



Application de la transformée de Mellin : étude des lois statistiques de l'imagerie cohérente

Jean-Marie Nicolas

2006D010

2006

Département Traitement du Signal et des Images
Groupe Traitement et Interprétation des Images

Dépôt légal : 2006 – 4^{ème} trimestre
Imprimé à l'Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications – Paris
ISSN 0751-1345 ENST D (Paris) (France 1983-9999)



Application de la transformée de Mellin : étude des lois statistiques de l'imagerie cohérente.

Jean Marie NICOLAS

GET-Télécom Paris, département TSI, 46 rue Barrault, 75634 Paris Cedex 13
Tél : 01 45 81 81 29, Fax : 01 45 81 37 94, Emel : nicolas@enst.fr

Table des matières

1	Lois de probabilités définies sur \mathbb{R}^+	11
1.1	Rappels sur la transformée de Mellin et ses applications	11
1.1.1	La transformée de Mellin	11
1.1.2	Convolution de Mellin	12
1.1.3	Corrélation de Mellin et loi inverse	13
1.2	Rappels : variables aléatoires réelles scalaires sur \mathbb{R}	14
1.2.1	Définitions	14
1.2.2	Exemple de la loi normale	16
1.2.3	Loi symétrique	17
1.2.4	Somme de variables aléatoires	17
1.3	Variables aléatoires réelles scalaires sur \mathbb{R}^+	17
1.3.1	Statistiques de deuxième espèce	17
1.3.2	Moments et moments d'ordre inférieur (FLOM)	18
1.3.3	Moments de deuxième espèce (Log-moments)	18
1.3.4	Moments normalisés	19
1.3.5	Cumulants de deuxième espèce (Log-cumulants)	19
1.3.6	Théorème d'existence des log-moments et log-cumulants	21
1.3.7	Définition et caractérisation des Lois inverses	22
1.3.8	Produit de variable aléatoire sur \mathbb{R}^+ : application à la modélisation du bruit multiplicatif	23
1.3.9	Quelques propriétés des Log-Cumulants et Log-Moments	24
1.4	Lois en amplitude, lois en intensité	24
1.4.1	Relations entre lois de probabilités et fonctions caractéristiques	24
1.4.2	Relations entre moments et cumulants	25
1.4.3	Relations entre log-moments et log-cumulants	25
1.4.4	Une propriété de la convolution de Mellin	25
1.5	Lois "généralisées"	26
1.6	Echelle linéaire, échelle logarithmique, modèle mixte	27
1.6.1	Echelles linéaire et logarithmique	27
1.6.2	Modèle mixte	28
1.7	Synthèse	30
2	Exemples de lois de probabilités définies sur \mathbb{R}^+	31
2.1	Les lois à 1 paramètre	32
2.1.1	La distribution homothétique	32
2.1.2	La loi uniforme à 1 paramètre	33
2.1.3	La loi Gamma : premier formalisme	34
2.1.4	La loi exponentielle	35
2.2	Lois à 2 paramètres	36
2.2.1	La loi uniforme à 2 paramètres	36
2.2.2	La loi lognormale	38
2.2.3	Lois Gamma et Gamma Généralisée (loi RSO "en intensité")	41
2.2.4	Lois de Rayleigh et de Nakagami (loi RSO "en amplitude")	46
2.2.5	Loi Gamma (généralisée) Inverse	50
2.2.6	La loi de Weibull	53
2.2.7	La loi Gaussienne Généralisée sur \mathbb{R}^+	54
2.3	Lois à 3 paramètres	56

2.3.1	La loi de Weibull Généralisée	56
2.3.2	La loi \mathcal{K}	58
2.3.3	La loi \mathcal{KI}	59
2.3.4	Loi de Fisher (loi Beta de seconde espèce ou loi Pearson type VI)	60
2.3.5	Loi Beta (loi Beta de première espèce ou loi Pearson type I)	63
2.3.6	Le cas “Bessel”	66
2.4	Autres lois utilisées en imagerie RSO (lois à 4 paramètres)	67
2.4.1	Loi W	68
2.4.2	Loi U	70
2.4.3	Autre loi à 4 paramètres : la loi Z	71
2.5	Les lois à queue lourde	72
2.5.1	Définition et caractérisation	72
2.5.2	Distributions α -Stables positives	73
2.5.3	Le modèle de Rayleigh généralisé	74
2.6	Changement de variable : lois “généralisées”	77
2.6.1	Lois en intensité, lois en amplitude	77
2.6.2	Lois “généralisées”	78
2.7	Conclusions et Synthèse	79
2.7.1	Conclusions	79
2.7.2	Synthèse	80
3	Estimation des paramètres de lois de probabilités définies sur \mathbb{R}^+	89
3.1	Bornes de Cramer-Rao et variance d’un estimateur	89
3.1.1	Matrice d’information de Fisher	89
3.1.2	Méthode du Maximum de Vraisemblance et bornes de Cramer-Rao	90
3.1.3	Calcul de la variance d’un estimateur	90
3.2	Estimateurs des grandeurs statistiques usuelles	91
3.2.1	Méthode du Maximum de Vraisemblance (MMV)	91
3.2.2	Méthode des Moments : Moments et Moments centrés (MM)	91
3.2.3	Méthode des Moments d’Ordre Inférieurs (MMOI)	92
3.2.4	Méthode des Log-Moments et Log-Cumulants (MLM)	92
3.2.5	Méthode mixtes : moments mixtes et log-moments mixtes	93
3.3	Variance des estimateurs des grandeurs statistiques usuelles	93
3.3.1	Méthode des moments : variance des Moments et Moments centrés	93
3.3.2	Méthode des moments : variance du coefficient de variation	94
3.3.3	Méthode des moments : variance des coefficients β_1 et β_2	94
3.3.4	Méthode des log-moments : variance des log-cumulants	94
3.4	Application aux lois à 1 paramètre	95
3.4.1	La distribution homothétique (loi à 1 paramètre)	95
3.4.2	La loi uniforme à 1 paramètre	95
3.5	Application aux lois à 2 paramètres	96
3.5.1	La loi uniforme	96
3.5.2	La loi lognormale	98
3.5.3	Lois Gamma et Gamma Généralisée	100
3.5.4	Lois de Rayleigh et de Nakagami	109
3.5.5	Loi Gamma Inverse	113
3.5.6	La loi de Weibull	117
3.5.7	La loi gaussienne généralisée sur \mathbb{R}^+	118
3.6	Lois à 3 paramètres	119
3.6.1	La loi de Weibull Généralisée	119
3.6.2	La loi \mathcal{K}	122
3.6.3	La loi de Fisher (loi Beta de seconde espèce ou loi Pearson type VI)	126
3.6.4	La loi Beta de première espèce (Pearson type I)	131
3.7	Autres lois utilisées en imagerie RSO (lois à 4 paramètres)	133
3.8	Les lois à queue lourde	133
3.8.1	Distributions α -Stables positives	134
3.8.2	Le modèle de Rayleigh généralisé	134
3.9	Tableau récapitulatif	134

4	Les diagrammes β_1-β_2 et $\tilde{\kappa}_2$-$\tilde{\kappa}_3$	137
4.1	Le diagramme β_1 - β_2	137
4.1.1	Lois à deux paramètres	139
4.1.2	Lois à trois paramètres	146
4.1.3	Premières conclusions	153
4.2	Le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$	154
4.2.1	Un nouveau diagramme	154
4.2.2	Lois à deux paramètres	155
4.2.3	Lois à 3 paramètres	160
4.2.4	Loi de Weibull Généralisée	167
4.2.5	Loi de Rayleigh généralisée	169
4.3	Comparaison théorique des diagrammes	170
4.4	Etude expérimentale sur images de synthèse	172
4.4.1	Images de synthèse	172
4.4.2	Diagrammes expérimentaux β_1 - β_2 et $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$	172
4.4.3	Etudes de lois	175
4.4.4	Etudes des biais	181
4.4.5	Etude de la variance des estimateurs	186
4.4.6	Expériences hors du domaine de validité du diagramme β_1 - β_2	189
4.5	Conclusions	191
5	Applications à l'estimation sur images RSO	193
5.1	Lois en intensité et lois en amplitude	193
5.2	Lois utilisées	194
5.2.1	Loi Log-normale	194
5.2.2	Loi de Nakagami	195
5.2.3	Loi \mathcal{K} en amplitude	196
5.2.4	Loi de Fisher en amplitude	198
5.2.5	Loi de Weibull Généralisée	200
5.3	Mélange additif de lois	200
5.3.1	Mélange additif de lois Gamma [55]	200
5.3.2	Mélange additif de lois de Rayleigh Nakagami	202
5.4	Applications à l'interférométrie	202
5.5	Application au traitement d'images RSO	203
5.5.1	Les filtres statistiques	203
5.5.2	Filtres adaptatifs	204
A	La fonction Gamma et ses dérivées	209
A.1	Définitions	209
A.1.1	La fonction Gamma	209
A.1.2	La fonction Beta	210
A.1.3	La fonction de Pochhammer	210
A.1.4	La fonction Digamma	210
A.1.5	Définitions des fonctions Polygamma	212
A.1.6	La fonction Zeta	212
A.2	Une méthode numérique pour calculer la fonction Gamma et ses dérivées	213
A.2.1	Principe mathématique	213
A.2.2	Code numérique	213
B	Les fonctions hypergéométriques	215
B.1	Définition	215
B.2	Les fonctions hypergéométriques solutions d'équations différentielles	216
C	Le système de Pearson	217
C.1	Définition	217
C.2	Lois directes et inverses	218
C.3	Une propriété du système de Pearson	219
C.4	Le système KWBUZ	224
C.4.1	Modélisation d'images RSO	224
C.4.2	Les moments de la loi de texture	225

C.4.3	Les solutions analytiques de la loi de texture	226
D	Particularismes de la loi log-normale	229
E	Recherche exhaustive des lois à 4 paramètres	231
E.1	Méthodes	231
E.1.1	Cas particulier : lois à trois paramètres μ , L et M	231
E.1.2	Lois à quatre paramètres μ , L , M et N	232

Radar et Images

Depuis l'invention du radar (RAdio Detection And Ranging) il y a à peu près un siècle, de nombreux travaux ont conduit à son emploi à des fins d'imagerie : en particulier son utilisation sur des vecteurs (aéronefs, satellites) et la prise en compte de leurs mouvements ont débouché sur le concept de Radar à visée latérale (ou SLAR : *Side Looking Airborne Radar*), puis de RSO : Radar à Synthèse d'Ouverture (ou SAR : *Synthetic Array Radar*). La résolution ainsi obtenue, qui dans le cas du RSO ne dépend que de la dimension de l'antenne embarquée, a permis son utilisation courante tant à des fins de renseignements militaires qu'à des fins de télédétection civile, comme en témoignent les lancements récents des satellites Envisat et ALOS ou des lancements programmés de Radarsat-II et de Terrasar-X.

Cependant, le principe même d'un système actif utilisant un rayonnement électromagnétique conduit aux caractéristiques inhérentes à l'imagerie cohérente, *i.e.* l'apparition de chatoiement (speckle) sur l'image dont les effets sont bien connus tant en acoustique (imagerie ultrasonore par exemple) qu'en optique ou qu'en imagerie radar. Ce chatoiement rend malaisée l'interprétation des images, qui ne sont accessibles que par des spécialistes. Certes, les progrès technologiques permettent de produire des images qui sont d'une lecture plus facile, généralement au détriment de la résolution : par exemple, le filtrage en sous bande appliqué aux images RSO, et dont la philosophie est comparable au *compound spatial* utilisé en échographie médicale, donne des images de qualité analogues à des images optiques.

Aussi l'étude du chatoiement et de son implication dans les textures des images RSO est apparue comme une étape clé pour le traitement de telles images. Si le chatoiement théorique est parfaitement connu depuis les travaux de Goodman [25] et se modélise, pour des données en intensité par la célèbre loi Gamma et pour les données en amplitude par la loi de Rayleigh (lois que les staticiens connaissent aussi sous le nom de loi du χ^2 [15]), les images réelles se plient rarement à ce modèle basique. Apparaissent alors des lois définies par deux à trois paramètres : loi \mathcal{K} [34], loi de Weibull, loi Beta [46], système de Pearson [16], ... L'analyse de telles textures est alors à la base de méthodes de traitement d'images adaptées aux images RSO

Cependant, de telles modélisations offrent en général de réelles difficultés d'estimation. On sait par exemple que l'on ne peut connaître l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance des paramètres de la loi \mathcal{K} [58], loi qui par ailleurs ne propose pas un formalisme facile pour la méthode des moments. De même, on sait que la méthode des moments s'éloigne des optima définis par la borne de Cramer-Rao. Pour la loi de Weibull, depuis les travaux de Menon ([48], 1963), la méthode des moments est utilisée en échelle logarithmique car, sur les données en échelle linéaire, cette même méthode est inapplicable.

Dans ce labyrinthe de concepts et d'approches, il est tentant d'espérer trouver un fil d'Ariane permettant d'une part une meilleure compréhension des utilisations *possibles* de lois statistiques proposées par les statisticiens, et d'autre part des outils efficaces pour estimer les paramètres de ces lois. Or ce fil existe et se fonde sur une transformée passablement oubliée : la transformée de Mellin.

La transformée de Mellin

Haljar Mellin (1854-1933) a proposé une transformation intégrale qui porte son nom et qui associe à toute fonction $f(u)$ définie sur \mathbb{R}^+ une fonction $\phi(s)$, $s \in \mathbb{C}$, telle que [24] :

$$\phi(s) = \mathcal{M}[f(u)](s) = \int_0^{\infty} u^{s-1} f(u) du.$$

Cette transformation, quand elle existe, a le très bon goût d'être inversible. Nous en verrons ses propriétés dans le chapitre 1. Notons surtout qu'à coté de tables intégrales qui dédient un certain nombre de pages à cette transformée (comme les cinq volumes du Bateman [4]) il existe des tables uniquement dédiées aux transformations de Mellin (directe et inverse), dont celles de Colombo ([12] en 1959 et [13] en 1972) et d'Oberhettinger ([57] en 1974). De plus cette transformation est reconnue par certains logiciels de calcul formels (comme Maple).

Il y a très peu d'ouvrages spécifiquement dédiés à la transformée de Mellin à l'exception de deux anciens ouvrages, en français, de Colombo. La littérature anglosaxonne cite de manière sporadique cette transformée, comme en témoigne par exemple le chapitre de l'ouvrage de Zemanian ([68], 1965). Notons que récemment Godement [24] lui consacre quelques dizaines de pages dans l'un de ses quatre merveilleux volumes dédiés à l'analyse.

Il apparaît donc que la transformée de Mellin est très rarement citée et enseignée : fondamentalement marginalisée, elle n'est donc réellement utilisée que dans des communautés très spécialisées, parfois même sans grande pérennité.

La transformée de Mellin en statistiques

Un des domaines où cette transformée semble être de la plus grande utilité est celui des statistiques, dès lors que la variable étudiée ne prend des valeurs que dans \mathbb{R}^+ , ce qui est le cas des données généralement utilisées en imagerie (données RSO en amplitude ou en intensité, imagerie ultrasonore). En effet, nous verrons qu'une simple transposition des définitions des fonctions caractéristiques du monde "Fourier" au monde "Mellin" ouvre une voie simplificatrice et évite le plus souvent de lourds calculs. Or, très curieusement, aucune avancée significative n'a été obtenue au cours du XX^{ème} siècle : divers travaux témoignent de l'intérêt de la transformée de Mellin, mais n'ont aucune descendance vraiment pérenne.

Dès 1948, Epstein [20] s'intéresse au produit de deux variables aléatoires suivant la même loi et propose d'utiliser la transformée de Mellin. Il peut alors définir la loi \mathcal{K} comme convolution de Mellin de deux lois de Rayleigh. Il semble qu'il soit le premier à utiliser ces opérateurs dans l'étude des produits de variables aléatoires.

Plus tard, Paul Lévy ([44], 1959) propose un esquisse d'une théorie de la multiplication des variables aléatoires. Il est curieux de remarquer que d'une part aucune référence à la transformée et à la convolution de Mellin n'est faite dans cet article (alors que bien des formules sont des transformées de Mellin et des convolutions de Mellin), et que d'autre part, bien malheureusement, aucune suite concrète n'a été donnée à cette ébauche.

Dans le même temps, Springer et Thompson ([61], 1966), s'appuyant sur le formalisme de la transformée de Mellin proposé par Epstein, proposent d'établir (entre autres) la loi suivie par un produit de n variables aléatoires gaussiennes (ce qui, en se restreignant à \mathbb{R}^+ , revient à faire le produit de variables aléatoires suivant une loi de Rayleigh). Ce travail, qui s'appuie sur un rapport de recherche des *General Motors Defense Research Laboratories* de 1964, présente l'aspect révolutionnaire pour l'époque de requérir à un logiciel de calcul formel. En effet, les auteurs se heurent à des calculs fastidieux de dérivées faisant intervenir des fonctions Gamma, Digamma et Polygamma. Pour éviter toute erreur, ils ont alors utilisé un code en LISP conçu par John Allen, toujours élaboré aux *General Motors Defense Research Laboratories*, permettant d'étendre les résultats obtenus à un ordre n quelconque.

Lomnicki ([45], 1967) étend les résultats de Springer et Thompson, toujours par l'utilisation de la transformée de Mellin, aux lois de Weibull.

Cependant tous ces travaux tombent rapidement dans l'oubli. Sporadiquement des travaux, comme ceux de Subrahmaniam pour des variables dépendantes ([62], 1970), ou ceux de Krysicki pour la distribution Beta [39], (1999) continuent à suivre cette voie. Pire, certains travaux comme ceux de Gray et Zhang ([27], 1988), ignorant tout ce patrimoine, redécouvrent les propriétés de la convolution de Mellin en introduisant la M-convolution (qui est très exactement la convolution de Mellin) ainsi que le M-spectre, qui n'est qu'un cas particulier de transformée de Mellin et que nous généraliserons sous la forme de "fonction caractéristique de deuxième espèce".

Les travaux récents portant sur les distributions α -stables et les lois "à queue lourde" ramènent Mellin au premier plan. Tagliani ([63, 64], 2001) réintroduit donc la transformée de Mellin sans pour autant se référer aux travaux cités ci-dessus, et, en tirant profit des propriétés de cette transformation, utilise ce que nous appellerons les "log-moments".

Il peut sembler regrettable que tous ces travaux n'aient pas touché de manière durable la communauté scientifique, et, en particulier, la communauté des traiteurs d'images cohérentes, tant dans le domaine de l'imagerie Radar que celui de l'imagerie ultrasonore. Or, dans ce domaine, un certain nombre de travaux ont effleuré le domaine sans aboutir à un formalisme global :

- L'estimation des paramètres de la loi de Weibull présentant des difficultés analytiques tant pour l'utilisation de la méthode des moments que pour l'utilisation de la méthode du maximum de vraisemblance, Menon ([48], 1963) propose de passer en échelle logarithmique et aboutit alors, uniquement dans ce cadre précis, à une méthode que nous généraliserons sous le nom de **méthode des log-moments**. Menon montre, dans un formalisme assez touffu, que ces estimateurs approchent les bornes de Cramer-Rao bien mieux que les autres méthodes suggérées à l'époque.
- La variance d'une variable de Rayleigh en sortie d'un amplificateur logarithmique a été abordé par Le Chevalier [[42], 1989). Aucune généralisation de cette approche n'est proposé.
- En l'absence d'un formalisme fondé sur la transformée de Mellin et de l'utilisation des fonctions Digamma et Polygamma, les travaux d'Hoeckman ([31], 1991) sur les données RSO en échelle logarithmique n'aboutissent ni sur un formalisme homogène, ni sur une possibilité de généraliser les résultats obtenus.
- C.Oliver ([58], 1993) utilise aussi fortuitement la transformée de Mellin

Objectifs

Ce document a donc pour objectif de montrer qu’une transformée méconnue –la transformée de Mellin– peut apporter, sur les lois utilisées en imagerie cohérente, un nouveau regard théorique unificateur bien plus simple que les approches traditionnelles, ainsi que de nouvelles méthodes d’estimation des paramètres beaucoup plus faciles à mettre en œuvre et surtout beaucoup plus précises.

Pour cela, un premier chapitre, dédié spécifiquement aux lois de probabilité définies sur \mathbb{R}^+ proposera un rappel de la définition de la transformée de Mellin et de ses propriétés, ce qui conduira, par comparaison avec les techniques classiques utilisées en statistiques (transformée de Fourier, notions de fonctions caractéristiques, de moments et de cumulants), à définir de nouveaux concepts fondés sur la transformée de Mellin : fonctions caractéristiques de deuxième espèce, moments de deuxième espèce (ou **log-moments**), cumulants de deuxième espèce (ou **log-cumulants**).

Ensuite un chapitre –bien aride et fastidieux– sera dédié aux différentes lois définies sur \mathbb{R}^+ généralement utilisées en imagerie : son intérêt majeur est de s’appuyer sur une construction originale de ces lois par convolution de Mellin de lois élémentaires, et de proposer ainsi une notation unifiée dans ce labyrinthe formaliste.

Le chapitre 3 traitera de l’estimation des paramètres par des techniques classiques (méthode du maximum de vraisemblance, méthode des moments) ainsi que par des techniques innovantes (méthode des log-moments, méthodes des moments d’ordre inférieur) : là aussi, bien que ce catalogue exhaustif soit pour le moins rébarbatif, la notation unifiée permettra des comparaisons plus aisées entre méthodes et entre lois.

Le chapitre 4 sera dédié aux représentations des lois dans des diagrammes “classifiants” : à côté du classique diagramme β_1 - β_2 , nous proposerons un nouveau diagramme fondé sur les log-cumulants dont l’intérêt apparaîtra évident dès lors que l’on traite des lois “à queue lourde”.

Enfin un chapitre spécifiquement consacré aux “lois en amplitude” permettra aux traiteurs d’images cohérentes de retrouver plus facilement, moyennant quelques redites, les résultats utiles et donnera quelques pistes sur des traitements classiques et moins classiques applicables en imagerie cohérente.

Pour permettre une lecture plus aisée de ce texte, des annexes seront consacrées à des rappels basiques de définitions potentiellement utiles (par exemple sur la fonction Gamma et ses dérivées, sur les fonctions hypergéométriques, sur le système de Pearson, . . .) et permettant rapidement de retrouver le contexte et la pratique de certains objets mathématiques d’usage moyennement courant.

Sur les logiciels de Calcul Formel

Les principaux calculs rencontrés dans ce document ne présentent aucune spécificité et a priori aucune difficulté : ce ne sont en général que de simples dérivations, et le seul écueil en serait l’emploi des fonctions Gamma, Digamma et Polygamma dont il faut assimiler les règles de dérivation. Cependant, les formules sont très vite longues et peu explicites, ce qui conduit aussi vite à des erreurs calculatoires humaines.

C’est cet aspect qui a donc conduit, dans ce même contexte, Springer et Thompson à utiliser un des tous premiers logiciels de calcul formel : celui développé par les *General Motors Defense Research Laboratories* au début des années 60.

L’histoire attribue le plus souvent les premières thèses en calcul formel à Kahrinmanian (Philadelphie, mai 1953) et Nolan (Cambridge Massachussets, mai 1953) et la paternité du premier logiciel de calcul formel (CAS : *computer algebra system*) à Martin Veltman, en 1963, en physique des hautes énergies. Il existe de nos jours un certain nombre de ces logiciels, les plus célèbres étant Maple (initialement développé au sein du Symbolic Computation Group de l’Université de Waterloo à partir de 1981) dont la première version publique date de 1985, et Mathematica, édité par Wolfram Research, et dont la première version est commercialisé en 1988.

