4.1 Inversion du coefficient de variation de la loi de Rayleigh Nakagami

Dans le cas de la loi de Nakagami $\mathcal{RN}[\mu, L](x)$, on trouve l'expression reliant le coefficient de variation γ et le facteur de forme L :

$$\gamma = \sqrt{\frac{\Gamma(L)\Gamma(L+1)}{(\Gamma(L+\frac{1}{2}))^2} - 1}$$

expression qui met en œuvre la fonction de Pochhammer et qui n'a pas d'inverse analytique. Connaissant γ , l'inversion numérique donne :

– une première expression (polynômes de degrés 3) :

$$L \simeq \frac{1 + 0.06820\gamma - 0.099691\gamma^2 - 0.0487127\gamma^3}{0.00123 - 0.03460\gamma + 4.340579\gamma^2 - 1.1729569\gamma^3} \quad (\text{D.5})$$

– une seconde expression (polynômes de degrés 2) :

$$L \simeq \frac{1.000000 + 0.482198\gamma - 0.162729\gamma^2}{0.003178 - 0.067854\gamma + 4.539311\gamma^2}$$

D.4.2 Inversion du coefficient de variation de la loi de Rayleigh Nakagami Inverse

Dans le cas de la loi de Nakagami Inverse $\mathcal{RN}\mathcal{I}[\mu, L](x)$, on trouve l'expression reliant le coefficient de variation γ et le facteur de forme M :

$$\gamma = \sqrt{\frac{\Gamma(M)\Gamma(M-1)}{\Gamma(M-\frac{1}{2})^2} - 1} \quad M > 1$$

L'inversion numérique donne :

$$M \simeq \frac{1.000000 + 1.080088\gamma + 4.764801\gamma^2 + 1.963031\gamma^3}{0.010254 - 0.172509\gamma + 5.048353\gamma^2 + 1.917664\gamma^3}$$

D.4.3 Utilitaire de la loi de Rayleigh-Nakagami : expression de $\tilde{\kappa}_3$ en fonction de $\tilde{\kappa}_2$

Les deux log-cumulants de la loi de Rayleigh-Nakagami $\mathcal{RN}[\mu, L]$ sont liés par une relation biunivoque ne dépendant que du paramètre L puisque l'on a :

$$\tilde{\kappa}_2 = \frac{1}{4}\Psi(1, L)$$

$$\tilde{\kappa}_3 = \frac{1}{8}\Psi(2, L)$$

Il est tout à fait possible de trouver un RPC donnant directement $\tilde{\kappa}_3$ à partir de $\tilde{\kappa}_2$ sans passer par l'étape d'inversion du second log-cumulant. On obtient :

$$\hat{\tilde{\kappa}}_{3,RN} = \frac{-0.000002 - 1.994173\hat{\tilde{\kappa}}_2^2 - 5.448133\hat{\tilde{\kappa}}_2^4 + 0.668981\hat{\tilde{\kappa}}_2^6 - 0.012186\hat{\tilde{\kappa}}_2^8}{1.000000 + 3.797440\hat{\tilde{\kappa}}_2^2 - 0.306149\hat{\tilde{\kappa}}_2^4 - 0.008805\hat{\tilde{\kappa}}_2^6 + 0.000241\hat{\tilde{\kappa}}_2^8} \quad (\text{D.6})$$

Cette expression permet, dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$, de savoir si une loi est dans la zone des lois de Fisher en amplitude ou des lois Beta en amplitude. En effet, connaissant $\tilde{\kappa}_2$ et en appliquant la relation D.6, on obtient une valeur test $\hat{\tilde{\kappa}}_{3,RN}$ de sorte que :

- si $\tilde{\kappa}_3 < \hat{\tilde{\kappa}}_{3,RN}$, alors on a une loi Beta en amplitude
- si $\hat{\tilde{\kappa}}_{3,RN} \leq \tilde{\kappa}_3 \leq -\hat{\tilde{\kappa}}_{3,RN}$, alors on a une loi de Fisher en amplitude
- si $\tilde{\kappa}_3 > -\hat{\tilde{\kappa}}_{3,RN}$, alors on a une loi Beta en amplitude inverse

D.4.4 Utilitaire de la caustique des lois \mathcal{K} en amplitude : expression de $\tilde{\kappa}_3$ en fonction de $\tilde{\kappa}_2$