Dans ce document, un très grand nombre de résultats (ainsi que de figures) ont été obtenus grâce à Maple. Il est possible de les classer en deux catégories :

- ceux dont la longueur masquait des simplifications limpides quasiment impossibles à réaliser sans erreur humaine : c’est, en général, dans les dérivations de fonctions caractéristiques que le calcul formel s’est avéré d’un grand secours, d’autant que, entre autres, Maple permet aussi d’avoir directement un code C (voire un code FORTRAN) sans qu’un opérateur humain y insère –là aussi– des erreurs.
- ceux qui requéraient des connaissances en analyse poussées : en particulier, certains résultats aux limites pour lesquels une parfaite connaissance des fonctions Gamma, Digamma et Polygamma était requise, ou pour des développements en séries.

Dans les deux cas, c'est grâce au patrimoine mathématique accumulé par des générations de mathématiciens et intégré dans les logiciels de calcul formel que ces résultats s'obtiennent : en effet, on peut voir un logiciel de calcul formel non seulement comme une mémoire des définitions des fonctions spéciales ainsi que d'un grand nombre de tables intégrales, mais aussi comme une plateforme de mise en œuvre de certains théorèmes mathématiques basiques (requis pour les passages aux limites par exemple) dont l'utilisation requiert en général une longue et régulière pratique. Dans ce contexte, **montrer avec Maple** est très proche de **démontrer** dans la mesure où l'on ne peut que se fier aux nombreux mathématiciens qui ont défini et enrichi ce logiciel et qui sont les garants de sa rigueur scientifique.

Chapitre 1

Lois de probabilités définies sur \mathbb{R}^+

Le but de ce chapitre est de rappeler les définition et propriétés de la transformée de Mellin, puis d'élaborer à l'aide de cette transformation, des outils nouveaux dédiés à l'étude des lois de distribution définies sur \mathbb{R}^+ : les moments d'ordre fractionnaires et complexes, une nouvelle fonction caractéristique, qui sera appelée **fonction caractéristique de deuxième espèce**, les moments de deuxième espèce (que l'on peut aussi appeler **Log-moments**) et les cumulants de deuxième espèce (que l'on peut aussi appeler **Log-cumulants**).

1.1 Rappels sur la transformée de Mellin et ses applications

1.1.1 La transformée de Mellin

Définitions

La transformée de Mellin \mathcal{M} fait correspondre à la fonction $f(u)$, définie pour $u \in \mathbb{R}^+$, la fonction analytique $\phi(s)$, avec $s \in \mathbb{C}$, selon la relation [12] :

$$\phi(s) = \mathcal{M}[f(u)](s) = \int_0^{\infty} u^{s-1} f(u) du \quad (1.1)$$

Généralement, cette intégrale (1.1) ne converge que pour des valeurs de s situées à l'intérieur d'une bande délimitée par deux parallèles à l'axe imaginaire, i.e.

$$s = s_R + i\omega \quad s_R \in]s_{R_1}; s_{R_2}[$$

On montre alors que $\phi(s)$ est holomorphe à l'intérieur de cette bande qui porte souvent le nom de **bande de définition**. Mieux, si l'on exprime s sous la forme $s = c + i\omega$, la convergence de l'intégrale (1.1) est vérifiée dès lors que cette intégrale existe pour $s = c$ [24].

La transformée inverse est définie par la relation suivante :

$$h(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} u^{-s} \phi(s) ds$$

Dans la mesure où $\phi(s)$ est la transformée de Mellin de la fonction $f(u)$ et que la valeur de c appartient à la bande de définition de la transformée de Mellin de la fonction $f(u)$, on a alors la relation :

$$h(u) = f(u)$$

La condition d'appartenance de c à la bande de définition de la transformée de Mellin de la fonction f est une des difficultés de la transformation de Mellin. En effet, deux fonctions différentes peuvent avoir la même forme analytique de transformée de Mellin : seul diffèrent les bandes de définition des transformées qui ont bien évidemment une intersection nulle. Dans la mesure où toute précision est donnée sur la bande de définition, connaître une fonction ou connaître sa transformée de Mellin sont équivalents.

Notons enfin le rôle essentiel joué par la valeur $s = 1$. En effet, dans la mesure où l'intégrale existe, on a par définition :

$$\phi(s)|_{s=1} = \mathcal{M}[f(u)](s)|_{s=1} = \int_0^{\infty} f(u) du.$$

En particulier, si $f(u)$ est une densité de probabilité (notée par la suite d.d.p.), on a par définition :

$$\phi(s)|_{s=1} = 1.$$

$\mathcal{M}[f(au)](s)$	$= a^{-s}\phi(s)$	TM 1
$\mathcal{M}[u^a f(u)](s)$	$= \phi(s+a)$	TM 2
$\mathcal{M}[f(u^a)](s)$	$= \frac{1}{a}\phi\left(\frac{s}{a}\right)$	TM 3
$\mathcal{M}\left[\frac{1}{u}f\left(\frac{1}{u}\right)\right](s)$	$= \phi(1-s)$	TM 4
$\mathcal{M}[f'(u)](s)$	$= (-1)(s-1)\phi(s-1)$	TM 5
$\mathcal{M}[f(u)(\log u)^n](s)$	$= \phi^{(n)}(s)$	TM 6

TAB. 1.1 – Propriétés fondamentales de la transformée de Mellin.

Propriétés

La transformée de Mellin possède certaines propriétés reprises dans le tableau 1.1. Notons que la propriété **TM 5** peut se généraliser aux dérivées fractionnaires [3] :

$$\mathcal{M}[f^\eta(u)] = e^{i\pi\eta} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-\eta)} \phi(s-\eta) \quad (1.2)$$

1.1.2 Convolution de Mellin**Définition**

La convolution de Mellin $\hat{\star}$ peut se définir à partir de la relation fondamentale suivante :

$$h = f \hat{\star} g \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}[h](s) = \mathcal{M}[f](s) \mathcal{M}[g](s). \quad (1.3)$$

Cette relation est équivalente à la définition suivante :

$$(f \hat{\star} g)(u) = \int_0^\infty f(y) g\left(\frac{u}{y}\right) \frac{dy}{y} = \int_0^\infty f\left(\frac{u}{y}\right) g(y) \frac{dy}{y} \quad (1.4)$$

Propriétés– **Commutativité et associativité**

La définition 1.4 permet de déduire aisément les propriétés de commutativité et associativité de la convolution de Mellin :

$$\begin{aligned} f \hat{\star} g &= g \hat{\star} f \\ f \hat{\star} (g \hat{\star} h) &= (f \hat{\star} g) \hat{\star} h \end{aligned}$$

– **Element neutre de $\hat{\star}$: le “Dirac-Mellin”**

La convolution de Mellin possède un élément neutre. Pour déterminer cet élément neutre, considérons la distribution $\delta_\lambda^{\mathcal{M}}$:

$$\delta_\lambda^{\mathcal{M}}(u) = \delta(u\lambda - 1)$$

et calculons sa transformée de Mellin.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[\delta_\lambda^{\mathcal{M}}(u)] &= \int_0^\infty u^{s-1} \delta(u\lambda - 1) du \\ &= \frac{1}{\lambda^s} \int_0^\infty y^{s-1} \delta(y - 1) dy \\ &= \frac{1}{\lambda^s} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$(f \hat{\star} \delta_\lambda^{\mathcal{M}})(u) = f(\lambda u). \quad (1.5)$$

D’où l’élément neutre recherché pour la convolution de Mellin : $\delta_{\lambda=1}^{\mathcal{M}}$, que nous appellerons par la suite “Dirac Mellin”.

– **Distributivité**

Le produit possède une propriété de distributivité qui se déduit directement de la définition de la convolution de Mellin :

$$u(f \hat{\star} g) = (uf) \hat{\star} (ug).$$

– **Propriétés des d.d.p.**

On peut aussi noter le rôle essentiel de la valeur $s = 1$. En effet, par définition de la convolution de Mellin, on peut écrire :

$$\mathcal{M}[f \hat{\star} g](s)|_{s=1} = \mathcal{M}[f](s)|_{s=1} \mathcal{M}[g](s)|_{s=1}$$

En particulier, si f et g sont des d.d.p., alors on a

$$\mathcal{M}[f](s)|_{s=1} = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{M}[g](s)|_{s=1} = 1$$

Si $h = f \hat{\star} g$ on a alors :

$$\mathcal{M}[h](s)|_{s=1} = 1$$

ce qui veut dire que h vérifie $\int_0^\infty h(u)du = 1$. De plus, étant donnée la définition de la convolution de Mellin 1.4, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ g(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ h(x) = (f \hat{\star} g)(x) \geq 0$$

Donc $f \hat{\star} g$ est une d.d.p. définie sur \mathbb{R}^+ , ce qui démontre que la convolution de Mellin $\hat{\star}$ est une loi interne pour les d.d.p. définies sur \mathbb{R}^+ .

– **Théorèmes de convergence**

Soit une série de fonctions f_i telles que, pour tout i , la transformée de Mellin $\mathcal{M}(f_i)$ existe avec une bande de définition incluant le point c ($c \in \mathbb{R}$). On suppose de plus que la série converge vers une fonction f telle que sa transformée de Mellin $\mathcal{M}(f)$ existe avec une bande de définition incluant le point c . On a alors :

$$\lim_i f_i = f \quad \Leftrightarrow \quad \lim_i \mathcal{M}(f_i) = \mathcal{M}(f) \quad (1.6)$$

Ceci permet de démontrer le corollaire suivant. Si on a une série de fonctions f_i telles que, pour tout i , la transformée de Mellin $\mathcal{M}(f_i)$ existe avec une bande de définition incluant le même point c , si cette série converge vers une fonction f telle que sa transformée de Mellin $\mathcal{M}(f)$ existe avec une bande de définition incluant le point c , et si on a une fonction g telle que sa transformée de Mellin $\mathcal{M}(g)$ existe avec une bande de définition incluant le point c , alors

$$\lim_i (f_i \hat{\star} g) = \left(\lim_i f_i \right) \hat{\star} g = f \hat{\star} g \quad (1.7)$$

En effet, puisque les bandes de définition ont une intersection non nulle (correspondant au point c), on peut mener la démonstration dans le plan de Mellin et utiliser le résultat précédent en écrivant :

$$\lim_i (\mathcal{M}(f_i)\mathcal{M}(g)) = \lim_i (\mathcal{M}(f_i)) \mathcal{M}(g) = \mathcal{M}(f) \mathcal{M}(g)$$

Définition de la convolution inverse

A partir de la définition de la convolution de Mellin, il est possible de proposer la définition de la convolution de Mellin inverse $\hat{\star}^{-1}$:

$$f = h \hat{\star}^{-1} g \quad \Leftrightarrow \quad h = f \hat{\star} g \quad (1.8)$$

qui est un opérateur non commutatif (et qui, dans cette définition, opère “à droite”). Cette définition, très formelle, ne garantit nullement l’existence de $h \hat{\star}^{-1} g$.

Notons que, si la relation 1.8 existe, elle permettrait d’écrire :

$$g \hat{\star}^{-1} g = \delta_{\lambda=1}^{\mathcal{M}}$$

Nous verrons sur un exemple que $\hat{\star}^{-1}$ n’est pas une loi interne.

1.1.3 Corrélation de Mellin et loi inverse

Par analogie avec la corrélation \otimes qui compose deux fonctions réelles $f(x)$ et $g(x)$ selon la relation : $h(x) = f(x) \otimes g(x) = f(x) \star g(-x)$, ce qui donne dans le plan de Fourier $\mathcal{F}(h)(\nu) = \mathcal{F}(f)(\nu) \mathcal{F}^*(g)(\nu)$, nous pouvons définir la corrélation de Mellin $\hat{\otimes}$ par la relation :

$$h = f \hat{\otimes} g \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}[h](s) = \mathcal{M}[f](s) \mathcal{M}[g](2-s) \quad (1.9)$$

On peut noter le rôle essentiel de la valeur $s = 1$ puisque :

$$\mathcal{M}[f \hat{\otimes} g](s)|_{s=1} = \mathcal{M}[f](s)|_{s=1} \mathcal{M}[g](s)|_{s=1}$$

En particulier, si f et g sont des d.d.p., alors $h = f \hat{\otimes} g$ vérifie aussi $\int_0^\infty h(u)du = 1$.

A partir de la définition 1.9, il est aisé de montrer la relation suivante :

$$\begin{aligned} h &= f \hat{\otimes} g \\ &= \int_0^\infty f(uy) g(y) y dy \end{aligned} \quad (1.10)$$

En effet, en prenant en compte les propriétés **TM 4** et **TM 2**, en en introduisant une nouvelle fonction auxiliaire g_I on peut écrire :

$$\mathcal{M}[g](2-s) = \mathcal{M}[g_I](s)$$

avec

$$g_I(u) = \frac{1}{u^2} g\left(\frac{1}{u}\right). \quad (1.11)$$

Remarquons que si g est la d.d.p. suivie par une variable aléatoire x , la définition de g_I est en fait celle de la loi inverse de g , *i.e.* la loi que suit la variable x' telle que $x' = \frac{1}{x}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} f \hat{\otimes} g &= f \hat{\star} g_I \\ &= \int f\left(\frac{u}{y'}\right) \frac{1}{y'^2} g\left(\frac{1}{y'}\right) \frac{dy'}{y'} \end{aligned} \quad (1.12)$$

ce qui, en posant $y = \frac{1}{y'}$ donne l'expression 1.10. Remarquons que la relation 1.12 peut être choisie comme définition de la corrélation de Mellin.

Notons la non symétrie de cet opérateur, ainsi qu'une intéressante propriété distributive :

$$u (f \hat{\otimes} g) = (u f) \hat{\otimes} \left(\frac{g}{u}\right) \quad (1.13)$$

1.2 Rappels : variables aléatoires réelles scalaires sur \mathbb{R}

1.2.1 Définitions

La théorie des probabilités permet de définir, pour une variable aléatoire x , sa d.d.p. $p_x(u)$ pour $u \in \mathbb{R}$, qui vérifie les propriétés fondamentales

$$p_x(u) \geq 0 \quad (1.14)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_x(u) du = 1 \quad (1.15)$$

La première fonction caractéristique de p_x est, par définition et si celle-ci existe, sa transformée de Fourier :

$$\Phi_x(v) = \mathcal{F}[p_x](v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jvu} p_x(u) du,$$

ce qui donne la définition des moments d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) par la relation suivante :

$$m_n = (-j)^n \frac{d^n \Phi_x(v)}{dv^n} \Big|_{v=0} \quad (1.16)$$

Connaissant une propriété fondamentale de la transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}[u^n p(u)](v) = (-j)^n \frac{d^n \mathcal{F}[p(u)](v)}{dv^n}$$

on en déduit deux expressions équivalentes pour les moments :

$$\begin{aligned} m_n &= (-j)^n \frac{d^n \Phi_x(v)}{dv^n} \Big|_{v=0} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} u^n p_x(u) du. \end{aligned}$$

Par définition, la moyenne \bar{m} s'écrit :

$$\bar{m} = m_1$$

et les moments centrés d'ordre n sont alors définis par :

$$M_n = \int_{-\infty}^{+\infty} (u - \bar{m})^n p_x(u) du.$$

Plus précisément, on en déduit les très classiques relations exprimant les moments centrés en fonction des moments [15] :

$$\begin{aligned} M_1 &= m_1 \\ M_2 &= m_2 - m_1^2 \\ M_3 &= m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3 \\ M_4 &= m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4 \\ M_5 &= m_5 - 5m_4m_1 + 10m_3m_1^2 - 10m_2m_1^3 + 4m_1^5 \\ M_6 &= m_6 - 6m_5m_1 + 15m_4m_1^2 - 20m_3m_1^3 + 15m_2m_1^4 - 5m_1^6 \end{aligned} \quad (1.17)$$

qui ont aussi leurs formes duales suivantes (moments en fonction des moments centrés) [15] :

$$\begin{aligned} m_1 &= M_1 \\ m_2 &= M_2 + M_1^2 \\ m_3 &= M_3 + 3M_2M_1 + M_1^3 \\ m_4 &= M_4 + 4M_1M_3 + 6M_2M_1^2 + M_1^4 \\ m_5 &= M_5 + 5M_4M_1 + 10M_3M_1^2 + 10M_2M_1^3 + M_1^5 \\ m_6 &= M_6 + 6M_5M_1 + 15M_4M_1^2 + 20M_3M_1^3 + 15M_2M_1^4 + M_1^6 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Notons que, puisque la relation $M_2 \geq 0$ est toujours vérifiée par définition du moment centré d'ordre 2 d'une densité de probabilité, on a la relation :

$$m_2 \geq m_1^2. \quad (1.19)$$

Ces moments centrés permettent de définir le coefficient de variation γ , très utilisé en imagerie radar :

$$\gamma = \sqrt{\frac{M_2}{m_1^2}}, \quad (1.20)$$

ainsi que les coefficients β_1 et β_2 liés à l'asymétrie (skewness) et à l'aplatissement (kurtosis) :

$$\beta_1 = \frac{M_3}{M_2^3} \quad (1.21)$$

$$\beta_2 = \frac{M_4}{M_2^2}. \quad (1.22)$$

Il est bien entendu très aisé de déduire des expressions de γ , β_1 et β_2 ne faisant intervenir que les moments (et non les moments centrés).

Par le biais de la seconde fonction caractéristique

$$\Psi_x(v) = \log(\Phi_x(v))$$

on définit les cumulants par la relation

$$\kappa_{x(r)} = (-j)^r \left. \frac{d^r \Psi_x(v)}{dv^r} \right|_{v=0}. \quad (1.23)$$

Après quelques calculs, on peut trouver des relations entre cumulants et moments [15] :

$$\begin{aligned} \kappa_{x(1)} &= m_1 \\ \kappa_{x(2)} &= M_2 \\ \kappa_{x(3)} &= M_3 \\ \kappa_{x(4)} &= M_4 - 3M_2^2 \end{aligned}$$

De plus, grâce à la définition 1.23, on obtient, pour les distribution de probabilité, le développement suivant :

$$\Psi_x(v) = \kappa_{x(1)} jv + \frac{1}{2!} \kappa_{x(2)} (jv)^2 + \frac{1}{3!} \kappa_{x(3)} (jv)^3 \dots \quad (1.24)$$

Enfin on utilise parfois la médiane $m_{\text{médiane}}$ qui est la valeur telle que

$$\int_{-\infty}^{m_{\text{médiane}}} p(u) du = \int_{m_{\text{médiane}}}^{\infty} p(u) du = \frac{1}{2} \quad (1.25)$$

Il est important de remarquer que ces notions sont très générales et ne font aucune hypothèse sur le domaine de u ($u \in \mathbb{R}$). Dans le cas particulier de grandeurs positives, il s'avère intéressant de sortir de ce cadre qui s'avère très vite restrictif : c'est le but des définitions qui feront l'objet du prochain paragraphe (1.3) et qui fondent leur légitimité sur l'existence de la transformée de Mellin et de ses propriétés cadrant parfaitement avec le monde des variables aléatoires.

1.2.2 Exemple de la loi normale

On dit que la variable aléatoire x suit la loi normale $\mathcal{N}[\mu, \sigma]$ si sa densité de probabilité $p_x(u)$ vérifie l'expression suivante :

$$p_x(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

μ correspond au mode de la loi (maximum de la d.d.p.) et σ est un facteur de forme (la d.d.p. est plus ou moins resserrée autour de son mode, et ce de manière symétrique).

Les fonctions caractéristiques de la loi normale s'écrivent :

$$\begin{aligned} \Phi_x(v) &= e^{-\frac{\sigma^2 v^2}{2}} e^{j\mu v} \\ \Psi_x(v) &= -\frac{\sigma^2 v^2}{2} + j\mu v \end{aligned}$$

ce qui permet de calculer ses moments et le coefficient de variation :

$$\begin{aligned} m_1 &= \mu \\ m_2 &= \sigma^2 + \mu^2 \\ M_2 &= \sigma^2 \\ \gamma &= \frac{\sigma^2}{\mu^2} \quad (\text{si } \mu \neq 0). \end{aligned}$$

Remarquons que, dans ce cas précis de la loi normale, le moment d'ordre 1 est égal à μ , le moment centré d'ordre 2 est uniquement lié à σ , facteur de forme. Le coefficient de variation γ , dans la mesure où il existe ($\mu \neq 0$), dépend des deux paramètres de la loi et n'a pas d'interprétation évidente.

Les cumulants se déduisent de la seconde fonction caractéristique :

$$\begin{aligned} \kappa_{x(1)} &= \mu \\ \kappa_{x(2)} &= \sigma^2 \\ \kappa_{x(r)} &= 0 \quad \forall r > 2 \end{aligned}$$

Cette dernière relation est d'ailleurs une caractérisation de la loi normale.

Remarquons aussi les effets dus à la symétrie de la loi normale : la valeur moyenne (m_1), le mode (*i.e.* la valeur correspondant au maximum de la loi) et la valeur médiane sont identiques et sont égaux au paramètre μ définissant la loi.

Enfin, notons la définition de la fonction d'erreur erf

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

qui, utilisée conjointement avec les propriétés intrinsèques de la loi normale, permettent de définir aisément la proportion de points situés de part et d'autre (symétriquement) de la valeur moyenne μ selon une fraction α de σ :

$$R(\alpha) = \int_{\mu-\alpha\sigma}^{\mu+\alpha\sigma} \mathcal{N}[\mu, \sigma](u) du = \text{erf}\left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right).$$

Cette relation ne faisant intervenir que le coefficient α , ceci explique que σ soit aussi appelé écart type.

On en tire les valeurs usuelles suivantes :

α	$R(\alpha)$
1	0.6827
2	0.9545
3	0.9973

On note qu'en effectuant le choix : $\alpha = 3$, on conserve 99.7% des points de la loi normale.

1.2.3 Loi symétrique

Soit $p_x(u)$ une d.d.p. définie sur \mathbb{R} . On définit sa loi symétrique $q_y(u)$ par la relation :

$$q_y(u) = p_x(-u) \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

C'est donc la loi que suit la variable aléatoire $y = -x$.

Si l'on connaît la fonction caractéristique de $p_x : \Phi_p(v)$, il est aisé d'en déduire la fonction caractéristique de q_y :

$$\Phi_q(v) = \Phi_p^*(v)$$

et d'en déduire alors les moments $m_{q,r}$, moments centrés $M_{q,r}$ et cumulants $\kappa_{q,r}$ de la loi symétrique connaissant les moments $m_{p,r}$, moments centrés $M_{p,r}$ et cumulants $\kappa_{p,r}$ de la loi initiale :

$$m_{q,r} = (-1)^r m_{p,r} \quad (1.26)$$

$$M_{q,r} = (-1)^r M_{p,r} \quad (1.27)$$

$$\kappa_{q,r} = (-1)^r \kappa_{p,r} \quad (1.28)$$

Remarquons qu'étant donné le choix de définition des coefficients β_1 (moment centré d'ordre impair au carré) et β_2 (uniquement moments centrés d'ordre pair), une loi a les mêmes coefficients β_1 et β_2 que sa loi symétrique.

1.2.4 Somme de variables aléatoires

Soient deux variables aléatoires indépendantes x et y , de densités de probabilité p_x et p_y . Il est bien connu que, pour tout tirage X de la variable aléatoire x et pour tout tirage Y de la variable aléatoire y , la variable aléatoire dont un tirage Z est défini par :

$$Z = X + Y$$

est définie pour $u \in \mathbb{R}$ et que sa densité de probabilité p_z s'exprime comme la convolution de p_x par p_y :

$$p_z = p_x \star p_y.$$

A partir des propriétés de la transformée de Fourier d'une convolution, on montre que la fonction caractéristique de p_z est simplement le produit des fonctions caractéristiques de p_x et p_y . On peut par cette relation exprimer la densité de probabilité comme transformée de Fourier inverse du produit des fonctions caractéristiques :

$$p_z = \mathcal{F}^{-1} [\mathcal{F} [p_x] \mathcal{F} [p_y]]$$

1.3 Variables aléatoires réelles scalaires sur \mathbb{R}^+

1.3.1 Statistiques de deuxième espèce

Soit x une variable aléatoire à valeurs réelles positives telle que sa d.d.p. $p_x(u)$ soit définie pour $u \in \mathbb{R}^+$.