Le cas des lois \mathcal{KA} s'exprimant sous la forme $\mathcal{KA}[\mu, L, L]$ donne un cas limite des lois \mathcal{KA} (l'autre étant le cas $\lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{KA}[\mu, L, M] = \mathcal{RN}[\mu, L]$). Dans ce cas, le log-cumulant d'ordre 3 est lié au log-cumulant d'ordre 2 puisque l'on a :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_2 &= 2 \frac{\Psi(1, L)}{4} \\ \tilde{\kappa}_3 &= 2 \frac{\Psi(2, L)}{8}\end{aligned}$$

Il est alors possible de construire un RPM permettant d'approximer $\tilde{\kappa}_3$ en fonction de $\tilde{\kappa}_2$, ce qui donne :

$$\hat{\kappa}_{3,KA} \simeq \frac{1.000000 - 38.898309 \hat{\kappa}_2 + 5833.131819 \hat{\kappa}_2^2 - 1308.481140 \hat{\kappa}_2^3}{-5449.747994 - 95.776824 \hat{\kappa}_2 + 335.401372 \hat{\kappa}_2^2 - 6.785810 \hat{\kappa}_2^3} \quad (\text{D.7})$$

Cette expression a été obtenue sur l'intervalle $L \in [0.3, 20]$ et l'erreur relative maximale est inférieure à 0.06%.

On trouve de manière équivalente la relation suivante :

$$\hat{\kappa}_{2,KA} \simeq \frac{1.000000 - 422.266529 \hat{\kappa}_3 + 2108.362798 \hat{\kappa}_3^2 - 67.743218 \hat{\kappa}_3^3}{40.246459 - 1515.244224 \hat{\kappa}_3 + 870.720866 \hat{\kappa}_3^2 + 53.787895 \hat{\kappa}_3^3} \quad (\text{D.8})$$

Les expressions D.6 et D.7 permettent de déterminer si une loi est potentiellement une loi \mathcal{KA} (loi \mathcal{K} en amplitude) grâce à un test sur $\tilde{\kappa}_3$ connaissant $\tilde{\kappa}_2$. En effet, connaissant $\tilde{\kappa}_2$, on calcule $\tilde{\kappa}_{3,RN}$ (relation D.6) et $\tilde{\kappa}_{3,KA}$ (relation D.7). Si on a :

$$\tilde{\kappa}_{3,RN} \leq \tilde{\kappa}_3 \leq \tilde{\kappa}_{3,KA}$$

alors la loi dont les log-cumulants d'ordre 2 et 3 sont $\tilde{\kappa}_2$ et $\tilde{\kappa}_3$ peut être décrite par une loi \mathcal{KA} .

D.4.5 De la loi de Nakagami à la loi Gamma

Soit une loi de Nakagami de facteur de forme $L_{\mathcal{RN}}$. On recherche la loi Gamma de facteur de forme $L_{\mathcal{G}}$ tel que les premiers log-cumulants de ces deux lois soient égaux. On a alors :

$$\begin{aligned}\Psi(1, L_{\mathcal{G}}) &= \frac{1}{4} \Psi(1, L_{\mathcal{RN}}) \\ L_{\mathcal{G}} &\simeq \frac{1.000000 - 2.859582 L_{\mathcal{RN}}^{0.5} + 2.083235 L_{\mathcal{RN}} + 2.769941 L_{\mathcal{RN}}^{1.5}}{0.284726 + 0.756792 L_{\mathcal{RN}}^{0.5} - 0.008780 L_{\mathcal{RN}} + 0.000473 L_{\mathcal{RN}}^{1.5}}\end{aligned}$$

D.4.6 De la loi Gamma à la loi de Nakagami

Soit une loi Gamma de facteur de forme $L_{\mathcal{G}}$. On recherche la loi de Nakagami de facteur de forme $L_{\mathcal{RN}}$ tel que les premiers log-cumulants de ces deux lois soient égaux. On a alors la relation suivante à vérifier :

$$\Psi(1, L_{\mathcal{RN}}) = 4 \Psi(1, L_{\mathcal{G}})$$

ce qui donne l'expression :

$$L_{\mathcal{RN}} \simeq \frac{1.000000 - 3.286071 L_{\mathcal{G}}^{0.5} - 0.152404 L_{\mathcal{G}} - 0.167044 L_{\mathcal{G}}^{1.5}}{-6.804131 + 0.837084 L_{\mathcal{G}}^{0.5} - 0.181715 L_{\mathcal{G}} + 0.008751 L_{\mathcal{G}}^{1.5}}$$