Les moments généralisés de x sont formellement définis pour toute application réelle g définie sur \mathbb{R}^+ par la relation [40] :

$$E[g(x)] = \int_0^{+\infty} g(u) p_x(u) du \quad (1.29)$$

et n'existent que si cette intégrale converge.

Comme $p_x(u)$ est définie pour $u \in \mathbb{R}^+$, dans le cas où $g(u)$ est une puissance (entière, réelle ou complexe) de $u : u^s$ avec $s \in \mathbb{C}$, les moments généralisés s'identifient avec la transformée de Mellin de $p_x(u)$:

$$\phi_x(s) = \mathcal{M}[p_x(u)](s) = \int_0^{+\infty} u^{s-1} p_x(u) du \quad (1.30)$$

et, puisque $p_x(u)$ est une d.d.p. et vérifie la relation fondamentale 1.15, on a $\phi_x(s)|_{s=1} = 1$. On a donc un premier résultat : une d.d.p. possède sa transformée de Mellin et la bande de définition inclut la valeur $c = 1$. La bande de définition s'écrit donc $]s_{R_1}; s_{R_2}[$ avec $s_{R_1} \leq 1$ et $s_{R_2} \geq 1$, s_{R_1} pouvant éventuellement tendre vers $-\infty$ et s_{R_2} pouvant éventuellement tendre vers $+\infty$.

Si on a $s \in \mathbb{N}$, la transformée de Mellin correspond aux moments "classiques". Pour $s \in \mathbb{C}$, on parlera de moments d'ordre généralisé.

Par analogie avec les variables aléatoires réelles scalaires sur \mathbb{R} , on appellera la fonction $\phi_x(s)$ *-i.e.* la transformée de Mellin de la densité de probabilité de x la première fonction caractéristique de deuxième espèce¹ de x

$$\phi_x(s) = \int_0^{+\infty} u^{s-1} p_x(u) du \quad (1.31)$$

En connaissant ϕ_x , on sait alors retrouver la densité de probabilité $p_x(u)$ par transformation de Mellin inverse :

$$p_x(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} u^{-s} \phi_x(s) ds$$

dans la mesure où c appartient à la bande dans laquelle la première fonction caractéristique (*i.e.* la transformée de Mellin) est définie (*i.e.* $c \in [a_1; a_2]$).

Toujours par analogie avec les variables aléatoires réelles scalaires sur \mathbb{R} , on définit la seconde fonction caractéristique de deuxième espèce comme le logarithme népérien de la première fonction caractéristique de deuxième espèce :

$$\psi_x(s) = \log(\phi_x(s)) \quad (1.32)$$

Puisqu'il n'y a aucune ambiguïté sur la bande de définition (qui doit inclure la valeur $c = 1$), connaître la forme analytique d'une d.d.p. ou connaître analytiquement sa transformée de Mellin sont équivalents : nous verrons d'ailleurs des cas où on sait exprimer analytiquement la transformée de Mellin alors que l'on ne sait pas exprimer analytiquement la d.d.p..

De même, on pourra affirmer, grâce au résultat 1.6, des convergences "en loi" dès lors que la fonction caractéristique de deuxième espèce d'une d.d.p. appartenant à une suite converge vers une certaine fonction caractéristique de deuxième espèce.

1.3.2 Moments et moments d'ordre inférieur (FLOM)

Par définition, on a donc identité des moments généralisés et de la première fonction caractéristique de deuxième espèce :

$$m_\nu = \phi_x(s = \nu + 1) = \int_0^{+\infty} u^\nu p_x(u) du \quad (1.33)$$

Pour $\nu \in \mathbb{N}$, ce sont les moments "classiques". Pour $\nu \in \mathbb{R}^+$, ce sont les moments fractionnaires, qui ont été parfois utilisés par certains auteurs ([29]) et qui dans la littérature anglosaxonne s'appellent "FLOM" (Fractional Low Order Moments [60]). Dans la mesure où la transformée de Mellin est définie pour des valeurs de ν dans \mathbb{R}^- , on peut alors utiliser les moments négatifs ou moments d'ordre inférieurs. Enfin, chaque fois qu'un moment est défini pour une valeur de a (*i.e.* soit comme moment "classique", moment fractionnaire ou moment d'ordre inférieur), on peut définir les moments d'ordre complexe avec $\nu = a + jb$ pour tout b , ceci parce que la densité de probabilité $p_x(u)$ est par définition positive.

1.3.3 Moments de deuxième espèce (Log-moments)

En appliquant une démarche identique à celle du paragraphe précédent dédié aux statistiques traditionnelles, connaissant la fonction caractéristique de deuxième espèce, on définit les moments de deuxième espèce \tilde{m}_ν ($\nu \in \mathbb{N}$) par la relation :

$$\tilde{m}_\nu = \left. \frac{d^\nu \phi_x(s)}{ds^\nu} \right|_{s=1}. \quad (1.34)$$

¹terminologie qui apparaît la première fois dans [52].

En appliquant la propriété **TM 6** de la transformée de Mellin :

$$\mathcal{M}[f(x)(\log x)^n] = (\mathcal{M}[f(x)])^{(n)}.$$

on en déduit les deux expressions équivalentes pour les moments de deuxième espèce :

$$\begin{aligned} \tilde{m}_\nu &= \left. \frac{d^\nu \phi_x(s)}{ds^\nu} \right|_{s=1} \\ &= \int_0^{+\infty} (\log u)^\nu p_x(u) du \end{aligned} \quad (1.35)$$

La relation 1.35 suggère que l'on appelle aussi les moments de deuxième espèce les **log-moments**.

Notons que la relation 1.34 se généralise à des valeurs quelconques de ν dans la mesure où l'on sait définir la relation **TM 6** pour des dérivations fractionnaires (formule 1.2).

Introduisons maintenant la moyenne de deuxième espèce ou **log-moyenne** \tilde{m} . Cette variable auxiliaire se définit par la relation suivante

$$\log \tilde{m} = \tilde{m}_1 \Leftrightarrow \tilde{m} = e^{\tilde{m}_1} \quad (1.36)$$

Notons que cette variable prend ses valeurs dans \mathbb{R}^+ , alors que les moments de deuxième espèce prennent leurs valeurs dans \mathbb{R} : il est donc possible de comparer la moyenne \tilde{m} et la moyenne de deuxième espèce \tilde{m}_1 et nous verrons qualitativement dans le cas de la loi Gamma tout son intérêt.

1.3.4 Moments normalisés

De même que l'on définit les moments centrés, nous introduisons la définition des moments normalisés d'ordre n , \tilde{M}_n :

$$\tilde{M}_n = \int_0^{+\infty} (\log u - \tilde{m}_1)^n p_x(u) du = \int_0^{+\infty} \left(\log \frac{u}{\tilde{m}} \right)^n p_x(u) du. \quad (1.37)$$

En particulier, on retrouve tout naturellement les expressions liant log-moments et moments normalisés (formellement identiques à 1.17) :

$$\begin{aligned} \tilde{M}_2 &= \tilde{m}_2 - \tilde{m}_1^2 \\ \tilde{M}_3 &= \tilde{m}_3 - 3\tilde{m}_2\tilde{m}_1 + 2\tilde{m}_1^3 \\ \tilde{M}_4 &= \tilde{m}_4 - 4\tilde{m}_1\tilde{m}_3 + 6\tilde{m}_2\tilde{m}_1^2 - 3\tilde{m}_1^4 \end{aligned} \quad (1.38)$$

que l'on peut aussi exprimer sous forme duale (log-moments en fonction des moments normalisés, formellement identique à 1.18) :

$$\begin{aligned} \tilde{m}_2 &= \tilde{M}_2 + \tilde{M}_1^2 \\ \tilde{m}_3 &= \tilde{M}_3 + 3\tilde{M}_2\tilde{M}_1 + \tilde{M}_1^3 \\ \tilde{m}_4 &= \tilde{M}_4 + 4\tilde{M}_1\tilde{M}_3 + 6\tilde{M}_2\tilde{M}_1^2 + \tilde{M}_1^4 \end{aligned}$$

1.3.5 Cumulants de deuxième espèce (Log-cumulants)

Toujours par analogie avec les variables aléatoires réelles scalaires sur \mathbb{R} , les dérivées de la seconde fonction caractéristique de deuxième espèce, prises en $s = 1$, définissent les cumulants de deuxième espèce :

$$\tilde{\kappa}_{x(r)} = \left. \frac{d^r \psi_x(s)}{ds^r} \right|_{s=1} \quad (1.39)$$

On peut donner une relation essentielle entre les cumulants de deuxième espèce et les moments de deuxième espèce : pour cela, il faut à nouveau appliquer la propriété **TM 6** de la transformée de Mellin.

Sachant que $\phi_x(s)|_{s=1} = 1$ et étant donné la relation 1.34 vérifiée par les moments de deuxième espèce, on peut alors écrire pour $\tilde{\kappa}_{x(1)}$

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_{x(1)} &= \left. \frac{d \log(\phi_x(s))}{ds} \right|_{s=1} \\ &= \left. \frac{\frac{d\phi_x(s)}{ds}}{\phi_x(s)} \right|_{s=1} \\ &= \tilde{m}_1\end{aligned}\tag{1.40}$$

De même pour l'expression de $\tilde{\kappa}_{x(2)}$, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_{x(2)} &= \left. \frac{d^2 \log(\phi_x(s))}{ds^2} \right|_{s=1} \\ &= \left. \frac{\frac{d^2 \phi_x(s)}{ds^2}}{\phi_x(s)} \right|_{s=1} - \left. \frac{\left(\frac{d\phi_x(s)}{ds} \right)^2}{\phi_x(s)^2} \right|_{s=1} \\ &= \tilde{m}_2 - \tilde{m}_1^2\end{aligned}\tag{1.41}$$

$$= \tilde{M}_2\tag{1.42}$$

L'expression de $\tilde{\kappa}_{x(3)}$ s'obtient selon un schéma identique et conduit à une expression très simple :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_{x(3)} &= \left. \frac{d^3 \log(\phi_x(s))}{ds^3} \right|_{s=1} \\ &= \left. \frac{\frac{d^3 \phi_x(s)}{ds^3}}{\phi_x(s)} \right|_{s=1} - \left. \frac{3 \frac{d\phi_x(s)}{ds} \frac{d^2 \phi_x(s)}{ds^2}}{\phi_x(s)^2} \right|_{s=1} + \left. \frac{2 \left(\frac{d\phi_x(s)}{ds} \right)^3}{\phi_x(s)^3} \right|_{s=1} \\ &= \tilde{m}_3 - 3 \tilde{m}_1 \tilde{m}_2 + 2 \tilde{m}_1^3 \\ &= \tilde{M}_3\end{aligned}\tag{1.43}$$

L'expression de $\tilde{\kappa}_{x(4)}$ s'obtient aussi selon un schéma identique, mais, comme en statistiques traditionnelles, le résultat est moins simple :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_{x(4)} &= \left. \frac{d^4 \log(\phi_x(s))}{ds^4} \right|_{s=1} \\ &= \left. \frac{\frac{d^4 \phi_x(s)}{ds^4}}{\phi_x(s)} \right|_{s=1} - \left. \frac{4 \frac{d\phi_x(s)}{ds} \frac{d^3 \phi_x(s)}{ds^3}}{\phi_x(s)^2} \right|_{s=1} - \left. \frac{3 \left(\frac{d^2 \phi_x(s)}{ds^2} \right)^2}{\phi_x(s)^2} \right|_{s=1} + \left. \frac{12 \left(\frac{d\phi_x(s)}{ds} \right)^2 \frac{d^2 \phi_x(s)}{ds^2}}{\phi_x(s)^3} \right|_{s=1} - \left. \frac{6 \left(\frac{d\phi_x(s)}{ds} \right)^4}{\phi_x(s)^4} \right|_{s=1} \\ &= \tilde{m}_4 - 4 \tilde{m}_1 \tilde{m}_3 - 3 \tilde{m}_2^2 + 12 \tilde{m}_1^2 \tilde{m}_2 - 6 \tilde{m}_1^4 \\ &= \tilde{M}_4 - 3 \tilde{M}_2^2\end{aligned}$$

De manière plus générale, puisque les définitions, fondées sur les fonctions caractéristiques, sont identiques, les expressions reliant cumulants de deuxième espèce et moments de deuxième espèce sont formellement identiques à celles reliant cumulants et moments. Aussi peut-on parler de **Log-cumulants** pour les cumulants de deuxième espèce.

On a donc en particulier les relations suivantes valables pour les ordres 2 et 3 :

$$\tilde{\kappa}_{x(2)} = \int_0^{+\infty} \left(\log \frac{u}{\tilde{m}} \right)^2 p_x(u) du\tag{1.44}$$

$$\tilde{\kappa}_{x(3)} = \int_0^{+\infty} \left(\log \frac{u}{\tilde{m}} \right)^3 p_x(u) du\tag{1.45}$$

Remarquons enfin que pour une densité de probabilité, la relation

$$\tilde{\kappa}_{x(2)} \geq 0$$

est toujours vérifiée. On en déduit :

$$\tilde{m}_2 \geq \tilde{m}_1^2$$

1.3.6 Théorème d'existence des log-moments et log-cumulants

Soit $p(u)$ une distribution de probabilité définie sur \mathbb{R}^+ , de fonction caractéristique de deuxième espèce $\phi(s)$. Cette d.d.p. vérifie alors les relations :

- $p(u) \geq 0 \quad \forall u \geq 0$
- $\int_0^{+\infty} p(u) du = \phi(s)|_{s=1} = 1.$

Théorème

Si une d.d.p. a sa fonction caractéristique de deuxième espèce définie sur un ouvert $\Omega =]s_a, s_b[$, $s = 1 \in \Omega$, alors elle possède tous ses log-moments et log-cumulants.

Démonstration

L'existence des log-cumulants revient à étudier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} (\log x)^n p(u) du.$$

Pour étudier cette intégrale impropre, nous allons en étudier le comportement en 0 et à l'infini.

- au voisinage de l'infini : soit $\alpha \in \Omega$ tel que $\alpha > 1$. On a donc :

$$\exists \alpha > 1 \text{ tel que } \phi(\alpha) = \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} p(u) du < \infty$$

ce qui revient à dire que l'on peut calculer les moments (entiers ou fractionnaires) de $p(u)$ pour tous les ordres entre 1 et α . Soit un entier $n \geq 1$. Deux cas peuvent alors se présenter :

- $\forall x > 1 \quad (\log x)^n < x^{\alpha-1}$. Dans ce cas, sachant que $p(u)$ est une d.d.p. et vérifie donc $p(u) \geq 0$, on peut écrire

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b (\log u)^n p(u) du \leq \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b u^{\alpha-1} p(u) du \leq \phi(\alpha)$$

ce qui démontre la convergence de l'intégrale pour $x \rightarrow \infty$.

- $\exists c > 1 \quad (\log c)^n = c^{\alpha-1}$ tel que $\forall x > c \quad (\log x)^n \leq x^{\alpha-1}$. Par un raisonnement identique au cas précédent, on en déduit :

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b (\log u)^n p(u) du \leq \phi(\alpha)$$

ce qui démontre la convergence de l'intégrale impropre pour $x \rightarrow \infty$.

- au voisinage de 0 :

- Tout d'abord, prenons le cas particulier où la d.d.p. est bornée :

$$\exists A \text{ tel que } \forall u \in [0, 1] \quad p(u) \leq A,$$

et calculons la limite

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 (\log u)^n p(u) du$$

Puisque la d.d.p. est bornée, on a :

$$\begin{aligned} \forall a \in]0, 1[\quad \left| \int_a^1 (\log u)^n p(u) du \right| &\leq \left| \int_a^1 (\log u)^n A du \right| \\ &\leq A \left| \int_a^1 (\log u)^n du \right| \end{aligned}$$

La propriété suivante

$$\left| \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 (\log u)^n du \right| = \Gamma(n+1)$$

prouve la convergence en 0.

- Dans le cas général, il suffit d'effectuer le changement de variable $x \rightarrow \frac{1}{x}$ et d'utiliser la propriété de convergence que nous avons démontré dans le cas $x \rightarrow \infty$.

Notons qu'une démonstration bien plus élégante et concise, fondée sur les propriétés des fonctions analytiques, peut s'élaborer sans problème majeur puisque, avec les hypothèses choisies, ϕ est holomorphe [10].

On en déduit que, dès lors qu'une distribution de probabilité à valeurs bornées a des moments (entier ou fractionnaire) d'ordre strictement supérieur à 0 et d'ordre strictement inférieur à 0, tous ses log-moments et log-cumulants existent.

1.3.7 Définition et caractérisation des Lois inverses

Soit une d.d.p. f . Nous avons vu que la d.d.p. de sa loi inverse s'écrit (relation 1.11) :

$$f_I = \frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u}\right).$$

On en déduit (grâce aux propriétés **TM 2** et **TM 4** de la transformée de Mellin) que si $\phi(s)$ est la fonction caractéristique de deuxième espèce de f :

$$\phi(s) = \mathcal{M}[f](s)$$

alors $\phi_I(s)$, fonction caractéristique de deuxième espèce de f_I s'écrit :

$$\phi_I(s) = \phi(2-s) \Leftrightarrow \phi(s) = \phi_I(2-s). \quad (1.46)$$

ce qui permet de vérifier :

$$\phi_I(s)|_{s=1} = \phi(1) = 1.$$

Les moments classiques d'une loi inverse se déduisent alors des moments d'une loi directe à partir de la relation suivante :

$$m_{I,n} = m_{-n} \quad (1.47)$$

dès lors que le moment m_{-n} est défini.

Les log-moments de la loi inverse se déduisent aisément de ceux de la loi directe. En effet, en posant $s' = s - 2$ et en remarquant que cette définition conduit à la relation $s = 1 \Leftrightarrow s' = 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{I,1} &= \left. \frac{d\phi_I(s)}{ds} \right|_{s=1} \\ &= \left. \frac{d\phi(2-s)}{ds} \right|_{s=1} \\ &= \left. \frac{d\phi(s')}{ds'} \frac{ds'}{ds} \right|_{s=1} \\ &= - \left. \frac{d\phi(s')}{ds'} \right|_{s'=1} \\ &= -\tilde{m}_1 \end{aligned}$$

et cette relation se généralise aux log-moments de tous ordres :

$$\tilde{m}_{I,r} = (-1)^r \tilde{m}_r \quad (1.48)$$

La loi inverse conserve les log-moments d'ordre pair, et a pour log-moments d'ordre impair les opposés des log-moments de la loi directe. Formellement, on retrouve la même relation que celle obtenue en statistique classique pour les moments d'une loi symétrique (relation 1.26).

Les log-cumulants de la loi inverse se déduisent aisément de ceux de la loi directe. En effet, en posant $s' = s - 2$ et en remarquant que cette définition conduit à la relation $s = 1 \Leftrightarrow s' = 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_{I,x(1)} &= \left. \frac{d \log(\phi_I(s))}{ds} \right|_{s=1} \\ &= \left. \frac{d \log(\phi(2-s))}{ds} \right|_{s=1} \\ &= \left. \frac{d \log(\phi(s'))}{ds'} \frac{ds'}{ds} \right|_{s=1} \\ &= - \left. \frac{d \log(\phi(s'))}{ds'} \right|_{s'=1} \\ &= -\tilde{\kappa}_{x(1)} \end{aligned}$$

Cette relation se généralise aux log-cumulants de tous ordres :

$$\tilde{\kappa}_{I,x(r)} = (-1)^r \tilde{\kappa}_{x(r)} \quad (1.49)$$

La loi inverse conserve les log-cumulants d'ordre pair, et a pour log-cumulants d'ordre impair les opposés des log-cumulants de la loi directe. Formellement, on retrouve la même relation que celle obtenue en statistique classique pour les cumulants d'une loi symétrique (relation 1.28).

Nous verrons qu'il sera nécessaire d'adapter cette définition très générale en faisant une exception à cette règle pour le log-cumulant d'ordre 1 (qui, nous le verrons, est le log-cumulant qui prend en compte une grandeur liée à la valeur moyenne). Aussi nous garderons la propriété suivante : la Loi Inverse d'une d.d.p. conserve les log-cumulants d'ordre pair de la d.d.p., et a pour log-cumulant d'ordre impair $r \geq 3$ les opposés des log-cumulants de la d.d.p..

1.3.8 Produit de variable aléatoire sur \mathbb{R}^+ : application à la modélisation du bruit multiplicatif

Dans le cas de lois de probabilité définies sur \mathbb{R}^+ –c'est le cas des images–, considérons deux variables aléatoires indépendantes x et y , de densités de probabilité p_x et p_y . Pour tout tirage X de la variable aléatoire x et pour tout tirage Y de la variable aléatoire y , on peut considérer la variable aléatoire z dont un tirage Z est défini par le produit des tirages de x et y :

$$Z = X Y$$

Puisque $Z \in \mathbb{R}^+$, la variable aléatoire z est définie sur \mathbb{R}^+ et il reste à en déterminer sa fonction caractéristique de deuxième espèce ϕ_z .

C'est le problème bien connu du "bruit multiplicatif" que l'on rencontre en imagerie cohérente par exemple. Dans ce contexte, supposons que nous analysons une image, de densité de probabilité idéale $p_x(u)$. Si le système d'acquisition ajoute à cette image un bruit multiplicatif, de loi $p_y(u)$, c'est l'image bruitée, de loi $p_z(u)$, que l'on observera.

Cherchons comment calculer la probabilité de tirer la valeur Z . Tout d'abord, étant donné une valeur réelle positive β , voyons comment exprimer la densité de probabilité de la variable aléatoire $\frac{x}{\beta}$. La propriété **TM 1** de la transformée de Mellin permet d'écrire directement :

$$\mathcal{M}\left[p_{\frac{x}{\beta}}\right] = \beta^s \mathcal{M}[p_x],$$

dont la valeur en $s = 1$ est β : ce n'est donc pas une densité de probabilité. Pour vérifier $\int_0^{+\infty} h(u)du = 1$ (ce qui revient à ce que la valeur de la transformée de Mellin en $s = 1$ soit égale à l'unité), il faut donc diviser par β , ce qui revient à écrire² :

$$p_{\frac{x}{\beta}}(u) = \frac{1}{\beta} p_x\left(\frac{u}{\beta}\right).$$

On peut alors écrire la densité de probabilité vérifiée par la variable aléatoire z :

$$p_z(u) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta} p_x\left(\frac{u}{\beta}\right) p_y(\beta) d\beta \quad (1.50)$$

et on reconnaît dans cette expression une convolution de Mellin (formule 1.4). On obtient donc la relation fondamentale suivante [51] :

$$p_z(u) = p_x(u) \hat{\star} p_y(u) \quad (1.51)$$

ce qui revient à dire que l'on effectue le produit des fonctions caractéristiques de deuxième espèce. Comme dans le cas additif, on va utiliser une démarche analogue pour trouver l'expression analytique de p_z :

$$p_z = \mathcal{M}^{-1}[\mathcal{M}[p_x] \mathcal{M}[p_y]] \quad (1.52)$$

ce qui peut permettre, à l'aide des tables de transformées de Mellin inverses, d'obtenir la formulation analytique de $p_z(u)$, connaissant les transformées de Mellin de $p_x(u)$ et $p_y(u)$.