D.4.7 Loi de Rice (type 2) : inversion du coefficient de variation

La loi de Rice peut se modéliser sous la forme (voir [38]) :

$$\mathcal{RC}_2[\mu, \lambda](x) = \frac{2x}{\mu^2} e^{-\left(\frac{x^2}{\mu^2} + \lambda^2\right)} I_0\left(2\lambda \frac{x}{\mu}\right)$$

Avec cette paramétrisation, le coefficient de variation s'exprime uniquement en fonction de λ :

$$\gamma = \sqrt{\frac{e^{\lambda^2} {}_1F_1(2; 1; \lambda^2)}{(\Gamma(1 + \frac{1}{2}) {}_1F_1(1 + \frac{1}{2}; 1; \lambda^2))^2} - 1}$$

L'inversion numérique donne :

$$\lambda \simeq \frac{1.000000 - 5.086703 \gamma^{0.5} + 9.639727 \gamma - 8.056629 \gamma^{1.5} + 2.501736 \gamma^2}{0.006952 + 0.328444 \gamma^{0.5} - 1.418807 \gamma + 1.966276 \gamma^{1.5} - 0.899872 \gamma^2}$$

D.5 Lois à 3 variables

D.5.1 Loi de Fisher

Soit une loi de Fisher $\mathcal{F}[\mu, L, M]$. Ses log-cumulants d'ordre 2 et 3 s'expriment uniquement en fonction des facteurs de forme L et M :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_2 &= \Psi(1, L) + \Psi(1, M) \\ \tilde{\kappa}_3 &= \Psi(2, L) - \Psi(2, M) \end{aligned}$$

Si on connaît les valeurs de $\tilde{\kappa}_2$ et $\tilde{\kappa}_3$, on peut inverser le système par le RPM suivant :

$$\begin{aligned} L &\simeq \frac{\left(\begin{array}{l} 1. - 36.696 \tilde{\kappa}_2 + 9.462 \tilde{\kappa}_3 + 0.688 \tilde{\kappa}_2 \tilde{\kappa}_3 - 7.772 \tilde{\kappa}_2^2 + 0.050 \tilde{\kappa}_3^2 \\ + 0.099 \tilde{\kappa}_2^3 + 0.161 \tilde{\kappa}_2^2 \tilde{\kappa}_3 - 0.035 \tilde{\kappa}_2 \tilde{\kappa}_3^2 \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{l} 0.024 + 0.231 \tilde{\kappa}_2 + 16.414 \tilde{\kappa}_3 + 2.222 \tilde{\kappa}_2 \tilde{\kappa}_3 - 17.592 \tilde{\kappa}_2^2 - 0.344 \tilde{\kappa}_3^2 \\ - 0.340 \tilde{\kappa}_2^3 + 0.466 \tilde{\kappa}_2^2 \tilde{\kappa}_3 - 0.079 \tilde{\kappa}_2 \tilde{\kappa}_3^2 + 0.005 \tilde{\kappa}_3^3 \end{array} \right)} \\ M &\simeq \frac{\left(\begin{array}{l} 1. - 36.696 \tilde{\kappa}_2 - 9.462 \tilde{\kappa}_3 - 0.688 \tilde{\kappa}_2 \tilde{\kappa}_3 - 7.772 \tilde{\kappa}_2^2 + 0.050 \tilde{\kappa}_3^2 \\ + 0.099 \tilde{\kappa}_2^3 - 0.161 \tilde{\kappa}_2^2 \tilde{\kappa}_3 - 0.035 \tilde{\kappa}_2 \tilde{\kappa}_3^2 \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{l} 0.024 + 0.231 \tilde{\kappa}_2 - 16.414 \tilde{\kappa}_3 - 2.222 \tilde{\kappa}_2 \tilde{\kappa}_3 - 17.592 \tilde{\kappa}_2^2 - 0.344 \tilde{\kappa}_3^2 \\ - 0.340 \tilde{\kappa}_2^3 - 0.466 \tilde{\kappa}_2^2 \tilde{\kappa}_3 - 0.079 \tilde{\kappa}_2 \tilde{\kappa}_3^2 - 0.005 \tilde{\kappa}_3^3 \end{array} \right)} \end{aligned}$$

D.5.2 Loi Beta

Soit une loi Beta $\mathcal{B}[\mu, L, M]$. Ses log-cumulants d'ordre 2 et 3 s'expriment uniquement en fonction des facteurs de forme L et M :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_2 &= \Psi(1, L) - \Psi(1, M) \\ \tilde{\kappa}_3 &= \Psi(2, L) - \Psi(2, M) \end{aligned}$$

Si on connaît les valeurs de $\tilde{\kappa}_2$ et $\tilde{\kappa}_3$, on peut inverser le système par le RPM suivant :

$$\begin{aligned} L &\simeq \left(\frac{\begin{array}{l} 1. + 1928.4 \tilde{\kappa}_2 + 57.455 \tilde{\kappa}_3^{\frac{2}{3}} - 4664.9 \tilde{\kappa}_2 \tilde{\kappa}_3^{\frac{2}{3}} + 7155.7 \tilde{\kappa}_2 \tilde{\kappa}_2 \\ + 380.643 \tilde{\kappa}_3^{\frac{4}{3}} + 7310.7 \tilde{\kappa}_2^3 + 8386.3 \tilde{\kappa}_2^2 \tilde{\kappa}_3^{\frac{2}{3}} + 4240.5 \tilde{\kappa}_2 \tilde{\kappa}_3^{\frac{4}{3}} + 507.41 \tilde{\kappa}_3^2 \end{array}}{\begin{array}{l} 0.0535 + 16.678 \tilde{\kappa}_2 - 74.221 \tilde{\kappa}_3^{\frac{2}{3}} - 3002.6 \tilde{\kappa}_2 \tilde{\kappa}_3^{\frac{2}{3}} - 354.817 \tilde{\kappa}_2 \tilde{\kappa}_2 \\ + 1593.6 \tilde{\kappa}_3^{\frac{4}{3}} + 8610.0 \tilde{\kappa}_2^3 + 3528.2 \tilde{\kappa}_2^2 \tilde{\kappa}_3^{\frac{2}{3}} + 1709.04 \tilde{\kappa}_2 \tilde{\kappa}_3^{\frac{4}{3}} - 996.12 \tilde{\kappa}_3^2 \end{array}} \right) \\ M &\simeq \left(\frac{\begin{array}{l} 1. + 490.94 \tilde{\kappa}_2 + 8.090 \tilde{\kappa}_3^{\frac{2}{3}} + 540.01 \tilde{\kappa}_2 \tilde{\kappa}_3^{\frac{2}{3}} + 2121.3 \tilde{\kappa}_2 \tilde{\kappa}_2 \\ - 15.803 \tilde{\kappa}_3^{\frac{4}{3}} - 704.08 \tilde{\kappa}_2^3 - 633.94 \tilde{\kappa}_2^2 \tilde{\kappa}_3^{\frac{2}{3}} - 48.92 \tilde{\kappa}_2 \tilde{\kappa}_3^{\frac{4}{3}} + 53.93 \tilde{\kappa}_3^2 \end{array}}{\begin{array}{l} 0.0691 - 15.32 \tilde{\kappa}_2 - 48.22 \tilde{\kappa}_3^{\frac{2}{3}} - 725.52 \tilde{\kappa}_2 \tilde{\kappa}_3^{\frac{2}{3}} - 370.51 \tilde{\kappa}_2 \tilde{\kappa}_2 \\ + 6.229 \tilde{\kappa}_3^{\frac{4}{3}} - 403.44 \tilde{\kappa}_2^3 + 845.4 \tilde{\kappa}_2^2 \tilde{\kappa}_3^{\frac{2}{3}} + 1322.1 \tilde{\kappa}_2 \tilde{\kappa}_3^{\frac{4}{3}} + 397.67 \tilde{\kappa}_3^2 \end{array}} \right) \end{aligned}$$

Annexe E

Applications à l'interférométrie

La loi de distribution de la cohérence empirique d s'exprime en fonction de D , degré de cohérence entre les deux canaux, et de L , nombre de points de la fenêtre de moyennage :

$$p(d|D, L) = 2(L-1)(1-D^2)^L d(1-d^2)^{L-2} {}_2F_1(L, L; 1; d^2 D^2). \quad (\text{E.1})$$

Or on trouve dans les tables de transformées de Mellin¹, la relation suivante :

$$\mathcal{M} \left[(1-x)^{\sigma-1} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; \delta x) \right] = \frac{\Gamma(\sigma) \Gamma(s)}{\Gamma(\sigma+s)} {}_3F_2(\alpha, \beta, s; \gamma, s+\sigma; \delta)$$