D'autre part, cette propriété peut aussi s'utiliser en restauration : si on connaît la ddp de l'image observée Q et la ddp du bruit multiplicatif f , on en déduit alors la ddp de l'image non bruitée P par la relation :

$$P = \mathcal{M}^{-1}\left[\frac{\mathcal{M}[Q]}{\mathcal{M}[f]}\right]$$

²On aurait pu tout aussi bien raisonner sur le jacobien de la transformation.

1.3.9 Quelques propriétés des Log-Cumulants et Log-Moments

Soit une loi définie par une densité de probabilité $p_x(u)$ pour $u \in \mathbb{R}^+$. Dans le cas où cette densité de probabilité s'exprime comme une convolution de Mellin de deux densités de probabilité définies sur \mathbb{R}^+ : q_y et r_z

$$p_x(u) = q_y(u) \hat{\star} r_z(u) \Leftrightarrow \mathcal{M}[p_x] = \mathcal{M}[q_y] \mathcal{M}[r_z],$$

en posant $\phi_x(s)$ (respectivement $\phi_y(s)$ et $\phi_z(s)$) la fonction caractéristique de deuxième espèce de p_x (respectivement q_y et r_z) on montre aisément les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_x(s) &= \phi_y(s) \phi_z(s) \\ m_{x,\nu} &= m_{y,\nu} m_{z,\nu} \quad \forall \nu \end{aligned} \tag{1.53}$$

$$\begin{aligned} \psi_x(s) &= \psi_y(s) + \psi_z(s) \\ \tilde{\kappa}_{x(r)} &= \tilde{\kappa}_{y(r)} + \tilde{\kappa}_{z(r)} \quad \forall r \end{aligned} \tag{1.54}$$

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{x,1} &= \tilde{m}_{y,1} + \tilde{m}_{z,1} \\ \tilde{M}_{x,2} &= \tilde{M}_{y,2} + \tilde{M}_{z,2} \\ \tilde{m}_x &= \tilde{m}_y \tilde{m}_z \\ \tilde{\tilde{m}}_x &= \tilde{\tilde{m}}_y \tilde{\tilde{m}}_z \end{aligned} \tag{1.55}$$

Notons que seuls les moments traditionnels (formule 1.53) et les log-cumulants (formule 1.54) vérifient une relation simple pour tout ordre.

Dans le cas où cette densité de probabilité s'exprime comme une corrélation de Mellin de deux densités de probabilité définies sur \mathbb{R}^+ : q_y et r_z

$$p_x(u) = q_y(u) \hat{\otimes} r_z(u) \Leftrightarrow \mathcal{M}[p_x](s) = \mathcal{M}[q_y](s) \mathcal{M}[r_z](2-s),$$

et avec les mêmes notations que précédemment, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \phi_x(s) &= \phi_y(s) \phi_z(2-s) \\ m_{x,\nu} &= \frac{m_{y,\nu}}{m_{z,\nu}} \quad \forall \nu \\ \psi_x(s) &= \psi_y(s) + \psi_z(2-s) \\ \tilde{\kappa}_{x(r)} &= \tilde{\kappa}_{y(r)} + (-1)^r \tilde{\kappa}_{z(r)} \quad \forall r \end{aligned}$$

Enfin, pour la convolution inverse (si elle existe) de deux densités de probabilité définies sur \mathbb{R}^+ : q_y et r_z

$$p_x(u) = q_y(u) \hat{\star}^{-1} r_z(u) \Leftrightarrow \mathcal{M}[p_x](s) = \frac{\mathcal{M}[q_y](s)}{\mathcal{M}[r_z](s)},$$

et avec les mêmes notations que précédemment, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \phi_x(s) &= \frac{\phi_y(s)}{\phi_z(s)} \\ \psi_x(s) &= \psi_y(s) - \psi_z(s) \\ \tilde{\kappa}_{x(r)} &= \tilde{\kappa}_{y(r)} - \tilde{\kappa}_{z(r)} \quad \forall r \end{aligned}$$

Comme pour les fonctions caractéristiques traditionnelles (équation 1.24), il est intéressant de noter que, pour des densités de probabilité, la fonction caractéristique de deuxième espèce peut se développer en fonction des log-cumulants :

$$\psi_x(s) = \tilde{\kappa}_1 (s-1) + \frac{1}{2!} \tilde{\kappa}_2 (s-1)^2 + \frac{1}{3!} \tilde{\kappa}_3 (s-1)^3 + \dots$$

1.4 Lois en amplitude, lois en intensité

1.4.1 Relations entre lois de probabilités et fonctions caractéristiques

Un problème souvent rencontré en imagerie radar est celui lié au type de données, qui peuvent être analysées en amplitude ou en intensité (*i.e.* le carré de l'amplitude). Nous allons voir que, contrairement

aux statistiques traditionnelles, le passage de grandeurs en intensité aux grandeurs en amplitude est trivial en statistiques de deuxième espèce.

Soit une distribution de probabilité $p_A(u)$ correspondant à la loi en amplitude, et soit ϕ_A sa fonction caractéristique de deuxième espèce. Considérons la variable $v = u^2$. Nous appellerons $p_I(v)$ la loi de probabilité en intensité, et ϕ_I la fonction caractéristique correspondante.

On peut alors écrire, avec $v = u^2$ et $dv = 2u du$:

$$\int_0^\infty p_I(v) dv = \int_0^\infty p_I(u^2) 2u du = \int_0^\infty p_A(u) du$$

d'où la relation fondamentale entre les lois de probabilités

$$p_A(u) = 2u p_I(u^2) \quad (1.56)$$

Aucune expression générale simple peut être obtenue entre les fonctions caractéristiques habituelles. En revanche, en associant les propriétés **TM2** et **TM3** de la transformée de Mellin, on peut directement déduire la relation entre les fonctions caractéristiques de deuxième espèce

$$\phi_A(s) = \phi_I\left(\frac{s+1}{2}\right) \quad (1.57)$$

1.4.2 Relations entre moments et cumulants

Nous avons vu que moments et cumulants se déduisent des fonctions caractéristiques. Cependant, même si l'on connaît la fonction caractéristique de la loi en intensité, il n'est pas possible d'en déduire directement (sauf exception) la fonction caractéristique de la loi en amplitude qui est donnée par l'expression 1.56. De ce fait, aucune expression simple des moments ne s'obtient par la démarche traditionnelle.

En revanche, il existe une relation entre les fonctions caractéristiques de deuxième espèce (expression 1.57) qui permet d'écrire :

$$m_{A,2n} = m_{I,n}. \quad (1.58)$$

Tous les moments pairs de la loi en amplitude sont de facto des moments de la loi en intensité. Comme l'expression des cumulants fait intervenir les moments de tous les ordres, aucune relation générale entre cumulants ne peut être trouvée.

1.4.3 Relations entre log-moments et log-cumulants

Le calcul des log-cumulants se déduit directement de l'expression 1.57. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_{p_A, x(r)} &= \left. \frac{d^r \psi_{p_A}(s)}{ds^r} \right|_{s=1} \\ &= \left. \frac{d^r \log(\phi_{p_A}(s))}{ds^r} \right|_{s=1} \\ &= \left. \frac{d^r \log(\phi_{p_I}\left(\frac{s+1}{2}\right))}{ds^r} \right|_{s=1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^r \left. \frac{d^r \log(\phi_{p_I}(s'))}{ds'^r} \right|_{s'=1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^r \tilde{\kappa}_{p_I, x(r)} \end{aligned} \quad (1.59)$$

Les expressions analytiques des log-cumulants de la loi en amplitude se déduisent donc directement des expressions analytiques des log-cumulants de la loi en intensité.

1.4.4 Une propriété de la convolution de Mellin

Théorème

Soit une loi p_I correspondant à des données en intensité et s'exprimant comme la convolution de deux lois $p_{I,1}$ et $p_{I,2}$ correspondant toutes deux à des données en intensité :

$$p_I = p_{I,1} \star p_{I,2}.$$

Si, pour les mêmes données en amplitude, p_A est la loi associée à p_I , $p_{A,1}$ est la loi associée à $p_{I,1}$ et $p_{A,2}$ est la loi associée $p_{I,2}$, on a alors :

$$p_A = p_{A,1} \hat{\star} p_{A,2}.$$

Une démonstration possible

En utilisant la relation 1.57, on peut écrire :

$$\phi_{A,1}(s) = \phi_{I,1}\left(\frac{s+1}{2}\right) \quad \phi_{A,2}(s) = \phi_{I,2}\left(\frac{s+1}{2}\right).$$

On en déduit :

$$\phi_A(s) = \phi_I\left(\frac{s+1}{2}\right) = \phi_{I,1}\left(\frac{s+1}{2}\right) \phi_{I,2}\left(\frac{s+1}{2}\right) = \phi_{A,1}(s) \phi_{A,2}(s).$$

Ce qui permet d'écrire :

$$p_A = p_{A,1} \hat{\star} p_{A,2}.$$

L'intérêt pratique de cette propriété est de permettre un modèle convolutif de lois définies sur \mathbb{R}^+ vérifié indifféremment sur des modèles en amplitude ou des modèles en intensité.

1.5 Lois "généralisées"

On trouve parfois dans la littérature le qualificatif de **généralisé** accolé à une loi lorsque, par changement de variable, on utilise une puissance quelconque de la variable initiale (voir par exemple McDonald [47]).

Soit une distribution de probabilité $p(u)$ correspondant à la variable u , et soit ϕ sa fonction caractéristique de deuxième espèce. Considérons la variable $v = u^\eta$. Nous appellerons $p_\eta(v)$ la loi de probabilité correspondant à cette nouvelle variable, et ϕ_η la fonction caractéristique correspondante.

On peut alors écrire, avec $v = u^\eta$ et $dv = \eta u^{(\eta-1)} du$:

$$\int_0^\infty p_\eta(v) dv = \int_0^\infty p_\eta(u^\eta) \eta u^{(\eta-1)} du = \int_0^\infty p(u) du$$

d'où, en notant $G(p)$ la loi généralisée, la relation fondamentale entre les lois de probabilités

$$G(p, \eta) = p_\eta(u) = \eta u^{(\eta-1)} p(u^\eta) \quad (1.60)$$

En particulier, avec $\eta = 2$, on retrouve l'expression 1.56.

A priori, aucune expression générale simple peut être obtenue entre les fonctions caractéristiques habituelles. En revanche, en associant les propriétés **TM2** et **TM3** de la transformée de Mellin, on peut directement déduire la relation entre les fonctions caractéristiques de deuxième espèce

$$\phi_\eta(s) = \phi\left(\frac{s + \eta - 1}{\eta}\right) \quad (1.61)$$

En particulier, avec $\eta = 2$, on retrouve l'expression 1.57.

Bien qu'il soit illusoire d'espérer obtenir les fonctions caractéristiques habituelles, la relation 1.61 permet de déduire tous les moments dès lors que l'on sait exprimer la fonction caractéristique de deuxième espèce.

De même, le calcul des log-cumulants (dérivation logarithmique de l'expression 1.61) mène alors à la relation :

$$\tilde{\kappa}_{p_\eta, r} = \left(\frac{1}{\eta}\right)^r \tilde{\kappa}_{p, r} \quad (1.62)$$

Formellement, cette approche permet aussi de passer de la variable aléatoire x à la variable aléatoire $y = \frac{1}{x}$, c'est à dire d'obtenir la loi inverse. En posant $\eta = -1$, on obtient :

$$\phi_{-1} = \phi(2 - s)$$

c'est à dire l'expression 1.46 du paragraphe 1.3.7, et

$$\tilde{\kappa}_{p_{-1}, r} = (-1)^r \tilde{\kappa}_{p, r}$$

c'est à dire l'expression 1.49 du paragraphe 1.3.7.

Enfin, comme dans le cas du passage de données en amplitude à des données en intensité, si une loi est une convolution de Mellin de deux lois élémentaires, on peut construire sa loi généralisée de deux manières différentes :

- en généralisant la loi,
 - en généralisant les lois élémentaires et en effectuant ensuite la convolution de Mellin.
- En effet, soit une loi p telle que

$$p = q \hat{\star} r$$

On a alors

$$\phi_p(s) = \phi_q(s) \phi_r(s)$$

En utilisant la relation 1.61, on en déduit la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi généralisée

$$\begin{aligned} \phi_{p,\eta}(s) &= \phi_p\left(\frac{s+\eta-1}{\eta}\right) \\ &= \phi_q\left(\frac{s+\eta-1}{\eta}\right) \phi_r\left(\frac{s+\eta-1}{\eta}\right) \\ &= \phi_{q,\eta}(s) \phi_{r,\eta}(s) \end{aligned}$$

On a ainsi montré la relation :

$$G(p,\eta) = G(q \hat{\star} r,\eta) = G(q,\eta) \hat{\star} G(r,\eta) \quad (1.63)$$

1.6 Echelle linéaire, échelle logarithmique, modèle mixte

1.6.1 Echelles linéaire et logarithmique

A partir de cette approche fondée sur la transformée de Mellin, les lois de probabilités définies sur \mathbb{R}^+ sont donc dotées d'outils nouveaux (fonctions caractéristiques de deuxième espèce, log-moments, log-cumulants). On peut néanmoins se poser la question de savoir dans quelle mesure cette approche est véritablement innovante et si un simple changement d'échelle (passage en échelle logarithmique) n'aurait pas donné exactement les mêmes résultats.

Considérons donc une variable aléatoire x à densité de probabilité et à valeurs réelles positives. Soit $p_x(u)$ sa d.d.p., définie pour $u \in \mathbb{R}^+$. Sa fonction caractéristique s'écrit :

$$\Phi_x(v) = \int_0^{+\infty} e^{jvu} p_x(u) du,$$

Effectuons un passage en échelle logarithmique. La nouvelle variable aléatoire y est alors décrite par sa d.d.p. $q_y(w)$ définie pour $w \in \mathbb{R}$ avec $w = \log u$. Cette d.d.p. se déduit de p_x par la relation :

$$q_y(w) = e^w p_x(e^w).$$

Calculons maintenant la fonction caractéristique de la variable aléatoire y :

$$\begin{aligned} \Phi_y(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jvw} q_y(w) dw \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jvw} e^w p_x(e^w) dw \\ &= \int_0^{+\infty} e^{jv \log u} p_x(u) du \quad \text{avec } u = e^w \\ &= \int_0^{+\infty} u^{jv} p_x(u) du \end{aligned} \quad (1.64)$$

On reconnaît alors dans la relation 1.64 la transformée de Mellin de $p_x(u)$ en $s = 1 + jv$. D'où la relation :

$$\Phi_y(v) = \phi_x(s)|_{s=1+jv} \quad (1.65)$$

Cette relation montre donc que si l'on connaît la transformée de Mellin d'une d.d.p. (*i.e.* sa fonction caractéristique de deuxième espèce), on connaît alors sa fonction caractéristique en échelle logarithmique.

En échelle logarithmique, moments et cumulants se déduisent par dérivation (simple ou logarithmique) de l'expression 1.65, ce qui revient à retrouver les dérivations de fonctions caractéristiques de deuxième espèce que nous avons proposées. L'appellation de **log-moments** et de **log-cumulants** se trouve ainsi justifiée d'une autre manière.

Si sur le plan théorique les statistiques de deuxième espèce n'apportent donc rien d'intrinsèquement nouveau, il faut souligner que sur le plan méthodologique cette approche propose une méthode générique permettant de trouver directement **log-moments** et **log-cumulants** sans avoir à recourir à un changement de variable (passage en échelle logarithmique) et sans avoir à calculer la nouvelle loi de probabilité suivie par la variable en échelle logarithmique.

De plus, nous verrons, sur un plan strictement pratique, que, dans les cas généralement rencontrés en traitement du signal et des images et où les grandeurs sont définies sur \mathbb{R}^+ , il se trouve qu'il est plus aisé de calculer les transformées de Mellin que les transformées de Fourier, ce qui simplifie d'autant la mise en œuvre de cette nouvelle approche. Enfin remarquons que la connaissance de la transformée de Mellin permet d'obtenir directement :

- les moments “classiques”, en prenant pour la variable de Mellin s les valeurs entières strictement positives,
 - les moments fractionnaires et d'ordre inférieurs (FLOM), en prenant pour la variable de Mellin s les valeurs non entières et éventuellement négatives,
 - les log-moments en dérivant la transformée de Mellin selon s et en en prenant la valeur en $s = 1$,
- ce que peut apprécier tout expérimentateur puisqu'en appliquant une unique transformation sur sa loi de probabilité, il peut obtenir aussi bien moments et cumulants que log-moments et log-cumulants.

1.6.2 Modèle mixte

Dans le cadre de l'estimation des paramètres de la loi \mathcal{K} (chapitre 3), nous verrons que Blacknell [7] propose une méthode originale s'appuyant sur l'espérance de la variable $u \log u$. C'est un problème “mixte”³, puisque l'espérance de la variable u est le premier moment et que l'espérance de la variable $\log u$ est le premier log-moment.

Le formalisme des statistiques de deuxième espèce permet aisément de calculer cette espérance. En effet, soit une d.d.p. $p(u)$ dont on connaît la fonction caractéristique de deuxième espèce $\phi(s)$. Les propriétés de la transformée de Mellin permettent d'en déduire :

- la transformée de Mellin $\phi_X(s)$ de la fonction ⁴ $u p(u)$ qui s'exprime à l'aide de la propriété **TM 2** :

$$\phi_X(s) = \phi(s + 1) \quad (1.66)$$

- la transformée de Mellin $\phi_L(s)$ de la fonction $\log u p(u)$ qui s'exprime à l'aide de la propriété **TM 6** :

$$\phi_L(s) = \frac{d\phi(s)}{ds} \quad (1.67)$$

Pour calculer $E(u \log u)$, deux techniques sont alors possibles :

- considérer que c'est le log-moment d'ordre 1 de la fonction $u p(u)$. Puisque ϕ_X est une transformée de Mellin, la propriété **TM 6** permet d'écrire :

$$E(u \log u) = \left. \frac{d\phi_X}{ds} \right|_{s=1} \quad (1.68)$$

- considérer que c'est le moment d'ordre 1 de la fonction $\log(u) p(u)$. Puisque ϕ_L est une transformée de Mellin, on a :

$$E(u \log u) = \phi_L(s)|_{s=2} \quad (1.69)$$

Bien entendu, il est possible de démontrer que, dans la mesure où ces expressions sont définies sur des voisinages adéquats (*i.e.* dans la majorité des cas rencontrés en analyse d'images RSO), les deux expressions sont en fait identiques. Cependant, il est intéressant de voir que dans un cas on estime un moment, et que dans l'autre on estime un log-moment.

En généralisant cette démarche, on peut ainsi définir :

³En anglais *mixed model* : comme en théorie des jeux, traduire ce terme par “modèle mixte” relève d'une trop grande hâte à rechercher une traduction exacte et plaisante. Ce serait plutôt “modèle mélangé” qui serait adéquat. En théorie des jeux, le terme “stratégies mélangées” n'est jamais passée dans les habitudes et c'est “stratégies mixtes” qui est la traduction finalement adoptée de *mixed strategies*

⁴Il faut parler de fonction car la condition $\int u p(u) du = 1$ n'est pas nécessairement vérifiée.

– les moments mixtes, notés w_n tels que

$$w_n = E(u^n \log u) = \phi_L(s)|_{s=n} \quad (1.70)$$

– les log-moments mixtes, notés \tilde{w}_n , tels que

$$\tilde{w}_n = E(u(\log u)^n) = \left. \frac{d^n \phi_X}{ds^n} \right|_{s=1} \quad (1.71)$$

Remarquons que, par définition, on a :

$$\tilde{w}_1 = w_1.$$

1.7 Synthèse

Le tableau suivant reprend les notions utilisées traditionnellement en théorie des probabilités (fonctions caractéristiques) et les notions proposées pour les d.d.p. définies sur \mathbb{R}^+ .

	$p_x(u)$ définie sur \mathbb{R}	Seconde espèce $p_x(u)$ définie sur \mathbb{R}^+
Première fonction caractéristique	$\Phi_x(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jvu} p_x(u) du$ $= \mathcal{F}[p_x(u)](v)$	$\phi_x(s) = \int_0^{+\infty} u^{s-1} p_x(u) du$ $= \mathcal{M}[p_x(u)](s)$
Seconde fonction caractéristique	$\Psi_x(v) = \log(\Phi_x(v))$	$\psi_x(s) = \log(\phi_x(s))$
Moments	$m_\alpha = (-j)^\alpha \left. \frac{d^\alpha \Phi_x(v)}{dv^\alpha} \right _{v=0}$	$\tilde{m}_\alpha = \left. \frac{d^\alpha \phi_x(s)}{ds^\alpha} \right _{s=1}$
Cumulants	$\kappa_{x(r)} = (-j)^r \left. \frac{d^r \Psi_x(v)}{dv^r} \right _{v=0}$	$\tilde{\kappa}_{x(r)} = \left. \frac{d^r \psi_x(s)}{ds^r} \right _{s=1}$
Moyenne	$\bar{m} = m_1$	$\tilde{m} = e^{\tilde{m}_1}$
$h = f + g$	$\Phi_h(v) = \Phi_f(v) + \Phi_g(v)$ $m_{h,\alpha} = m_{f,\alpha} + m_{g,\alpha}$ $\bar{m}_h = \bar{m}_f + \bar{m}_g$	$\phi_h(s) = \phi_f(s) + \phi_g(s)$
$h = f \hat{\star} g$	$m_{h,\alpha} = m_{f,\alpha} m_{g,\alpha}$ $\tilde{m}_h = \tilde{m}_f \tilde{m}_g$	$\phi_h(s) = \phi_f(s) \phi_g(s)$ $\tilde{\kappa}_{h(r)} = \tilde{\kappa}_{f(r)} + \tilde{\kappa}_{g(r)}$
$h = f \star g$	$\Phi_h(v) = \Phi_f(v) \Phi_g(v)$ $\kappa_{h(r)} = \kappa_{f(r)} + \kappa_{g(r)}$	h définie sur \mathbb{R}
$h = f \hat{\otimes} g$		$\phi_h(s) = \phi_f(s) \phi_g(2-s)$ $\tilde{\kappa}_{h(r)} = \tilde{\kappa}_{f(r)} + (-1)^r \tilde{\kappa}_{g(r)}$

Chapitre 2

Exemples de lois de probabilités définies sur \mathbb{R}^+

Nous proposons dans ce chapitre l'étude de quelques lois de probabilité dont la plupart sont traditionnellement utilisées en imagerie radar. Ces lois sont caractérisées généralement par 2 ou 3 paramètres, et correspondent le plus souvent à des données "en intensité".

Il faut au préalable souligner que le passage des lois en intensité aux lois en amplitude ne pose aucun problème théorique majeur : ce point a d'ailleurs été traité au paragraphe 1.4. Cependant nous verrons que, le plus souvent, ce changement de variable conduit les moments traditionnels à avoir des expressions fondamentalement différentes qui s'avèrent le plus souvent difficile à traiter. En revanche, les expressions analytiques des log-moments et des log-cumulants conservent une grande similitude puisque, comme nous l'avons déjà vu, elles ne diffèrent que par des facteurs multiplicatifs : c'est pour cela, qu'en pratique, toutes les lois de ce chapitre correspondront à des données "en intensité" (seules exceptions : la loi de Rayleigh-Nakagami et la loi de Rayleigh généralisée).