Par identification ($\alpha = \beta = L$, $\sigma - 1 = L - 2$, $\delta = D^2$ et $\gamma = 1$), on obtient :

$$\mathcal{M} \left[(1-d)^{L-2} {}_2F_1(L, L; 1; D^2 d) \right] = \frac{\Gamma(L-1) \Gamma(s)}{\Gamma(L-1+s)} {}_3F_2(L, L, s; 1, L+s-1; D^2)$$

En utilisant la propriété **TM 3** (passage de d à d^2) et la propriété **TM 2** (multiplication par d), on trouve la fonction caractéristique de deuxième espèce de la distribution de la cohérence (équation E.1) :

$$(1-D^2)^L \frac{\Gamma(L) \Gamma(\frac{s+1}{2})}{\Gamma(L+\frac{s-1}{2})} {}_3F_2 \left(L, L, \frac{s+1}{2}; 1, L+\frac{s-1}{2}; D^2 \right)$$

Cette expression donne directement les moments, résultat classique bien connu.

$$\begin{aligned} m_1 &= (1-D^2)^L \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(L)}{\Gamma(L+\frac{1}{2})} {}_3F_2(L, L, \frac{3}{2}; 1, L+\frac{1}{2}; D^2) \\ m_2 &= (1-D^2)^L \frac{1}{L} {}_3F_2(L, L, 2; 1, L+1; D^2) \end{aligned}$$

Mais, malheureusement, il ne semble guère possible d'en exhiber les log moments et les log cumulants, la fonction hypergéométrique ${}_3F_2$ s'avérant peu coopérative pour ce genre de traitement.

1. [41], formule 15.5 : cette formule est donnée avec une erreur typographique. Il faut s'inspirer de la formule 15.10 pour retrouver la forme exacte.

Bibliographie

- [1] Abramowitz, Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, 1964
- [2] M Auphan, J.M. Nicolas Tissue ultrasonic attenuation well modeled by a Mellin-convolution , Acoustical Imaging vol 12, pp 413-422, Plenum Press, New York 1982
- [3] Y. Ayant, M. Borg *Fonctions spéciales*, Dunod, 1971
- [4] R.Badeau *Transformation de Mellin : aspects numériques et dérivation fractionnaire. Application aux lois des variables aléatoires positives*. Rapport ENST99D009
- [5] A. Basset *d'après le Watson (source probablement erronée)* Proc. Camb. Phil. Soc. VI, 1889, p11
- [6] H. Bateman *Table of integral transforms, vol. I*, McGraw-Hill, 1954
- [7] H. Bateman *Table of integral transforms, vol. II*, McGraw-Hill, 1954
- [8] H. Bateman *Higher transcendental functions : volume I*, McGraw-Hill, 1953
- [9] H. Bateman *Higher transcendental functions, volume II*, McGraw-Hill, 1953
- [10] D.Blacknell, R.J.A. Tough *Parameter estimation for the K-distribution based on $z \log(z)$* IEE Proc. Radar, Sonar Navig, Vol 148, no 6, décembre 2001, pp 309-312
- [11] S. Colombo *Les transformations de Mellin et de Hankel*, Centre National de la Recherche Scientifique, 1959
- [12] H. Cramér, *Mathematical methods of statistics*, Princeton University Press, 1946
- [13] Y. Delignon, R. Garelo, A. Hillion *Statistical modelling of ocean SAR images*, IEE Proc. radar, Sonar Navig., Vol. 144, No 6, Décembre 1997
- [14] Jan Dereziński *Hypergeometric Type Functions and Their Symmetries*, Annales Henri Poincaré, 2013
- [15] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik *Table of integrals, series and product* Academic Press, 1980
- [16] D. Dugué *Sur un nouveau type de courbe de fréquence*, Compte rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Vol. 213, pp 634-635, 1941
- [17] B. Epstein *Some applications of the Mellin transform in statistics*, Annals of Mathematical Statistics, 19 (1948), pp 370-379
- [18] J. Fields *The asymptotic expansion of the Meijer G-function*, Mathematics of computation, vol. 26, No 119, pp 757-765, juillet 1972
- [19] R.A. Fisher *On a distribution yielding the error functions of several well known statistics* Proceedings of the International Congress of Mathematics, Toronto, 2 :805-813, 1924
- [20] A.J. Frery, H-J Muller, C. Yanasse, S. Sant'Anna *A model for extremely heterogeneous clutter* IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol 35, no 3, 648-659, 1997.
- [21] R. Godement *Analyse mathématique III : Fonctions analytiques, différentielles et variétés, surfaces de Riemann*, Springer Verlag 2002
- [22] J.W. Goodman *Speckle phenomena in optics : Theory and applications*, Roberts & Company, 2007.
- [23] E. Jakeman, N. Pusey *A model for non Rayleigh sea echo*, IEEE Trans. on AP, Vol 24, no 6, 1976, pp 806-814.
- [24] Norman N. Johnson, Samuel Klotz *Continuous univariate distributions-1* John Wiley & Sons, 1970

- [25] B. Jorgensen *Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution*, Springer-Verlag 1982
- [26] J-L Lacoume, P. Amblard, P. Comon *Statistiques d'ordre supérieur pour le traitement du signal*, Masson, 1997
- [27] P. Lévy *Esquisse d'une théorie de la multiplication des variables aléatoires* Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 76 (1959), pp 59-82
- [28] H. Maître, *Traitement des images de RSO*, Hermes, 2001
- [29] D. Massonnet and J.C. Souyris, *Imaging with Synthetic Aperture Radar*, EPFL Press, 2008
- [30] M.V. Menon *Estimation of the shape and scale parameters of the Weibull distribution* Technometrics 5 (1963) 175-182
- [31] G. Morlat *Les lois de probabilités de Halphen*, Revue de statistique appliquée, tome 4, no 3, pp21-26, 1956
- [32] Fredrik Johansson et al. *mpmath : a Python library for arbitrary-precision floating-point arithmetic (version 0.18)*, <http://mpmath.org/>, 2013
- [33] J.M. Nicolas, M. Sigelle, C. Thuillier et F. Tupin *Images de Radar à Ouverture Synthétique : transformée de Mellin et multirésolution* GRETSI 1997, Grenoble
- [34] J.M. Nicolas *A Fisher-MAP filter for SAR image processing* IGARSS 2003, Toulouse
- [35] J.M. Nicolas *Application de la transformée de Mellin : étude des lois statistiques de l'imagerie cohérente* Rapport Télécom ParisTech 2006D010, version revue et corrigée 2018D004
- [36] J.M. Nicolas *Les distributions de Meijer et leurs propriétés en statistiques de Mellin* Rapport Télécom ParisTech 2011D002
- [37] J.M. Nicolas *Les lois de Halphen en imagerie radar* Rapport Télécom ParisTech 2016D003
- [38] J.M. Nicolas *Un nouveau formalisme pour la loi de Rice* Rapport Télécom ParisTech 2018D003
- [39] J.M. Nicolas *La méthode du maximum de vraisemblance dans le cas des lois de Meijer* Rapport Télécom ParisTech 2018D005
- [40] J.M. Nicolas *Les RPM (Ratio of Polynomial Modelling) et leurs applications aux statistiques de Mellin* Rapport Télécom ParisTech 2019D001
- [41] F. Oberhettinger *Tables of Mellin Transform*, Springer Verlag, 1974
- [42] H. Poincaré *Calcul des probabilités*, Gauthier-Villars, 1912
- [43] P. Réfrégier, *Théorie du bruit et applications en physique*, Hermes, 2002
- [44] Hélène Sportouche, Jean-Marie Nicolas, Florence Tupin, *Mimic Capacity Of Fisher And Generalized Gamma Distributions For High Resolution SAR Image Statistical Modeling* IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, 2017, 10, pp5695-5711
- [45] M.D. Springer, W.E. Thompson *The Distribution of Products of Beta, Gamma and Gaussian Random Variables*, SIAM Journal on Applied Mathematics 18.4 (Jun 1970) : 17.
- [46] A.Stuart, J.Keith *Kendall's Advanced Theory of Statistics, Vol.1 Distribution Theory*, Griffin, 1987 (Fifth edition)
- [47] F. Tupin *Reconnaissance des formes et analyse de scènes en imagerie radar à ouverture synthétique*, Thèse de l'École Nationale Supérieure des Télécommunications, ENST 97E016, 1997
- [48] G.N. Watson *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1922.
- [49] Wollfram Research Inc. <http://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/MeijerG/> , 2001-2008