L'utilisation des log-statistiques permet, en première étape, d'exprimer la plupart de ces lois de manière très simple : à l'aide de convolutions de Mellin de lois basiques que sont, par exemple, la loi Gamma et la loi Gamma Inverse. Il est alors possible d'en déduire la plupart des lois classiquement utilisées en imagerie radar. Cette construction permet de plus d'obtenir immédiatement les log moments et les log-cumulants puisque, comme nous l'avons vu précédemment, la convolution de Mellin est associée à la propriété essentielle d'additivité des log cumulants. Si les lois utilisées en imagerie radar sont ainsi correctement modélisées, c'est que la plus grande partie de ces lois correspondent à la nature multiplicative du bruit inhérent à ce type d'imagerie : le bruit agit sur la d.d.p. des textures des scènes imagées par le biais d'une convolution de Mellin

La lecture de ce chapitre est sûrement fastidieuse : en effet, un de ses objectifs est de proposer dans un formalisme unifié un catalogue de lois usuelles ainsi que les caractéristiques élémentaires de ces lois (fonctions caractéristiques, moments, cumulants, log-moments, log-cumulants). Ce formalisme vise à permettre une comparaison plus facile entre les différentes lois utilisées et s'appuie sur les choix suivants :

- Les lois sont décrites par un jeu de paramètres tels que
 - le premier paramètre corresponde à une grandeur liée à la valeur moyenne ou au mode (s'il existe) et qui sera noté μ . Rappelons que dans le cas de la gaussienne ces deux grandeurs sont confondues, et nous verrons que, pour les lois définies sur \mathbb{R}^+ , ce n'est quasiment jamais le cas. Aussi faut-il voir μ comme une valeur qui est directement liée à un gain d'appareil : si l'on modifie l'étage de réception d'un système RSO et que l'on amplifie différemment le signal, seul le paramètre μ sera modifié dans la statistique des données.
 - les autres paramètres soient vus comme des facteurs de forme (comme peut l'être la variance dans le cas de la loi normale). Ces facteurs permettent d'étaler ou d'ajuster plus ou moins la loi autour de sa valeur moyenne ainsi que l'allure plus ou moins symétrique autour de son mode. Dans ce document, le premier facteur de forme est (quasiment toujours) une valeur positive : L . Pour les lois à 3 paramètres, on ajoutera en général une autre valeur positive M . Par définition, ces facteurs de forme sont invariants par modification du gain.
- On recherche en priorité des expressions des lois en terme de convolution de Mellin de distributions élémentaires, comme la distribution homothétique (qui est simplement une modification du gain) ou la loi Gamma.

De cette manière, il sera enfin possible de comparer effectivement un certain nombre d'approches proposées dans la littérature liée à l'imagerie cohérente. Pour cela, un certain nombre de formules fastidieuses doivent

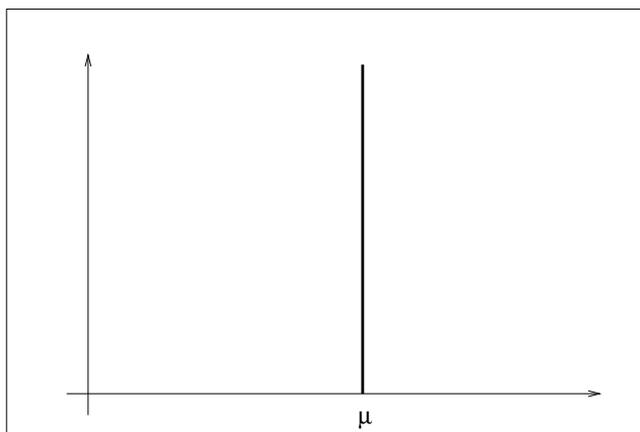


FIG. 2.1 – Loi homothétique (équation 2.1).

pouvoir se retrouver au fil du texte, ce qui donne à ce chapitre un aspect rébarbatif : aussi l'essentiel des résultats sera repris, à la fin de ce chapitre, par deux tableaux synthétiques.

2.1 Les lois à 1 paramètre

Cette partie est dédiée seulement à la loi homothétique, à la loi uniforme à 1 paramètre. à un premier formalisme de la loi Gamma et à la loi exponentielle. La loi de Rayleigh sera vue au paragraphe suivant dédié aux lois à 2 paramètres comme cas particulier de la loi de Nakagami (paragraphe 2.2.4).

2.1.1 La distribution homothétique

Soit la distribution de probabilité $\mathcal{H}[\mu]$ définie par :

$$\mathcal{H}[\mu] = \frac{1}{\mu} \delta_{\frac{1}{\mu}}^{\mathcal{M}} \quad (2.1)$$

où $\delta^{\mathcal{M}}$ est un "Dirac Mellin" défini au paragraphe 1.1.2.

La fonction caractéristique de deuxième espèce de $\mathcal{H}[\mu]$ s'écrit :

$$\phi_{\mathcal{H}}(s) = \mu^{s-1}. \quad (2.2)$$

d'où l'expression de ses moments définis pour tout ordre $r > 0$:

$$m_r = \mu^r \quad \forall r > 0$$

Ses deux premiers moments s'écrivent alors :

$$\begin{cases} m_1 = \mu \\ m_2 = \mu^2 \end{cases},$$

son coefficient de variation

$$\gamma = 0$$

et ses log-cumulants :

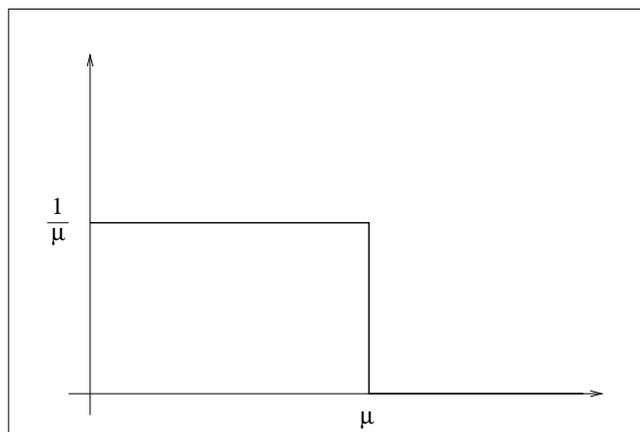
$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_{x(1)} = \log(\mu) \\ \tilde{\kappa}_{x(r)} = 0 \quad \forall r > 1 \end{cases}$$

Par convolution de Mellin, cette distribution transforme toute d.d.p. f en une d.d.p. g homothétique de rapport $\frac{1}{\mu}$ grâce à la relation 1.5 :

$$g(u) = (f \hat{\star} (\mathcal{H}[\mu]))(u) = (f \hat{\star} (\mu \delta_{\frac{1}{\mu}}^{\mathcal{M}}))(u) = \frac{1}{\mu} f\left(\frac{u}{\mu}\right).$$

De plus, si $\phi_x(s)$ est la fonction caractéristique de deuxième espèce de f , alors la fonction caractéristique de deuxième espèce de g s'écrit :

$$\mu^{s-1} \phi_x(s)$$

FIG. 2.2 – Loi uniforme à 1 paramètre $\mathcal{U}_1[\mu]$ (équation 2.3).

On voit poindre l'importance du facteur d'échelle dans les approches par transformée de Mellin : la fonction caractéristique de deuxième espèce prend donc en compte multiplicativement l'échelle de la loi dans la mesure où on applique des transformations homothétiques aux lois de probabilité. Dès lors que l'on analyse un processus avec un gain (multiplicatif) mal connu, on voit l'intérêt d'avoir ainsi séparé le problème de l'échelle (et donc du gain) vis à vis des autres facteurs propres à la loi, *i.e.* la forme et l'allure générale.

Réciproquement, si l'on constate que la fonction caractéristique de deuxième espèce d'une loi de probabilité s'exprime avec un terme multiplicatif en μ^{s-1} , les autres termes étant indépendants de μ , on peut alors penser que μ est assimilable à une valeur "type" (moyenne, médiane, ...) tandis que le restant de l'expression est dédié à la forme de la loi autour de cette valeur "type".

Notons enfin la propriété suivante :

$$\mathcal{H}[\mu_1] \hat{\star} \mathcal{H}[\mu_2] = \mathcal{H}[\mu_1 \mu_2]$$

C'est à dire que la convolution de Mellin est une loi interne dans l'ensemble des distributions homothétiques.

2.1.2 La loi uniforme à 1 paramètre

Soit une variable aléatoire uniformément répartie sur un segment de \mathbb{R}^+ : $[0, \mu]$. En appelant $Y(x)$ la distribution d'Heaviside, on peut donner une formulation de la distribution de probabilité \mathcal{U}_1 de cette variable :

$$\mathcal{U}_1[\mu](u) = \frac{Y(u) - Y(\mu - u)}{\mu}. \quad (2.3)$$

La fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit :

$$\phi(s) = \frac{\mu^{s-1}}{s} \quad (2.4)$$

et permet d'exprimer ses moments d'ordre $r > -1$:

$$m_r = \frac{\mu^r}{r+1} \quad r > -1$$

et plus précisément les moments d'ordre 1 et 2 :

$$\begin{cases} m_1 = \frac{\mu}{2} \\ m_2 = \frac{\mu^2}{3} \end{cases},$$

et le coefficient de variation :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

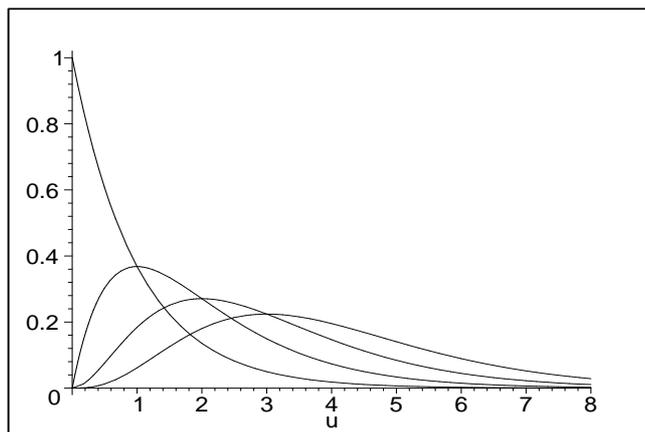


FIG. 2.3 – Premier formalisme de la loi Gamma : $\mathcal{G}_1[\alpha]$ (équation 2.5). $\alpha = 1, 2, 3$ et 4 .

Les premiers log-cumulants s'écrivent :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_{x(1)} = & -1 + \log \mu \\ \tilde{\kappa}_{x(2)} = & 1 \\ \tilde{\kappa}_{x(3)} = & -2 \\ \tilde{\kappa}_{x(r)} = & (-1)^r \Gamma(r) \quad \forall r \geq 1 \end{cases}$$

où Γ est la fonction Gamma (voir l'annexe A).

Remarquons que cette loi, "à tête lourde", est caractérisée par des log-cumulants définissant une suite alternée croissante. Il faut aussi noter que cette loi ne peut être associée à une loi inverse : c'est donc un cas extrême pour les statistiques de deuxième espèce.

2.1.3 La loi Gamma : premier formalisme

On trouve dans une grande majorité d'ouvrage (par exemple [35]) une première définition de la loi Gamma sous la forme ;

$$\mathcal{G}_1[\alpha](u) = \frac{u^{\alpha-1} e^{-u}}{\Gamma(\alpha)}. \quad (2.5)$$

Le cas particulier $\alpha = 1$ porte parfois indument le nom de loi exponentielle, ou plus précisément le nom de "loi exponentielle standard". Pour $\alpha > 0$ entier, on parle aussi de loi d'Erlang (le cas $\alpha < 0$ exige que $x < 0$ et n'est jamais traité en détail par les bons auteurs).

La transformée de Mellin de cette loi est triviale, ce qui permet d'écrire aisément la fonction caractéristique de deuxième espèce :

$$\phi(s) = \frac{\Gamma(s-1+\alpha)}{\Gamma(\alpha)}.$$

On en déduit les premiers moments :

$$\begin{cases} m_1 = & \alpha \\ m_2 = & \alpha(\alpha+1) \\ m_3 = & \alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \end{cases},$$

et le coefficient de variation :

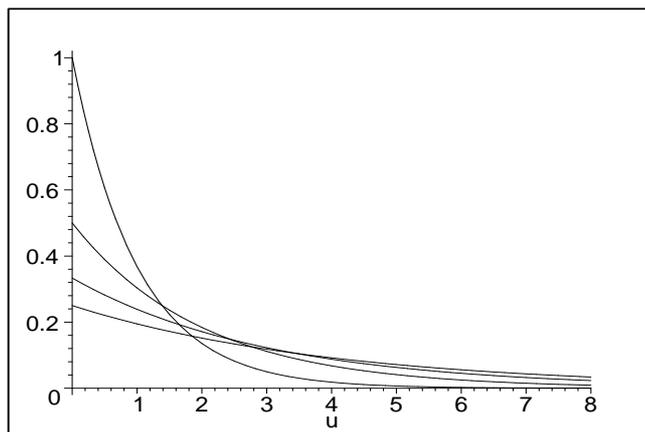
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

On obtient aussi

$$\beta_1 = \frac{4}{\alpha} \quad \beta_2 = \frac{3(2+\alpha)}{\alpha}$$

Les premiers log-cumulants s'écrivent :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_{x(1)} = & \Psi(\alpha) \\ \tilde{\kappa}_{x(2)} = & \Psi(1, \alpha) \\ \tilde{\kappa}_{x(3)} = & \Psi(2, \alpha) \\ \tilde{\kappa}_{x(r)} = & \Psi(r-1, \alpha) \quad \forall r \geq 2 \end{cases}$$

FIG. 2.4 – Loi exponentielle $\mathcal{G}_2[\sigma]$ (équation 2.6). $\sigma = 1, 2, 3$ et 4 .

(avec Ψ fonction Digamma –voir en annexe le paragraphe A.1.4– et $\Psi(r, L)$ fonction Polygamma, *i.e.* la dérivée r -ème de la fonction Digamma –voir en annexe le paragraphe A.1.5–).

Cette loi sera analysée plus en détail au paragraphe 2.2.3 dédié à la loi Gamma Généralisée. Nous verrons en effet qu'elle s'identifie à la loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L]$ avec $\mu = \alpha$ et $L = \alpha$, ce qui revient à écrire :

$$\mathcal{G}[\mu, L] = \mathcal{G}_1[\alpha = L] \hat{\star} \mathcal{H} \left[\frac{\mu}{L} \right]$$

2.1.4 La loi exponentielle

On trouve dans une grande majorité d'ouvrage (par exemple [35]) la définition suivante pour la loi exponentielle ;

$$\mathcal{G}_2[\sigma](u) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{u}{\sigma}}. \quad (2.6)$$

la fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit :

$$\phi(s) = \sigma(s-1) \Gamma(s).$$

On en déduit les premiers moments :

$$\begin{cases} m_1 = \sigma \\ m_2 = 2\sigma^2 \\ m_3 = 6\sigma^3 \end{cases},$$

et le coefficient de variation :

$$\gamma = 1$$

On obtient aussi

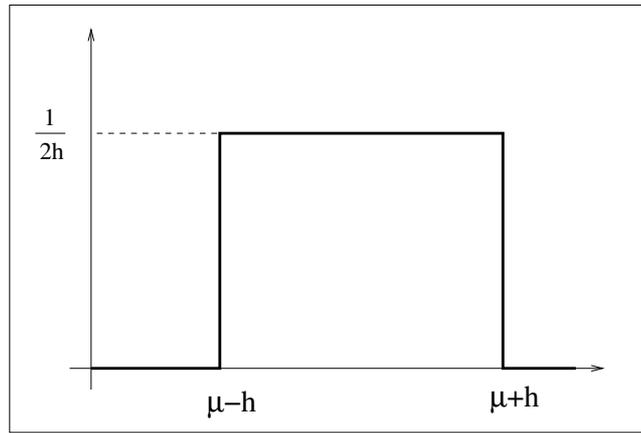
$$\beta_1 = 4 \quad \beta_2 = 9$$

Les premiers log-cumulants s'écrivent :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_{x(1)} = \log(\sigma) + \Psi(1) \\ \tilde{\kappa}_{x(2)} = \Psi(1, 1) \\ \tilde{\kappa}_{x(3)} = \Psi(2, 1) \\ \tilde{\kappa}_{x(r)} = \Psi(r-1, 1) \quad \forall r \geq 2 \end{cases}$$

(avec Ψ fonction Digamma –voir en annexe le paragraphe A.1.4– et $\Psi(r, L)$ fonction Polygamma, *i.e.* la dérivée r -ème de la fonction Digamma –voir en annexe le paragraphe A.1.5–).

Cette loi sera analysée plus en détail au paragraphe 2.2.3 dédié à la loi Gamma Généralisée. Nous verrons en effet qu'elle s'identifie à la loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L]$ avec $\mu = \sigma$ et $L = 1$.

FIG. 2.5 – Loi rectangulaire à 2 paramètres $\mathcal{U}[\mu, h]$ (équation 2.7).

2.2 Lois à 2 paramètres

Ce paragraphe est tout d'abord dédié à la loi uniforme et à la loi lognormale. Ensuite sont abordées les distributions les plus usitées dans le monde du Radar : les célèbres lois Gamma, de Rayleigh et de Weibull, ainsi que la loi Gamma Inverse.

Enfin, la Gaussienne Généralisée sera abordée dans le cas particulier où la variable u appartient à \mathbb{R}^+ .

2.2.1 La loi uniforme à 2 paramètres

Premier formalisme : la distribution rectangulaire

Soit une variable aléatoire uniformément répartie sur un segment de \mathbb{R}^+ : $[a_1, a_2]$. En appelant $Y(x)$ la distribution d'Heaviside, on peut donner une première formulation de la distribution de probabilité \mathcal{U} de cette variable :

$$\mathcal{U}[a_1, a_2](u) = \frac{Y(u - a_1) - Y(a_2 - u)}{a_2 - a_1}.$$

On trouve aussi cette loi sous le vocable de distribution rectangulaire, décrite par les paramètres μ et h , avec $a_1 = \mu - h$ et $a_2 = \mu + h$ (il faut néanmoins que $h \leq \mu$ soit vérifiée). Cette loi s'exprime alors :

$$\mathcal{U}[\mu, h](u) = \frac{Y(u - (\mu - h)) - Y((\mu + h) - u)}{2h} \quad h < \mu. \quad (2.7)$$

La fonction caractéristique de deuxième espèce de $\mathcal{U}[\mu, h]$ est alors définie pour tout $s > 0$ par la relation :

$$\phi_x(s) = \frac{(\mu + h)^s - (\mu - h)^s}{2sh} \quad (2.8)$$

Sa limite pour $h = \infty$ s'exprime comme

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left(\frac{(\mu + h)^s - (\mu - h)^s}{2sh} \right) = \mu^{s-1}$$

qui est la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi homothétique. On peut alors écrire :

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathcal{U}[\mu, h](u) = \mathcal{H}[\mu](u)$$

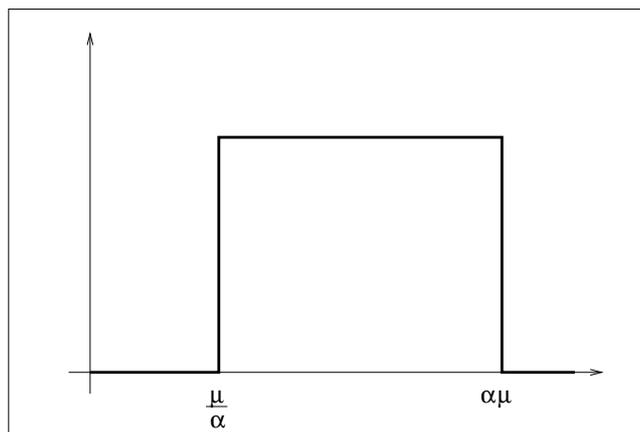
et donc affirmer que la loi rectangulaire a pour cas limite la loi homothétique.

La relation 2.8 permet d'exprimer ses moments d'ordre $r > -1$:

$$m_r = \frac{(\mu + h)^{r+1} - (\mu - h)^{r+1}}{2(r+1)h}$$

ce qui permet de déduire les moments d'ordre 1 et 2 :

$$\begin{cases} m_1 = \mu \\ m_2 = \mu^2 + \frac{h^2}{3} \end{cases},$$

FIG. 2.6 – Loi rectangulaire à 2 paramètres $\mathcal{U}'[\mu, \alpha]$ (équation 2.9).

et le coefficient de variation :

$$\gamma = \frac{1}{3} \frac{h^2}{\mu^2},$$

qui dépend donc des deux paramètres μ et h .

Les deux premiers log-cumulants n'ont pas une expression analytique facilement exploitable et s'écrivent :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_{x(1)} &= -1 + \frac{(\mu+h) \log(\mu+h) - (\mu-h) \log(\mu-h)}{2h} \\ \tilde{\kappa}_{x(2)} &= 1 - \frac{(h^2 - \mu^2) (\log(\mu+h) - \log(\mu-h))^2}{4h^2} \end{cases}$$

On peut réécrire ces expressions pour h petit :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_{x(1)} &= \log \mu + \frac{h^2}{6\mu^2} \\ \tilde{\kappa}_{x(2)} &= \frac{1}{3} \frac{h^2}{\mu^2} \end{cases}$$

On voit que cette formulation de la loi uniforme n'est guère utilisable dans le domaine des statistiques de deuxième espèce puisque le second log-cumulant dépend de μ .

Second formalisme

Il est possible de formaliser autrement cette loi en choisissant deux paramètres μ et $\alpha \geq 1$ tels que $\frac{\mu}{\alpha} = a_1$ et $\alpha\mu = a_2$. On a alors :

$$\mathcal{U}'[\mu, \alpha](u) = \frac{Y(u - \frac{\mu}{\alpha}) - Y(\alpha\mu - u)}{(\alpha - \frac{1}{\alpha}) \mu} \quad \alpha > 1. \quad (2.9)$$

La fonction caractéristique de deuxième espèce de $\mathcal{U}'[\mu, \alpha]$ est alors définie pour tout $s > 0$ par la relation :

$$\phi_x(s) = \frac{\mu^{s-1} (\alpha^s - \frac{1}{\alpha^s})}{s (\alpha - \frac{1}{\alpha})}$$

et on peut vérifier que $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \phi_x(s) = \mu^{s-1}$, ce qui permet toujours d'affirmer que la loi rectangulaire a pour cas limite la loi homothétique.

Ses moments d'ordre $r > -1$ s'expriment alors :

$$m_r = \frac{\mu^r}{r+1} \frac{\alpha^{r+1} - \frac{1}{\alpha^{r+1}}}{\alpha - \frac{1}{\alpha}} \quad r > -1$$

ce qui permet de déduire les moments d'ordre 1 et 2 :

$$\begin{cases} m_1 &= \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha} \mu \\ m_2 &= \frac{\alpha^4 + \alpha^2 + 1}{3\alpha^2} \mu^2 \end{cases} ,$$

et le coefficient de variation :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1},$$

qui ne dépend donc que de α .

Les premiers log-cumulants n'ont toujours pas une expression analytique facilement exploitable et s'écrivent :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_{x(1)} &= -1 + \log \mu + \log \alpha \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1} \\ \tilde{\kappa}_{x(2)} &= 1 - 4 (\log \alpha)^2 \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 - 1)^2} \\ \tilde{\kappa}_{x(3)} &= -2 + 8 (\log \alpha)^3 \frac{\alpha^2 (\alpha^2 + 1)}{(\alpha^2 - 1)^3} \end{cases} \quad (2.10)$$

Cependant, on peut remarquer que μ n'intervient que dans l'expression du premier log-cumulant : ce formalisme de la loi uniforme est mieux adapté aux statistiques de deuxième espèce.

Comme dans le cas de la loi uniforme à un paramètre, on constate que cette loi, "à tête lourde", est caractérisée par des log-cumulants définissant une suite alternée croissante, dans la mesure où α est grand.