Index

- écart type (définition), 36
- Additivité (propriété), 61
- aplatissement β_2 ((*kurtosis*)), 36
- asymétrie β_1 ((*skewness*)), 36
- Chatoiement pleinement développé, 16
- coefficient de variation (définition), 36
- Compound Speckle (loi K), 25
- constante d'Euler γ_E , 273
- Convolution de Mellin (définition), 30
- Convolution de Mellin (propriétés), 30
- cumulants (définition), 36
- Diagramme $\beta_1 - \beta_2$ (loi Beta), 64
- Diagramme $\beta_1 - \beta_2$ (loi Gamma), 55
- Diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ (loi Beta), 65
- Diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ (loi Gamma), 56
- Diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ en amplitude (éventail), 243–246
- Diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ en amplitude (synthèse), 242
- Diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ en intensité (synthèse), 240
- Dirac-Mellin, 31, 286
- Fonction Ψ (Tricomi), 278
- Fonction U (Tricomi), 278
- Fonction Basset, 275
- Fonction Bessel J_ν , 275
- Fonction Bessel de deuxième espèce Y_ν , 275
- Fonction Bessel de troisième espèce H_ν , 275
- Fonction Bessel modifiée de première espèce I_ν , 275
- Fonction Bessel modifiée de troisième espèce K_ν , 275
- Fonction Digamma, 273
- Fonction Gamma, 271
- Fonction Gamma Incomplète (formulation Meijer), 291
- Fonction Hankel H_ν , 275
- Fonction hypergéométrique ${}_0F_1$, 278
- Fonction hypergéométrique ${}_0F_1$ (expression Meijer), 292
- Fonction hypergéométrique ${}_2F_1$, 277
- Fonction hypergéométrique ${}_2F_1$ (expression Meijer), 292
- Fonction hypergéométrique : cas général ${}_pF_q$, 278
- Fonction hypergéométrique confluyente ${}_1F_1$, 277
- Fonction hypergéométrique confluyente ${}_1F_1$ (expression Meijer), 292
- Fonction hypergéométrique dégénérée ${}_1F_1$, 277
- Fonction hypergéométrique de Tricomi ${}_2F_0$, 278
- Fonction hypergéométrique de Tricomi ${}_2F_0$ (expression Meijer), 292
- Fonction Meijer (définition), 74, 281
- Fonction Polygamma, 274
- Fonction Whittaker $M_{a,b}$, 279
- Fonction Whittaker $W_{a,b}$, 279
- Fonction Zeta, 274
- Fonctions caractéristiques, 34
- Fonctions caractéristiques de deuxième espèce, 39
- Formule de duplication de Legendre, 272
- Formule de réflexion d'Euler, 271
- Interférométrie : loi de la cohérence, 313
- KUBW (système de lois), 60
- log-cumulant (définition), 40
- log-moment (définition), 40
- Log-moyenne, 41
- Loi χ^2 , 51
- Loi \mathcal{G}_A^0 (Fréry), 186
- Loi "super K" (fiche), 114
- Loi "super K" en amplitude (fiche), 170
- Loi "super K" en amplitude Inverse (fiche), 172
- Loi "super K" Inverse (fiche), 116
- Loi Beta (estimation des paramètres), 218
- Loi Beta (fiche), 108
- Loi Beta (moyenne géométrique), 304
- Loi Beta en amplitude (estimation des paramètres), 237
- Loi Beta en amplitude (fiche), 164
- Loi Beta en amplitude (moyenne géométrique), 305
- Loi Beta en amplitude Inverse (estimation des paramètres), 238
- Loi Beta en amplitude Inverse (fiche), 166
- Loi Beta Généralisée (estimation des paramètres), 227
- Loi Beta Généralisée (fiche), 142
- Loi Beta Inverse (estimation des paramètres), 220
- Loi Beta Inverse (fiche), 110
- Loi Beta Prime, 59