Cependant, il faut aussi noter que :

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 1} \tilde{\kappa}_{x(2)} &= 0 \\ \lim_{\alpha \rightarrow 1} \tilde{\kappa}_{x(3)} &= 0 \end{aligned}$$

et cette propriété semblant se vérifiant à tout ordre, on a une convergence, au sens des log-cumulants, vers la loi homothétique, ce qui semble conforter le bon sens.

On peut aussi obtenir un développement en série pour le second log-cumulant :

$$\tilde{\kappa}_{x(2)} = \frac{(\alpha - 1)^2}{3} + O((\alpha - 1)^3) \quad (2.11)$$

qui s'avère plus exploitable que l'expression exacte.

2.2.2 La loi lognormale

Etant donné que la loi normale joue un rôle fondamental pour l'étude des variables aléatoires réelles (avec, en particulier des cumulants nuls à partir de l'ordre 3), on peut s'attendre à ce que la loi lognormale ait un rôle analogue pour les variables aléatoires positives. Cette loi à deux paramètres $\mathcal{L}[\mu, \sigma]$ est définie par

$$\mathcal{L}[\mu, \sigma](u) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi u}} e^{\left(-\frac{(\log u - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \quad u > 0 \quad (2.12)$$

On montre aisément que si une variable aléatoire positive x suit la loi lognormale $\mathcal{L}[\mu, \sigma]$, alors la variable aléatoire $y = \log(x)$ suit la loi normale $\mathcal{N}[\mu, \sigma]$, ce qui permet de donner une interprétation simple aux paramètres μ et σ .

Si la fonction caractéristique classique n'est pas définie pour la loi log-normale (voir l'annexe D), la fonction caractéristique de deuxième espèce de $\mathcal{L}[\mu, \sigma]$ est définie pour tout $s \in \mathbb{C}$:

$$\phi_{\mathcal{L}}(s) = e^{\mu(s-1)} e^{\left(\sigma^2 \frac{(s-1)^2}{2}\right)} \quad (2.13)$$

On montre aisément que :

$$\lim_{\sigma=0} \phi_{\mathcal{L}}(s) = e^{\mu(s-1)}$$

c'est à dire que l'on obtient la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi homothétique. On a ainsi démontré que la loi log-normale converge vers la loi homothétique pour $\sigma = 0$:

$$\lim_{\sigma=0} \mathcal{L}[\mu, \sigma] = \mathcal{H}[e^{\mu}]$$

La relation 2.13 permet de définir ses moments d'ordre r pour tout $r \in \mathbb{R}$:

$$m_r = e^{\mu r} e^{\left(\sigma^2 \frac{r^2}{2}\right)} \quad (2.14)$$

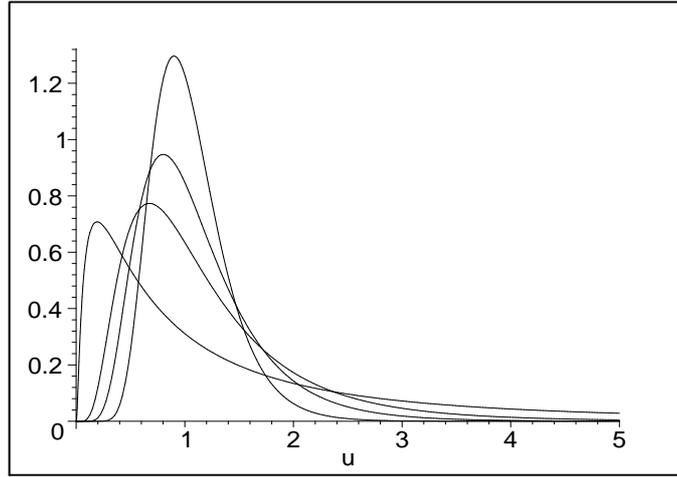


FIG. 2.7 – Loi Lognormale $\mathcal{L}_1[\mu', L]$ (équation 2.18) avec $\mu' = 1$ et $L = 1, 3, 5$ et 10 (dans ce formalisme, $\sigma = \Psi(1, L)$).

Les deux premiers moments s'expriment donc :

$$\begin{cases} m_1 = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \\ m_2 = \exp\left(2\mu + 2\sigma^2\right) \end{cases} \quad (2.15)$$

et le coefficient de variation γ s'écrit :

$$\gamma = \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$$

Remarquons aussi la très curieuse propriété suivante de la loi log-normale : quoique sa fonction caractéristique ne soit pas définie, tous ses moments, aussi bien positifs que négatifs, sont définis et s'expriment par la relation 2.14. On trouve par exemple :

$$\begin{cases} m_{-1} = \exp\left(-\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \\ m_{-2} = \exp\left(-2\mu + 2\sigma^2\right) \end{cases} \quad (2.16)$$

Connaissant la fonction caractéristique de deuxième espèce 2.13, les deux premiers log-moments s'en déduisent aisément :

$$\begin{cases} \tilde{m}_1 = \mu \\ \tilde{m}_2 = \mu^2 + \sigma^2 \end{cases}$$

On vérifie que ce sont bien les deux premiers moments de la loi $\mathcal{N}[\mu, \sigma]$.

Les log-cumulants s'écrivent :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_{x(1)} = \mu \\ \tilde{\kappa}_{x(2)} = \sigma^2 \\ \tilde{\kappa}_{x(n)} = 0 \quad \forall n \geq 3 \end{cases} \quad (2.17)$$

Remarquons qu'ils sont égaux aux cumulants de première espèce de $\mathcal{N}[\mu, \sigma]$, ce que l'on pouvait déduire par ailleurs des définitions.

La moyenne de deuxième espèce de la loi lognormale s'écrit :

$$\tilde{m} = e^\mu$$

et on peut remarquer que

$$m_{mode} = e^{\mu - \sigma^2} = \frac{\tilde{m}}{e^{\sigma^2}}.$$

Autre formalisme pour la loi lognormale : première version

Nous verrons au prochain paragraphe la loi Gamma généralisée dont le rôle essentiel se justifie en raison de son usage courant en radar. Pour permettre des comparaisons rapides entre la loi lognormale et la loi Gamma généralisée, il peut être judicieux de réécrire dans un nouveau formalisme la loi lognormale en posant

$$\sigma = \sqrt{\Psi(1, L)},$$

avec $\Psi(1, L)$ fonction Polygamma (c'est à dire la dérivée seconde du logarithme de la fonction Gamma, voir l'annexe A.1.5). En prenant

$$\mu' = e^\mu \Leftrightarrow \mu = \log(\mu')$$

$\mathcal{L}[\mu', L]$ est alors définie par :

$$\mathcal{L}_1[\mu', L](u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Psi(1, L)u} e^{\left(-\frac{(\log u - \log \mu')^2}{2 \Psi(1, L)}\right)} \quad u > 0 \quad (2.18)$$

et sa fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit :

$$\phi_x(s) = \mu'^{s-1} e^{\Psi(1, L) \frac{(s-1)^2}{2}}$$

Avec ce formalisme, les moments d'ordre 1 et 2 s'écrivent :

$$\begin{cases} m_1 &= \mu' e^{\frac{\Psi(1, L)}{2}} \\ m_2 &= \mu'^2 e^{2\Psi(1, L)} \end{cases}$$

le coefficient de variation γ s'écrit :

$$\gamma = \sqrt{e^{\Psi(1, L)} - 1}$$

et les log-cumulants s'expriment alors :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_{x(1)} &= \log \mu' \\ \tilde{\kappa}_{x(2)} &= \Psi(1, L) \\ \tilde{\kappa}_{x(n)} &= 0 \quad \forall n \geq 3 \end{cases}$$

ce qui permettra des comparaisons immédiates de forme (même second log-cumulant) avec la loi Gamma généralisée (que nous verrons au paragraphe 2.2.3).

Le mode vérifie la relation :

$$m_{mode} = \mu e^{-\Psi(1, L)}$$

Autre formalisme pour la loi lognormale : seconde version

Le formalisme précédent permet de comparer les aspects de la loi Gamma et de la loi lognormale : cependant, il faut noter que le mode dépend fortement du facteur de forme L .

Pour éviter cette dépendance, on peut remplacer μ' par $\mu' e^{\Psi(1, L)}$. La loi lognormale est alors définie par :

$$\mathcal{L}_2[\mu', L](u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Psi(1, L)u} e^{\left(-\frac{(\log u - \log(\mu') - \Psi(1, L))^2}{2 \Psi(1, L)}\right)} \quad u > 0 \quad (2.19)$$

Avec ce formalisme, la seconde fonction caractéristique s'écrit :

$$\phi_x(s) = \mu'^{s-1} e^{\Psi(1, L) \left((s-1) + \frac{(s-1)^2}{2} \right)}$$

Les moments d'ordre 1 et 2 s'écrivent :

$$\begin{cases} m_1 &= \mu' e^{\frac{3\Psi(1, L)}{2}} \\ m_2 &= \mu'^2 e^{4\Psi(1, L)} \end{cases}$$

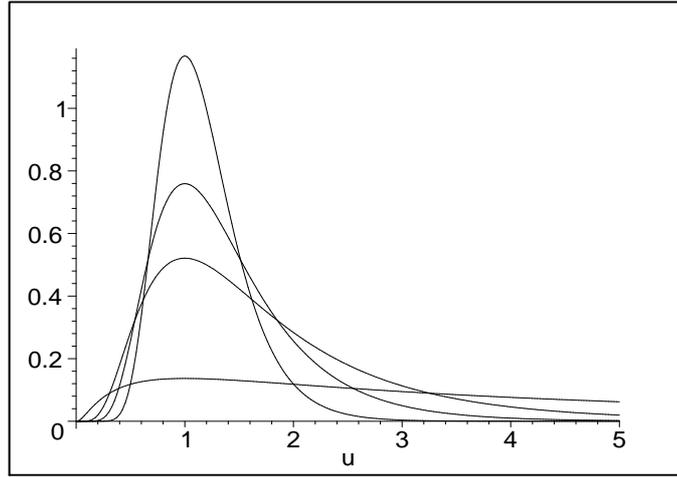
le mode :

$$m_{mode} = \mu'$$

et les log-cumulants s'expriment alors :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_{x(1)} &= \log \mu' + \Psi(1, L) \\ \tilde{\kappa}_{x(2)} &= \Psi(1, L) \\ \tilde{\kappa}_{x(n)} &= 0 \quad \forall n \geq 3 \end{cases}$$

ce qui peut permettre des comparaisons immédiates avec la loi Gamma généralisée (paragraphe 2.2.3).

FIG. 2.8 – Loi Lognormale $\mathcal{L}_2[\mu', L]$ (équation 2.19) avec $\mu' = 1$ et $L = 1, 3, 5$ et 10

Loi Lognormale en amplitude

Une très curieuse propriété de la loi Lognormale est que son expression pour des données en amplitude est aussi une loi Lognormale. En effet, en appliquant la relation fondamentale de passage de variables en intensité aux variables en amplitude (relation 1.56), on obtient :

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{L},A} &= 2u p_{\mathcal{L},I}(u^2) \\ &= 2u \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}u^2} e^{\left(-\frac{(\log u^2 - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \\ &= \frac{1}{\frac{\sigma}{2}\sqrt{2\pi}u} e^{\left(-\frac{(\log u - \frac{\mu}{2})^2}{2\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2}\right)} \end{aligned}$$

On a donc une expression de loi Lognormale. Une autre manière de s'en convaincre est d'utiliser les relations sur les log-cumulants 1.62 : seuls les deux premiers log-cumulants peuvent alors être non nuls, ce qui est d'ailleurs une définition de loi Lognormale.

Loi Inverse de la loi Lognormale

La propriété vérifiée pour le passage en données d'amplitude se vérifie en fait pour toute élévation à une puissance quelconque (positive ou négative) de la variable.

En particulier, le passage à la variable $\frac{1}{u}$, démarche qui permet de construire la loi log-normale inverse, conduit donc à une loi log-normale.

2.2.3 Lois Gamma et Gamma Généralisée (loi RSO “en intensité”)

Si la loi normale est l'outil de base dans l'étude des variables aléatoires réelles scalaires sur \mathbb{R} , c'est en fait la loi Gamma qui joue un rôle essentiel pour l'étude des variables aléatoires réelles scalaires sur \mathbb{R}^+ . Cette loi à deux paramètres $\mathcal{G}[\mu, L]$ est définie par :

$$\mathcal{G}[\mu, L](u) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{Lu}{\mu}\right)^{L-1} e^{-\frac{Lu}{\mu}} \quad (2.20)$$

Notons que la loi Gamma généralisée vérifie le système de Pearson (voir annexe C) puisque :

$$\frac{1}{\mathcal{G}[\mu, L](u)} \frac{d\mathcal{G}[\mu, L](u)}{du} = -\frac{\mu\left(\frac{1-L}{L}\right) + u}{\frac{\mu}{L}u}$$

La transformée de Mellin de $\mathcal{G}[\mu, L]$ s'exprime naturellement à l'aide de la fonction Gamma (puisque c'est une des définitions de la fonction Gamma), ce qui permet d'écrire la fonction caractéristique de deuxième espèce :

$$\phi_{\mathcal{G}}(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \quad (2.21)$$

Remarquons que lorsque L tend vers l'infini, et puisque on a la propriété suivante (relation A.6 de l'annexe A dédiée à la fonction Gamma)

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(L + s - 1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} = 1$$

on a :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \phi_{\mathcal{G}}(s) = \lim_{L \rightarrow \infty} \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L + s - 1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} = \mu^{s-1}$$

c'est à dire l'expression de la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi homothétique. On a donc démontré la relation

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{G}[\mu, L] = \mathcal{H}[\mu]. \quad (2.22)$$

c'est à dire que la loi Gamma converge vers la loi homothétique pour $L \rightarrow \infty$. Certains auteurs affirment hâtivement que, dans ce cas ($L \rightarrow \infty$), la loi Gamma Généralisée, dont le support est sur \mathbb{R}^+ , tend vers une loi normale : il faut noter alors que cette loi normale est dégénérée (*i.e.* avec σ tendant vers 0) et a un support réduit à un point unique (alors que d'ordinaire, toute loi normale a un support sur \mathbb{R}). En réalité, on ne peut démontrer que les deux propriétés suivantes :

- La loi Gamma Généralisée a pour limite la loi homothétique,
- La loi normale a pour limite la loi homothétique,

et, en toute rigueur, aucune relation directe entre loi normale et loi Gamma Généralisée ne peut en être déduit.

L'expression 2.21 permet d'exprimer tous ses moments d'ordre r avec $r > -L$:

$$m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L + r)}{L^r \Gamma(L)} \quad (2.23)$$

ce qui permet de déduire les trois premiers moments "classiques" :

$$\begin{cases} m_1 = & \mu \\ m_2 = & \frac{L+1}{L} \mu^2 \\ m_3 = & \frac{(L+2)(L+1)}{L^2} \mu^3 \end{cases} \quad (2.24)$$

ainsi que le coefficient de variation γ :

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{L}}. \quad (2.25)$$

Il faut remarquer que cette expression est très simple à utiliser puisque γ ne dépend que du facteur de forme L . En particulier, on a les valeurs numériques suivantes :

L	γ
1	1
2	0,7071
3	0,5773
5	0,4472

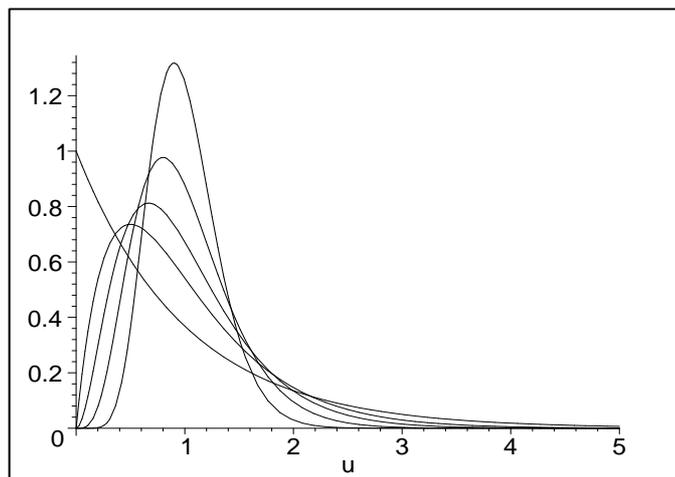
On donne traditionnellement les interprétations suivantes pour les paramètres μ et L :

- $m_1 = \mu$: μ est simplement la valeur moyenne.
- En prenant en compte les remarques propres à la distribution homothétique (paragraphe 2.1.1), et comme la fonction caractéristique de deuxième espèce s'exprime sous forme séparable avec un premier terme en μ^{s-1} , le second terme, fonction uniquement de L , représente un facteur de forme.
- Si on calcule le moment centré d'ordre 2 M_2 , on trouve :

$$M_2 = m_2 - m_1^2 = \frac{\mu^2}{L}.$$

L peut à nouveau être vu comme un facteur de forme, et $\mathcal{G}[\mu, L]$ est d'autant plus localisé autour de μ que L est grand.

- Enfin, on montre que le chatolement d'une image "en intensité" illuminée de manière cohérente s'exprime en fonction de L , "nombre de vues" de l'image.

FIG. 2.9 – Loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L]$ (équation 2.20) avec $\mu = 1$ et $L = 1, 2, 3, 5$ et 10

On peut aussi noter (par exemple, en utilisant le fait que la loi Gamma généralisée vérifie le système de Pearson) que le mode de cette d.d.p. vérifie

$$m_{mode} = \frac{L-1}{L} \mu \leq \mu = m_1.$$

Une différence essentielle avec la loi normale est que la loi Gamma n'est pas symétrique. Aussi la notion de moment centré a moins d'importance que dans le cas de variable aléatoire sur \mathbb{R} où des raisons de symétrie en justifient la pertinence. Néanmoins, il faut remarquer que le coefficient de variation, peu interprétable dans le cas de la loi normale, trouve ici sa pleine expression puisqu'il ne dépend que d'un des deux paramètres de la loi : ce coefficient de variation se calcule en fait avec le moment centré d'ordre 2.

Un autre point majeur propre aux lois définies sur \mathbb{R}^+ repose sur le fait que la transformée de Mellin de $\mathcal{G}[\mu, L]$ est définie pour $s > 1 - L$: on voit donc que, pour $L > 1$, on pourra avoir des valeurs de $s - 1$ négatives et donc des moments d'ordre inférieur.

En particulier, pour $L > 1$, on sait exprimer le moment d'ordre -1 :

$$m_{-1} = \frac{1}{\mu} \frac{L}{L-1}.$$

Schématiquement, les moments d'ordre inférieur reflètent principalement l'allure de la loi Gamma entre 0 et μ tandis que les moments traditionnels *i.e.* les puissances positives de u analysent plutôt la loi entre μ et ∞ .

Les log-cumulants de $\mathcal{G}[\mu, L]$ s'expriment selon les relations suivantes (avec Ψ fonction Digamma –voir le paragraphe A.1.4– et $\Psi(r, L)$ fonction Polygamma, *i.e.* la dérivée r -ème de la fonction Digamma –voir le paragraphe A.1.5–) :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_{x(1)} = \log(\mu) + \Psi(L) - \log(L) \\ \tilde{\kappa}_{x(2)} = \Psi(1, L) \geq 0 \\ \tilde{\kappa}_{x(3)} = \Psi(2, L) \leq 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

et on montre que :

$$\tilde{\kappa}_{x(r)} = \Psi(r-1, L) \quad \forall r > 1$$

Notons au passage la propriété (équation A.11) :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} (\Psi(L) - \log(L)) = 0$$

qui, associée au fait que les fonctions Polygamma tendent vers 0 à l'infini, prouve, par identification des cumulants de deuxième espèce, la convergence (faible) de la loi Gamma vers la distribution homothétique quand L tend vers l'infini.

Une analyse de ces expressions et de celles obtenues pour la loi homothétique permet d'écrire la relation :

$$\mathcal{G}[\mu, L] = \mathcal{G}[1, L] \hat{\star} \mathcal{H}[\mu]. \quad (2.27)$$

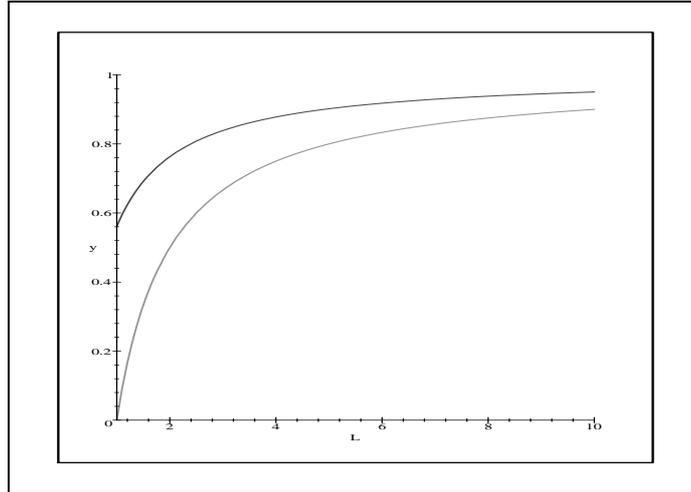


FIG. 2.10 – Ratio de la moyenne de deuxième espèce sur la moyenne et de la valeur du mode sur la moyenne pour un chatoiement (loi en intensité) dont le nombre de vues varie entre 1 et 10. On voit que la moyenne de deuxième espèce se situe toujours entre la valeur du mode et la moyenne de la loi.

μ et L sont donc deux variables indépendantes, ce que nous verrons mieux en analysant la matrice de Fisher au chapitre 3.

Notons aussi que le moment normalisé d'ordre 2 a une expression très simple qui ne dépend que de L :

$$\tilde{M}_2 = \Psi(1, L) \quad (2.28)$$

et la moyenne de deuxième espèce s'écrit :

$$\tilde{m} = \mu \frac{e^{\Psi(L)}}{L}. \quad (2.29)$$

Il est alors intéressant de remarquer les deux points suivants :

- $\frac{e^{\Psi(L)}}{L} \leq 1$: la moyenne de deuxième espèce est inférieure à la moyenne (l'identité est atteinte pour $L \rightarrow \infty$, voir la relation A.10 en annexe A).
- $\frac{e^{\Psi(L)}}{L} > \frac{L-1}{L}$: la moyenne de deuxième espèce est supérieure au mode.

Ce comportement est illustré figure 2.10 sur laquelle les évolutions normalisées de la valeur du mode et de la valeur de la moyenne de deuxième espèce sont données en fonction du paramètre L .

Une analyse plus complète montrerait que la moyenne de deuxième espèce a par ailleurs une valeur inférieure à m_{mediane} défini par

$$\int_0^{m_{\text{mediane}}} \mathcal{G}(u) du = 0.5.$$

Des exemples numériques de comparaison entre ces valeurs sont reprises dans le tableau suivant.

L	m_{mode}	\tilde{m}	m_{mediane}	\bar{m}	μ
1.0	0.000	.561	.693	1	1
2.0	.500	.763	.839	1	1
3.0	.666	.838	.891	1	1
5.0	.800	.901	.934	1	1
10.0	.900	.950	.966	1	1

Ces caractéristiques intrinsèques de la moyenne de deuxième espèce expliquent pourquoi cette grandeur peut s'utiliser comme valeur standard pour caractériser une zone homogène sur une image, en lieu et place de la moyenne traditionnelle.

Le log-cumulant d'ordre 3 de la loi Gamma est négatif (ou nul). Rappelant la définition du moment normalisé d'ordre 3 (formule 1.37)

$$\tilde{M}_3 = \int_0^{+\infty} \left(\log \frac{u}{\tilde{m}} \right)^3 p_x(u) du,$$

on voit que cette valeur négative est liée à la pondération par le logarithme, pondération positive pour $u > \bar{m}$, négative pour $u < \bar{m}$. Avoir un cumulatif d'ordre 3 négatif signifie donc que les effets de la d.d.p. sont plus significatifs entre 0 et \bar{m} qu'entre \bar{m} et ∞ . En d'autres termes, la d.d.p. décroît rapidement vers l'infini.

Notons que la fonction Gamma incomplète joue théoriquement, vis à vis de la loi Gamma, le rôle que joue la fonction d'erreur vis à vis de la loi normale. Cependant, son utilisation ne conduit pas aux simplifications que nous avons rencontrées dans le cas de la loi normale permettant de définir aisément les bornes permettant de ne conserver qu'un certain pourcentage α des points considérés.

Autre formalisme

Les ouvrages de statistiques proposent en général la forme suivante pour la loi Gamma :

$$\mathcal{G}'[\theta, L](u) = \frac{u^{L-1} e^{-\frac{u}{\theta}}}{\theta^L \Gamma(L)} \quad (2.30)$$

Tout se passe comme si on prenait $\theta = \frac{\mu}{L}$.

On trouve alors

$$\begin{cases} m_1 = & L\theta \\ m_2 = & L(L+1)\theta^2 \\ m_3 = & L(L+1)(L+2)\theta^3 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_{x(1)} = & \log(\theta) + \Psi(L) \\ \tilde{\kappa}_{x(2)} = & \Psi(1, L) \\ \tilde{\kappa}_{x(3)} = & \Psi(2, L) \end{cases}$$

Nous verrons que cette formulation conduit à une matrice de Fisher qui n'est pas diagonale (relations 3.13), ce qui signifie que les paramètres θ et L ne peuvent varier indépendamment.

Cas particulier de la loi Gamma Généralisée : la loi d'Erlang

Si l'on considère le cas $\mu = L$, et en posant $\alpha = L$, on retrouve le formalisme de la loi d'Erlang, rapidement analysée au paragraphe 2.1.3 :

$$\mathcal{G}_1[\alpha](u) = \frac{u^{\alpha-1} e^{-u}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Les deux premiers moments sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{cases} m_1 = & \alpha \\ m_2 = & \alpha(\alpha + 1) \end{cases}$$

α est à la fois la moyenne et la variance, ce qui conduit directement au coefficient de variation :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

Les deux premiers log-cumulants s'écrivent :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_{x(1)} = & \Psi(\alpha) \\ \tilde{\kappa}_{x(2)} = & \Psi(1, \alpha) \end{cases}$$

Cas particulier de la loi Gamma Généralisée : la loi Gamma

Si l'on pose $L = 1$ et $\mu = \sigma$, on obtient la loi Gamma, appelée aussi loi exponentielle, traditionnellement caractérisée par un paramètre unique σ et déjà rencontrée au paragraphe 2.1.4 :

$$\mathcal{G}_2[\sigma](u) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{u}{\sigma}} \quad (2.31)$$

Les deux premiers moments de la loi Gamma sont donnés par les relations :

$$\begin{cases} m_1 = & \sigma \\ m_2 = & 2\sigma^2 \end{cases}$$

σ est à la fois paramètre de la moyenne et paramètre de l'écart type, ce qui conduit à la relation suivante :

$$\gamma = 1$$

Les deux premiers log-cumulants de la loi Gamma sont donnés par les relations :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 &= \log \mu + \Psi(1) = \log \mu - \gamma_E \\ \tilde{\kappa}_2 &= \Psi(1, 1) \end{cases}$$

avec γ_E la constante d'Euler (voir l'identité A.9 de l'annexe A.1.4).

Loi du χ^2

Si on pose $\mu = n$ et $L = \frac{n}{2}$, on obtient la loi du χ^2 [15], traditionnellement paramétrée par n , nombre de degré de liberté :

$$\frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} u^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}}$$

Quelques propriétés de la loi Gamma Généralisée

La loi Gamma généralisée présente quelques curieuses propriétés qui pourront être exploitées ultérieurement :

– Une multiplication par une puissance de la variable s'exprime par une loi Gamma :

$$\frac{1}{u} \mathcal{G}[\mu, L] = \frac{L}{L-1} \frac{1}{\mu} \mathcal{G}\left[\frac{L-1}{L}\mu, L-1\right] \quad \forall L > 1 \quad (2.32)$$

– La dérivée d'une loi Gamma s'exprime à l'aide d'une différence de lois Gamma :

$$\frac{d}{du} \mathcal{G}[\mu, L] = \frac{L}{\mu} \left\{ \mathcal{G}\left[\frac{L-1}{L}\mu, L-1\right] - \mathcal{G}[\mu, L] \right\} \quad \forall L > 1 \quad (2.33)$$

Pour $L = 1$, on a simplement :

$$\left. \frac{d}{du} \mathcal{G}[\mu, L] \right|_{L=1} = -\frac{1}{\mu} \mathcal{G}[\mu, L]|_{L=1}$$

relation qui est une définition de l'exponentielle.

2.2.4 Lois de Rayleigh et de Nakagami (loi RSO “en amplitude”)

Bien connue des radaristes, la loi de Nakagami ¹ est en fait la loi que suit une variable dont la variable élevée au carré (l'intensité) suit la loi Gamma. C'est donc une loi à 2 paramètres que nous noterons $\mathcal{RN}[\mu, L]$ et telle que :

$$\mathcal{RN}[\mu, L](u) = \frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{L}}{\Gamma(L)} \left(\frac{\sqrt{L}u}{\mu} \right)^{2L-1} e^{-\left(\frac{\sqrt{L}u}{\mu}\right)^2}. \quad (2.34)$$

La relation fondamentale liant la loi de Nakagami et la loi Gamma généralisée se déduit de la relation 1.56 :

$$\mathcal{RN}[\mu_{\mathcal{RN}}, L](u) = 2u \mathcal{G}[\mu_{\mathcal{G}}, L](u^2). \quad (2.35)$$

En appliquant la relation 1.57, on en déduit directement la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi de Nakagami :

$$\phi_{\mathcal{RN}}(s) = \phi_{\mathcal{G}}\left(\frac{s+1}{2}\right)$$

ce qui, en posant $\mu_{\mathcal{G}} = \mu_{\mathcal{RN}}^2$, permet d'écrire directement :

$$\phi_{\mathcal{RN}}(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2} + L\right)}{L^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(L)}, \quad (2.36)$$

¹Il est important de rendre à Nakagami la paternité de cette loi, associée à tort à la loi Gamma généralisée : c'est en 1942 que Nakagami a proposé le formalisme des “m-distribution” et ce n'est qu'en 1960 que ses travaux ont été publiés en langue anglaise[32]

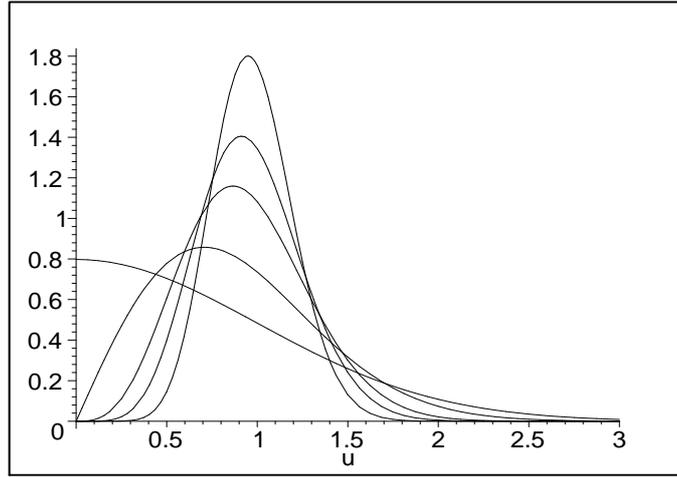


FIG. 2.11 – Loi de Nakagami-Rayleigh $\mathcal{RN}[\mu, L]$ (équation 2.34) avec $\mu = 1$ et $L = 0.5, 1, 2, 3, 5$

Comme dans le cas de la loi Gamma Généralisée, on montre aisément que

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \phi_{\mathcal{RN}}(s) = \mu^{s-1}$$

c'est à dire l'expression de la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi homothétique. On a donc démontré la relation

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{RN}[\mu, L] = \mathcal{H}[\mu].$$

c'est à dire que la loi de Nakagami converge vers la loi homothétique.

La relation 2.36 fournit l'expression des moments d'ordre r :

$$m_r = \mu^r \frac{\Gamma\left(\frac{r}{2} + L\right)}{L^{\frac{r}{2}} \Gamma(L)} \quad (2.37)$$

Les moments "classiques" de la loi de Nakagami s'écrivent alors :

$$\begin{cases} m_1 &= \frac{\Gamma(L + \frac{1}{2})}{\sqrt{L} \Gamma(L)} \mu \\ m_2 &= \mu^2. \end{cases} \quad (2.38)$$

Notons un particularisme de cette loi : le paramètre μ est très simplement lié au moment d'ordre 2, et non, comme dans le cas des données en intensité, au moment d'ordre 1.

Le moment centré d'ordre 2 s'écrit :

$$M_2 = \mu^2 \frac{L \Gamma(L)^2 - \left(\Gamma(L + \frac{1}{2})\right)^2}{L \Gamma(L)^2}.$$

En utilisant une fonction spéciale : la fonction de Pochhammer² (voir annexe A), définie par :

$$Poch(x, \nu) = \frac{\Gamma(x + \nu)}{\Gamma(x)},$$

on obtient une expression spécifique du coefficient de variation (l'expression approchée se déduit des relations A.7 et A.8 de l'annexe A) :

$$\gamma = \sqrt{\frac{\Gamma(L)\Gamma(L+1)}{\Gamma(L + \frac{1}{2})^2} - 1} = \sqrt{\frac{Poch\left(L + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{Poch\left(L, \frac{1}{2}\right)} - 1} \simeq \frac{1}{2\sqrt{L}} \quad (2.39)$$

En particulier, on a les valeurs numériques suivantes :

²Cette fonction, quasiment inconnue, est néanmoins reconnue par Maple, présente des particularismes intéressants dans ses développements au premier ordre que nous exploiterons ultérieurement (chapitre 3)

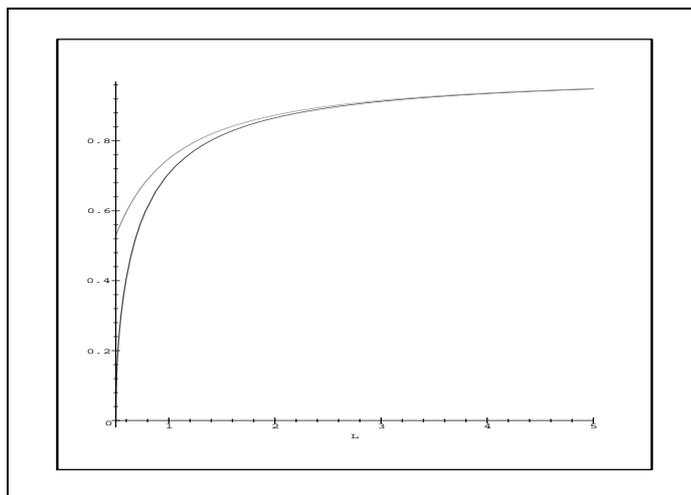


FIG. 2.12 – Ratios de la moyenne de deuxième espèce et de la valeur du mode sur le paramètre μ e pour un chatoisement (loi en amplitude) dont le nombre de vues varie entre 0.5 et 5. On voit que la moyenne de deuxième espèce se situe toujours entre la valeur du mode et la moyenne de la loi.

L	γ
1	0,5227
2	0,3630
3	0,2941
5	0,2262

Le mode de cette d.d.p. est

$$m_{mode} = \sqrt{\frac{2L-1}{2L}} \mu$$

Les log-cumulants de la loi de Nakagami peuvent se déduire directement de ceux de la loi Gamma. En effet, en appliquant la relation 1.59, on peut écrire directement :

$$\tilde{\kappa}_{x(1)} = \log(\mu) + \frac{1}{2}(\Psi(L) - \log(L)) \quad (2.40)$$

$$\tilde{\kappa}_{x(2)} = \frac{1}{4} \Psi(1, L) \quad (2.41)$$

$$\tilde{\kappa}_{x(3)} = \frac{1}{8} \Psi(2, L)$$

et pour tout $r > 1$:

$$\tilde{\kappa}_{x(r)} = \left(\frac{1}{2}\right)^r \Psi(r-1, L).$$

La moyenne de deuxième espèce s'écrit :

$$\tilde{m} = \mu \frac{e^{\frac{\Psi(L)}{2}}}{\sqrt{L}}. \quad (2.42)$$

Le comportement de la moyenne de deuxième espèce et du mode vis à vis de la moyenne est illustré figure 2.12. On peut remarquer que très rapidement, la moyenne de deuxième espèce s'approche de la valeur du mode.

Des exemples numériques de comparaison entre ces valeurs, incluant la valeur de la médiane, sont reprises dans le tableau suivant.

L	m_{mode}	\tilde{m}	$m_{mediane}$	\bar{m}	μ
.5	0.000	.529	.674	.797	1
1.0	.707	.749	.832	.886	1
2.0	.866	.873	.916	.939	1
3.0	.912	.915	.944	.959	1
5.0	.948	.949	.966	.975	1

Autre formalisme de la loi de Nakagami

El Zaart et al. [18] proposent d'écrire la loi de Nakagami sous la forme suivante :

$$\mathcal{RN}_Z[\mu_Z, L](u) = \frac{2}{\mu_Z} \frac{q \sqrt{L}}{\Gamma(L)} \left(\frac{\sqrt{L} q u}{\mu_Z} \right)^{2L-1} e^{-\left(\frac{\sqrt{L} q u}{\mu_Z}\right)^2}. \quad (2.43)$$

avec

$$q = \frac{\Gamma(L + 0.5)}{\sqrt{L} \Gamma(L)}.$$

Il est aisé de noter que :

$$\mathcal{RN}_Z[\mu_Z, L](u) = \mathcal{RN}[\mu, L](u)$$

avec

$$\mu_Z = \mu \frac{\sqrt{L} \Gamma(L)}{\Gamma(L + 0.5)}.$$

Ce choix quelque peu ésotérique permet alors d'écrire :

$$m_1 = \mu_Z$$

et ainsi d'avoir le moment (classique) d'ordre 1 égal au paramètre de gain : l'estimateur est alors non biaisé. En revanche, le moment d'ordre 2 est beaucoup moins simple et dépend alors du facteur de forme L .

Dans le même ordre d'idée, on peut aussi changer légèrement la loi de Nakagami pour avoir, en statistiques de deuxième espèce, un **log-moment** non biaisé : il suffit de poser

$$\mathcal{RN}'[\mu', L](u) = \frac{2}{\mu_Z} \frac{q \sqrt{L}}{\Gamma(L)} \left(\frac{\sqrt{L} q u}{\mu'} \right)^{2L-1} e^{-\left(\frac{\sqrt{L} q u}{\mu'}\right)^2}. \quad (2.44)$$

avec

$$q = e^{\sqrt{\frac{\log L}{\Psi(L)}}}.$$

De facto, on a alors :

$$\tilde{m}_1 = \mu'$$

ce qui rend l'estimateur en échelle logarithmique non biaisé. Les autres log-cumulants restent inchangés et ne dépendent que du facteur de forme L .

Cas particuliers de la loi de Nakagami : la loi de Rayleigh

Si l'on pose $L = 1$, on obtient la loi de Rayleigh :

$$\mathcal{RN}[\mu, L = 1](u) = \frac{2}{\mu} \left(\frac{u}{\mu} \right) e^{-\left(\frac{u}{\mu}\right)^2}.$$

Les deux premiers moments de la loi de Rayleigh sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{cases} m_1 &= \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \mu = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mu \simeq 0,886 \mu \\ m_2 &= \mu^2 \end{cases}$$

(dans la première relation, on a utilisé certaines propriétés de la fonction Gamma, relation A.4). On en déduit le coefficient de variation de la loi de Rayleigh :

$$\gamma = \sqrt{\frac{4 - \pi}{\pi}} \simeq 0,5227$$

Les deux premiers log-cumulants de la loi de Rayleigh sont donnés par les relations :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 &= \log \mu + \frac{1}{2} \Psi(1) = \log \mu - \frac{1}{2} \gamma_E \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{1}{4} \Psi(1, 1) \end{cases}$$

Enfin, son mode est donné par :

$$m_{mode} = \sqrt{\frac{1}{2}} \mu$$

Si on pose $\mu = n$ et $L = \frac{n}{2}$, on obtient une variante (en amplitude) de la loi du χ^2 [15].

Si l'on pose $\mu = 2\sigma^2$, on trouve un formalisme usité en imagerie radar

$$\mathcal{RN}[\sigma, L = 1](u) = \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{u}{2\sigma^2} \right) e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}.$$

Le paramètre σ correspond à la variance de la loi gaussienne générant partie réelle et partie imaginaire du signal radar complexe dans le cas d'un chatoiement pleinement développé d'amplitude u .

2.2.5 Loi Gamma (généralisée) Inverse

Premier formalisme

L'expression de la loi Gamma (généralisée) inverse se déduit directement de la loi Gamma (généralisée). Partant de la loi Gamma généralisée, on peut construire sa loi inverse en appliquant la relation 1.11 :

$$f_I(u) = \frac{1}{u^2} \mathcal{G}[\mu', L] \left(\frac{1}{u} \right),$$

on obtient directement une première expression de la loi Gamma Inverse :

$$f_I[\mu', L](u) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{\mu'}{L} \left(\frac{L}{\mu' u} \right)^{L+1} e^{-\frac{L}{\mu' u}} \quad L \geq 0 \quad \mu' > 0.$$

Connaissant la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi Gamma généralisée $\phi_{\mathcal{G}}$ et la relation 1.46, on obtient directement :

$$\phi_{f_I}(s) = \phi_{\mathcal{G}}(2-s) = \mu'^{1-s} \frac{\Gamma(L+1-s)}{L^{1-s} \Gamma(L)}$$

Enfin, connaissant les log-cumulants de la loi Gamma, les log-cumulants de la loi Gamma Inverse, qui vérifient la relation 1.49, s'écrivent :

$$\tilde{\kappa}_{f_I, x(r)} = (-1)^r \tilde{\kappa}_{\mathcal{G}, x(r)}$$

La valeur moyenne de f_I , donnée par :

$$m_1 = \phi|_{s=2} = \frac{1}{\mu'},$$

est donc inversement proportionnel au paramètre μ' .

Formalisme adopté

Afin d'avoir une valeur moyenne proportionnelle au paramètre μ , on préférera la définition suivante pour la loi Gamma Inverse :

$$\mathcal{GI}[\mu, L](u) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{1}{L\mu} \left(\frac{L\mu}{u} \right)^{L+1} e^{-\frac{L\mu}{u}} \quad L \geq 0 \quad \mu > 0 \quad (2.45)$$

ce qui rend les expressions homogènes en $\frac{u}{\mu}$. Ce choix arbitraire sera conservé par la suite pour toutes les autres "lois inverses" abordées.

Notons que la loi Gamma inverse vérifie le système de Pearson (voir annexe C) puisque :

$$\frac{1}{\mathcal{GI}[\mu, L](u)} \frac{d\mathcal{GI}[\mu, L](u)}{du} = -\frac{\frac{L\mu}{L+1} + u}{\frac{1}{L+1} u^2} \quad (2.46)$$

La fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi Gamma Inverse s'écrit alors :

$$\phi_{\mathcal{GI}}(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+1-s)}{L^{1-s} \Gamma(L)} \quad (2.47)$$

Comme dans le cas de la loi Gamma Généralisée, on montre aisément que

$$\lim_{L=\infty} \phi_{\mathcal{GI}}(s) = \mu^{s-1}$$

c'est à dire l'expression de la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi homothétique. On a donc démontré la relation

$$\lim_{L=\infty} \mathcal{GI}[\mu, L] = \mathcal{H}[\mu]. \quad (2.48)$$

c'est à dire que la loi Gamma Inverse converge vers la loi homothétique.

L'expression 2.47 permet d'écrire les moments d'ordre $r < L$:

$$m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L-r)}{L-r} \frac{1}{\Gamma(L)}. \quad (2.49)$$

En particulier, pour $L > 2$, on a :

$$\begin{cases} m_1 = \frac{L}{L-1} \mu \\ m_2 = \frac{L^2}{(L-1)(L-2)} \mu^2 \end{cases} \quad (2.50)$$

Dans ce cas, le coefficient de variation est défini et s'écrit :

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{L-2}}$$

Remarquons que tous les moments négatifs sont définis ! En particulier :

$$\begin{aligned} m_{-1} &= \frac{1}{\mu^2} \\ m_{-2} &= \frac{1}{\mu^2} \frac{L+1}{L} \end{aligned}$$

Au choix de μ près, on retrouve les deux premiers moments (positifs) de la loi Gamma comme le laissait prévoir la relation 1.47.

Les log-cumulants s'écrivent :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_{x(1)} &= \log(\mu) - (\Psi(L) - \log(L)) \\ \tilde{\kappa}_{x(2)} &= \Psi(1, L) \\ \tilde{\kappa}_{x(3)} &= -\Psi(2, L) \geq 0 \\ \tilde{\kappa}_{x(r)} &= (-1)^r \Psi(r-1, L) \end{aligned} \quad (2.51)$$

On voit que cette définition ne conduit pas, à l'ordre 1, à une relation simple entre les log-cumulants de la loi Gamma et de la loi Gamma Inverse puisque l'on a souhaité garder une certaine signification au paramètre μ pour rendre homogènes les expressions. En revanche, pour les ordres supérieurs à 1, on conserve la propriété 1.49.

La moyenne, le mode (obtenu par le biais de l'expression du système de Pearson 2.46) et la moyenne de deuxième espèce s'écrivent :

$$\begin{aligned} \bar{m} &= \mu \frac{L}{L-1} \\ m_{mode} &= \mu \frac{L}{L+1} \\ \tilde{\bar{m}} &= \mu \frac{L}{e^{\Psi(L)}} \end{aligned}$$

et le moment normalisé d'ordre 2 s'exprime :

$$\tilde{M}_2 = \Psi(1, L),$$

i.e. la même expression que la loi Gamma.

Comme pour la loi Gamma, il est intéressant d'effectuer les comparaisons suivantes :

- $\frac{L}{e^{\Psi(L)}} \geq 1$: la moyenne de deuxième espèce est supérieure à la moyenne.
- $\frac{L}{e^{\Psi(L)}} > \frac{L}{L+1}$: la moyenne de deuxième espèce est supérieure au mode.

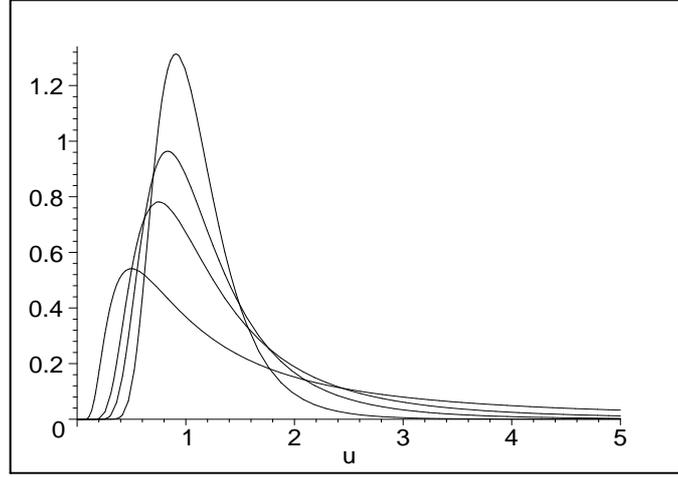


FIG. 2.13 – Loi Gamma Inverse $\mathcal{GI}[\mu, L]$ (relation 2.45) avec $\mu = 1$ et $L = 1, 3, 5$ et 10

A la différence de la loi Gamma, la loi Gamma Inverse est une loi à *queue lourde*, *i.e.* ses moments (traditionnels) ne sont pas définis à partir d'un certain ordre $n = L + 1$. Nous reparlerons de ce type de lois au paragraphe 2.5.