Loi Exponentielle Décroissante (estimation des paramètres), 207
 Loi Exponentielle Décroissante (fiche), 92
 Loi Exponentielle Décroissante Inverse (estimation des paramètres), 207
 Loi Exponentielle Décroissante Inverse (fiche), 94
 Loi Fisher Généralisée (fiche), 140
 Loi Fisher (estimation des paramètres), 215
 Loi Fisher (fiche), 106
 Loi Fisher (moyenne géométrique), 303
 Loi Fisher en amplitude (estimation des paramètres), 236
 Loi Fisher en amplitude (fiche), 162
 Loi Fisher en amplitude (moyenne géométrique), 305
 Loi Fisher Généralisée (estimation des paramètres), 226
 Loi Fisher-Tipett, 69
 Loi Fisher-Tipett Opposée, 70
 Loi Fisher-Z, 71
 Loi Fréry \mathcal{G}_A^0 , 186
 Loi Gamma (estimation des paramètres), 207
 Loi Gamma (fiche), 96
 Loi Gamma (moyenne géométrique), 303
 Loi Gamma (propriété d'additivité), 61
 Loi Gamma Généralisée (estimation des paramètres), 224
 Loi Gamma Généralisée (fiche), 136
 Loi Gamma Inverse (estimation des paramètres), 209
 Loi Gamma Inverse (fiche), 98
 Loi Gamma : mélange additif, 251
 Loi Gaussienne Généralisée (estimation des paramètres), 223
 Loi Gaussienne Généralisée (fiche), 134
 Loi Halphen, 112
 Loi Halphen modifiée (fiche), 112
 Loi Halphen modifiée en amplitude (Compound), 186
 Loi Halphen modifiée en amplitude (fiche), 168
 Loi Homothétique (estimation des paramètres), 206
 Loi Homothétique (fiche), 89
 Loi Hotelling, 59
 Loi Inverse Gaussienne Généralisée (fiche), 112
 Loi K (estimation des paramètres), 211
 Loi K (fiche), 102
 Loi K (moyenne géométrique), 304
 Loi K en amplitude (estimation des paramètres), 234
 Loi K en amplitude (fiche), 158
 Loi K en amplitude (moyenne géométrique), 305
 Loi K en amplitude Inverse (estimation des paramètres), 235
 Loi K en amplitude Inverse (fiche), 160
 Loi K généralisée (estimation des paramètres), 225
 Loi K Généralisée (fiche), 138
 Loi K Inverse (estimation des paramètres), 214
 Loi K Inverse (fiche), 104
 Loi Log-normale (estimation des paramètres), 210
 Loi Log-normale (fiche), 100
 Loi Meijer, 77
 Loi Nakagami (estimation des paramètres), 229
 Loi Nakagami (fiche), 150
 Loi Nakagami (moyenne géométrique), 304
 Loi Nakagami Inverse (estimation des paramètres), 231
 Loi Nakagami Inverse (fiche), 152
 Loi Pearson I, 62
 Loi Pearson VI, 59
 Loi Rayleigh (estimation des paramètres), 228
 Loi Rayleigh (fiche), 146
 Loi Rayleigh Inverse (estimation des paramètres), 228
 Loi Rayleigh Inverse (fiche), 148
 Loi Rayleigh-Nakagami (estimation des paramètres), 229
 Loi Rayleigh-Nakagami (fiche), 150
 Loi Rayleigh-Nakagami (moyenne géométrique), 304
 Loi Rayleigh-Nakagami Inverse (estimation des paramètres), 231
 Loi Rayleigh-Nakagami Inverse (fiche), 152
 Loi Rayleigh-Nakagami : mélange additif, 251
 Loi Rice, 26
 Loi Rice \mathcal{RC}_2 , 156
 Loi Rice (fiche), 154
 Loi U (fiche), 118
 Loi U en amplitude (fiche), 174
 Loi U en amplitude Inverse (fiche), 176
 Loi U Inverse (fiche), 120
 Loi uniforme sur $[0, \mu]$ (estimation des paramètres), 206
 Loi uniforme sur $[0, \mu]$ (fiche), 90
 Loi W (fiche), 122
 Loi W en amplitude (fiche), 178
 Loi W en amplitude Inverse (fiche), 180
 Loi W Inverse (fiche), 124
 Loi Weibull (estimation des paramètres), 221
 Loi Weibull (fiche), 132
 Loi Y (fiche), 126
 Loi Y en amplitude (fiche), 182
 Loi Y en amplitude Inverse (fiche), 184
 Loi Y Inverse (fiche), 128
 Méthode des Log-Cumulants (MLC), 194
 Méthode des Moments (MM), 194
 Méthode du maximum de vraisemblance, 192
 Méthode du Maximum de Vraisemblance (MMV), 195
 Matrice de Fisher, 191

moment mixte, 47
moments (définition), 35
moments centrés (définition), 35

Phaseur (selon Goodman), 16
Processus gaussien circulaire complexe, 18
Propriété d'additivité de la loi Gamma, 61

Seconde fonction de Bessel K_ν , 275

Transformée de Mellin (définition), 29
Transformée de Mellin (propriétés), 30
Transformée de Mellin d'un produit de fonctions,
30

variance (définition), 36
Variance des estimateurs, 205

Télécom ParisTech

Institut Mines-Télécom - membre de l'Université Paris Saclay
46, rue Barrault - 75634 Paris Cedex 13 - Tél. + 33 (0)1 45 81 77 77 - www.telecom-paristech.fr
Département IDS