Enfin, notons aussi que le cumulants d'ordre 3 de la loi Gamma Inverse est positif (ou nul dans le cas dégénéré). Avoir un cumulants d'ordre 3 positif signifie donc que les effets de la d.d.p. sont plus significatifs entre \tilde{m} et ∞ qu'entre 0 et \tilde{m} . En d'autres termes, la d.d.p. ne décroît que lentement vers l'infini, ce qui est une manière d'interpréter la loi Gamma Inverse comme un exemple de loi à queue lourde.

Cas $L=1$: loi exponentielle inverse

Le cas particulier $L = 1$ correspond donc à la loi exponentielle inverse :

$$\frac{1}{\mu} \left(\frac{\mu}{u}\right)^2 e^{-\frac{\mu}{u}}$$

Notons que cette loi n'a aucun moment "classique" (même le moment d'ordre 1 n'est pas défini!). En revanche, elle est dotée de tous ses log-moments.

Données en amplitude : loi de Rayleigh Nakagami Inverse

Comme lors du passage de la loi Gamma à la loi de Rayleigh-Nakagami pour permettre de traiter des données RSO "en amplitude", il est aisé de définir formellement la loi de Rayleigh Nakagami Inverse :

$$\mathcal{RN}\mathcal{I}[\mu, L](u) = \frac{2}{\mu} \frac{1}{\sqrt{L}\Gamma(L)} \left(\frac{\sqrt{L}\mu}{u}\right)^{2L+1} e^{-\left(\frac{\sqrt{L}\mu}{u}\right)^2}. \quad (2.52)$$

dont la fonction caractéristique de deuxième espèce est aisée à déduire de la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi de Rayleigh Nakagami (équation 2.47) et qui s'écrit :

$$\phi_x(s) = \phi_{\mathcal{GI}}\left(\frac{s+1}{2}\right) = \mu^{\frac{s-1}{2}} \frac{\Gamma\left(L + \frac{1-s}{2}\right)}{L^{\frac{1-s}{2}} \Gamma(L)}.$$

Ses log-cumulants s'expriment comme :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_{x(1)} &= \log(\mu) - \frac{1}{2}(\Psi(L) - \log(L)) \\ \tilde{\kappa}_{x(2)} &= \frac{1}{4}\Psi(1, L) \\ \tilde{\kappa}_{x(3)} &= -\frac{1}{8}\Psi(2, L) \end{aligned} \quad (2.53)$$

et pour tout $r > 1$:

$$\tilde{\kappa}_{x(r)} = (-1)^r \left(\frac{1}{2}\right)^r \Psi(r-1, L).$$

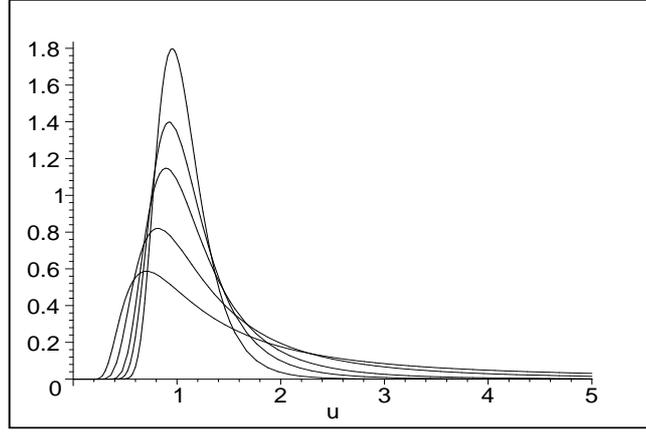


FIG. 2.14 – Loi de Rayleigh Nakagami Inverse $\mathcal{RN}\mathcal{I}[\mu, L]$ (équation 2.52). $L=0.5, 1, 2, 3$ et 5 .

Cette loi totalement inusitée sera néanmoins utile pour permettre des expressions simples de certains cas de la loi de Rayleigh généralisée analysée au paragraphe 2.5.3.

2.2.6 La loi de Weibull

Cette loi à 2 paramètres μ, η est donnée par :

$$\mathcal{W}[\mu, \eta](u) = \frac{\eta}{\mu} \left(\frac{u}{\mu}\right)^{\eta-1} e^{-\left(\frac{u}{\mu}\right)^\eta} \quad (2.54)$$

C'est en fait la loi que suit une variable u qui, élevée à la puissance η , suit alors une loi Gamma.

En faisant varier le paramètre de formes η , on passe de la loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, 1]$ pour $\eta = 1$ à la loi de Rayleigh $\mathcal{RN}[\mu, 1]$ pour $\eta = 2$.

Connaissant la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi Gamma $\phi_{\mathcal{G}[\mu, L=1]}$, ainsi que la relation 1.61, on peut écrire directement :

$$\phi_{\mathcal{W}}(s) = \phi_{\mathcal{G}[\mu, L=1]} \left(\frac{s + \eta - 1}{\eta} \right) = \mu^{s-1} \Gamma \left(\frac{s + \eta - 1}{\eta} \right) = \mu^{s-1} \Gamma \left(\frac{s-1}{\eta} + 1 \right) \quad (2.55)$$

De manière triviale, on montre que

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \phi_{\mathcal{W}}(s) = \mu^{s-1}$$

c'est à dire l'expression de la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi homothétique. On a donc démontré la relation

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \mathcal{W}[\mu, \eta] = \mathcal{H}[\mu]. \quad (2.56)$$

c'est à dire que la loi de Weibull converge vers la loi homothétique.

La relation 2.55 permet d'écrire les moments d'ordre $r > -\eta$:

$$m_r = \mu^r \Gamma \left(\frac{r}{\eta} + 1 \right) \quad (2.57)$$

En particulier :

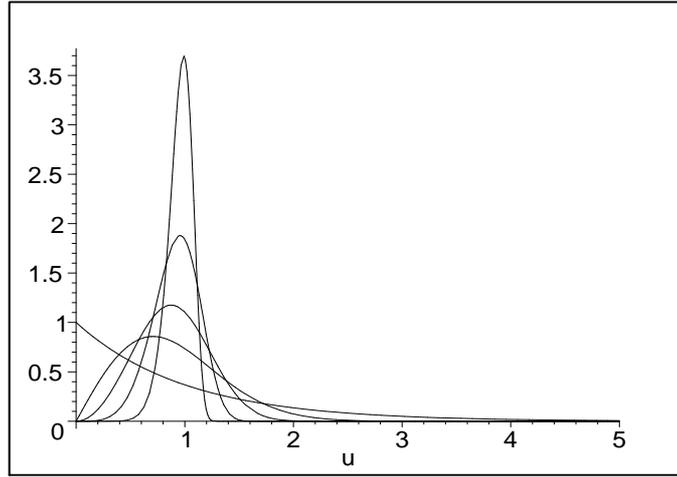
$$\begin{cases} m_1 = \Gamma \left(1 + \frac{1}{\eta} \right) \mu \\ m_2 = \Gamma \left(1 + \frac{2}{\eta} \right) \mu^2 \end{cases} \quad (2.58)$$

Le coefficient de variation s'écrit :

$$\gamma = \sqrt{\frac{\Gamma \left(1 + \frac{2}{\eta} \right)}{\Gamma \left(1 + \frac{1}{\eta} \right)^2}} - 1$$

et le mode :

$$m_{mode} = \left(\frac{\eta - 1}{\eta} \right)^{\frac{1}{\eta}} \mu.$$

FIG. 2.15 – Loi de Weibull $\mathcal{W}[\mu, \eta]$ (équation 2.54) avec $\eta = 1, 2, 3, 5$ et 10

A partir de l'expression 1.62, on montre que ses log-cumulants s'écrivent :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_{x(1)} &= \log \mu - \frac{\gamma_E}{\eta} = \log \mu + \frac{\Psi(1)}{\eta} \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{1}{\eta^2} \Gamma(2) \zeta(2) = \frac{1}{\eta^2} \Psi(1, 1) \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\tilde{\kappa}_3 = \frac{1}{\eta^3} \Gamma(3) \zeta(3) = \frac{1}{\eta^3} \Psi(2, 1) \quad (2.60)$$

$$\tilde{\kappa}_{x(r)} = (-1)^r \frac{\Gamma(r) \zeta(r)}{\eta^r} = \frac{\Psi(r-1, 1)}{\eta^r} \quad \forall r > 1 \quad (2.61)$$

avec γ_E constante d'Euler et ζ la fonction Zeta de Riemann ³ (voir annexe A.1.6).

On en déduit la moyenne de deuxième espèce :

$$\tilde{m} = e^{-\frac{\gamma_E}{\eta}} \mu$$

La loi de Weibull : formalisme général

Classiquement, on choisit η comme un paramètre positif permettant de passer continuellement de la loi Gamma ($\eta = 1$) à la loi de Rayleigh ($\eta = 2$) : des valeurs plus élevées conduisant à des d.d.p. de plus en plus localisées autour de la moyenne.

Il est tout à fait envisageable de considérer ce paramètre pour des valeurs négatives de telle sorte que l'on puisse passer continuellement de la loi Gamma Inverse ($\eta = -1$) à la loi de Rayleigh Inverse ($\eta = -2$). Il suffit pour cela de modifier très légèrement la formule 2.54 pour que la fonction ainsi définie soit positive ou nulle quelle que soit la valeur de η (positive ou négative) :

$$\mathcal{W}[\mu, \eta](u) = \frac{|\eta|}{\mu} \left(\frac{u}{\mu}\right)^{\eta-1} e^{-\left(\frac{u}{\mu}\right)^\eta} \quad (2.62)$$

La loi de Weibull est alors sa propre inverse (la loi log-normale vérifie elle aussi cette curieuse propriété). Ses moments d'ordre r s'écrivent

$$m_r = \mu^r \Gamma\left(\frac{r}{\eta} + 1\right)$$

et ne sont définis que si $\frac{r}{\eta} > -1$.

2.2.7 La loi Gaussienne Généralisée sur \mathbb{R}^+

La loi Gaussienne Généralisée \mathcal{G} est définie par deux paramètres : μ et η et s'écrit :

$$\mathcal{G}[\mu, \eta](u) = \frac{\eta}{\mu} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\eta}\right)} e^{-\left(\frac{u}{\mu}\right)^\eta} \quad u \in \mathbb{R}^+ \quad (2.63)$$

³La fonction Zeta est souvent utilisée dans la communauté du radar et dans [31] en particulier.

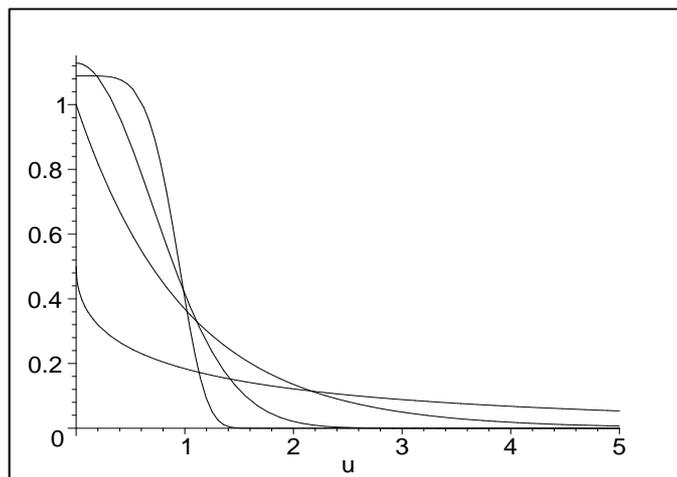


FIG. 2.16 – Loi Gaussienne Généralisée $\mathcal{GG}[\mu, \eta]$ (équation 2.63) avec $\eta = 0.5, 1, 2$ et 5 .

Sa fonction caractéristique de deuxième espèce se déduit de la définition de la fonction Gamma et des propriétés **TM 1** et **TM3** de la transformée de Mellin :

$$\phi_{\mathcal{GG}}(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{\eta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\eta}\right)}, \quad (2.64)$$

Puisque l'on a la relation A.5 (voir Annexe A) :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\alpha x)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{1}{x}$$

on peut alors écrire :

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \phi_{\mathcal{GG}}(s) = \frac{\mu^{s-1}}{s}$$

expression qui est celle de la loi uniforme à 1 paramètre (relation 2.4). On a donc démontré la propriété :

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \mathcal{GG}[\mu, \eta] = \mathcal{U}_1[\mu]$$

c'est à dire que, pour $\eta \rightarrow \infty$ la loi Gaussienne Généralisée converge vers la loi uniforme.

L'expression 2.64 donne directement les moments traditionnels pour $r > -1$:

$$m_r = \mu^r \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{\eta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\eta}\right)}, \quad (2.65)$$

et en particulier

$$m_1 = \mu \frac{\Gamma\left(\frac{2}{\eta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\eta}\right)}$$

$$m_2 = \mu^2 \frac{\Gamma\left(\frac{3}{\eta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\eta}\right)}$$

Le coefficient de variation s'écrit :

$$\gamma = \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{3}{\eta}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{\eta}\right)^2} - 1}$$

Le mode est bien entendu en 0.

Par dérivation logarithmique selon s de l'expression 2.64, on en déduit les deux premiers log-cumulants :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_1 &= \log(\mu) + \frac{\Psi\left(\frac{1}{\eta}\right)}{\eta} \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{\Psi\left(1, \frac{1}{\eta}\right)}{\eta^2} \\ \tilde{\kappa}_r &= \frac{\Psi\left(r-1, \frac{1}{\eta}\right)}{\eta^r}\end{aligned}$$

Remarquons que le cas $\eta = 1$ correspond à la loi Gamma (plus précisément la loi exponentielle) et que le cas $\eta \rightarrow \infty$ correspond à la loi uniforme.

2.3 Lois à 3 paramètres

Les lois précédemment citées sont parmi les plus usuelles en analyse d'image RSO : en effet, elles apparaissent dans l'analyse de la physique des phénomènes sous jacents d'une part aux propriétés de l'illumination cohérente et d'autre part dans la chaîne de production des images (synthèse RSO par exemple).

Cependant, dès lors que certaines propriétés ne sont plus vérifiées (comme l'homogénéité d'une scène imagée), leur emploi ne peut que conduire à des échecs. Aussi très rapidement des lois à trois paramètres ont été employées pour tenter de décrire la texture d'une image.

Plutôt que de proposer un catalogue des lois classiquement utilisées, nous proposons dans ce paragraphe de construire formellement des densités de probabilités à partir des lois précédemment étudiées et des opérateurs que l'on peut leur appliquer : convolution de Mellin $\hat{\star}$, corrélation de Mellin $\hat{\otimes}$, convolution inverse de Mellin $\hat{\star}^{-1}$ dans la mesure où cette opération peut être définie. Il est intéressant de noter dès à présent que cette démarche conduit à retrouver une famille de lois bien connues : celles du système de Pearson (auquel l'annexe C est dédié).

Cependant, une loi qui pourrait avoir un rôle important à jouer en imagerie RSO, la loi de Weibull généralisée, ne peut s'écrire sous ce formalisme puisqu'elle correspond à une opération de **généralisation**, *i.e.* un changement de variable par passage à la puissance de la variable. C'est elle que nous aborderons en premier.

2.3.1 La loi de Weibull Généralisée

Nous avons vu que la loi de Weibull permettait de passer continuellement de la loi Gamma à la loi de Rayleigh par le biais d'une variable ancillaire η correspondant à la puissance à laquelle il faut considérer la variable. La loi de Weibull généralisée en est une simple variante, et permet de passer continuellement de la loi Gamma généralisée $\mathcal{G}[\mu_G, L]$ à la loi de Nakagami $\mathcal{RN}[\mu_R, L]$ avec cette même variable ancillaire η .

Cette loi à 3 paramètres μ, L, η est donnée par :

$$\mathcal{WG}[\mu, L, \eta](u) = \frac{|\eta|}{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{\Gamma(L)} \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} u}{\mu}\right)^{\eta L - 1} e^{-\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} u}{\mu}\right)^\eta}. \quad (2.66)$$

On peut vérifier que :

- pour $\eta = 1$ on retrouve bien la loi Gamma généralisée,
- pour $\eta = 2$ on retrouve bien la loi de Rayleigh-Nakagami,
- pour $\eta = -1$ on retrouve bien la loi Gamma Inverse généralisée,
- pour $\eta = -2$ on retrouve bien la loi de Rayleigh-Nakagami Inverse.
- pour $L\eta = 1$ on retrouve la loi Gaussienne Généralisée

La fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi de Weibull généralisée s'écrit :

$$\phi_{\mathcal{WG}}(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma\left(L + \frac{s-1}{\eta}\right)}{L^{\frac{s-1}{\eta}} \Gamma(L)} \quad (2.67)$$

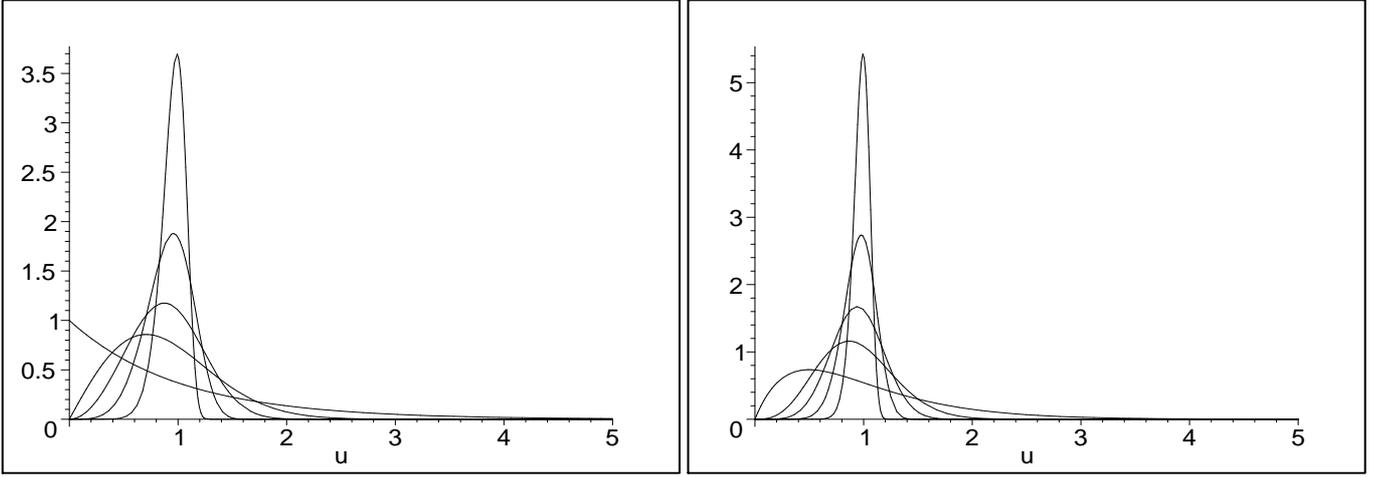


FIG. 2.17 – Loi de Weibull généralisée $\mathcal{WG}[\mu, L, \eta]$ (équation 2.66) avec $\mu = 1$, $\eta = 1, 2, 3, 5$ et 10 . A gauche $L = 1$. A droite $L = 2$.

et on peut montrer que

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \phi_{\mathcal{WG}} &= \mu^{s-1} \quad \forall L \in]0; \infty[\\ \lim_{L \rightarrow \infty} \phi_{\mathcal{WG}} &= \mu^{s-1} \quad \forall \eta \in]0; \infty[\end{aligned}$$

ce qui démontre que la loi de Weibull Généralisée converge vers la loi homothétique tant pour $\eta = \infty$ que pour $L = \infty$, l'autre variable devant rester bornée (le cas $\eta L = 1$ donnant dans tous les cas la loi Gaussienne Généralisée qui converge vers la loi uniforme).

L'expression 2.67 permet de déduire les moments "classiques" d'ordre $r > -\eta L$:

$$m_r = \mu^r \frac{\Gamma\left(L + \frac{r}{\eta}\right)}{L^{\frac{r}{\eta}} \Gamma(L)} \quad (2.68)$$

En particulier, pour $\eta > -\frac{2}{L}$, les deux premiers moments –s'ils existent– s'écrivent :

$$\begin{aligned} m_1 &= \mu \frac{\Gamma\left(L + \frac{1}{\eta}\right)}{L^{\frac{1}{\eta}} \Gamma(L)} \\ m_2 &= \mu^2 \frac{\Gamma\left(L + \frac{2}{\eta}\right)}{L^{\frac{2}{\eta}} \Gamma(L)} \end{aligned}$$

On en déduit alors le coefficient de variation :

$$\gamma = \sqrt{\frac{\Gamma\left(L + \frac{2}{\eta}\right)}{\Gamma\left(L + \frac{1}{\eta}\right)^2} - 1}$$

ainsi que le mode :

$$m_{mode} = \left(\frac{\eta L - 1}{\eta L}\right)^{\frac{1}{\eta}} \mu$$

Les log-cumulants s'écrivent :

$$\tilde{\kappa}_{x(1)} = \log(\mu) + \frac{\Psi(L) - \log(L)}{\eta} \quad (2.69)$$

$$\tilde{\kappa}_{x(2)} = \frac{\Psi(1, L)}{\eta^2} \geq 0 \quad (2.70)$$

$$\tilde{\kappa}_{x(3)} = \frac{\Psi(2, L)}{\eta^3} \leq 0 \quad (2.71)$$

$$\tilde{\kappa}_{x(r)} = \frac{\Psi(r-1, L)}{\eta^r} \leq 0 \quad (2.72)$$

Il est intéressant de noter que la loi de Weibull Généralisée est sa propre loi inverse : cela peut se déduire directement de l'expression du log-cumulant d'ordre r (formule 2.72) : changer le signe de η revient à changer le signe du log-cumulant si r est impair, ce qui est une des techniques permettant de caractériser une loi inverse.

2.3.2 La loi \mathcal{K}

Partant de deux lois Gamma $\mathcal{G}[\mu, L]$ et $\mathcal{G}[1, M]$, calculons leur convolution de Mellin :

$$\mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{G}[1, M]. \quad (2.73)$$

La fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit alors directement comme le produit de deux fonctions caractéristiques de deuxième espèce de lois Gamma Généralisée⁴ :

$$\phi_{\mathcal{K}}(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+s-1)}{M^{s-1} \Gamma(M)} \quad (2.74)$$

Par transformation de Mellin inverse (résultat que l'on trouve dans les tables de transformée de Mellin inverse [57, 12, 13]), on peut alors exprimer la formulation de cette loi :

$$\mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{G}[1, M] = \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{2LM}{\mu} \left(\frac{LMu}{\mu} \right)^{\frac{M+L}{2}-1} K_{M-L} \left[2 \left(\frac{LMu}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (2.75)$$

avec K fonction de Bessel modifiée de seconde espèce. La convolution de Mellin de la relation 2.73 s'identifie donc à la loi $\mathcal{K}[\mu, L, M]$, caractérisée par les 3 paramètres μ, L, M . On a donc la relation fondamentale :

$$\mathcal{K}[\mu, L, M] = \mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{G}[1, M]. \quad (2.76)$$

Notons que, dans le cas $L = M = 1$, cette expression utilisant explicitement la convolution de Mellin avait été proposée par Epstein en 1948 [20].

A partir de l'équation 2.76, connaissant la limite des lois Gamma (relation 2.22) :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{G}[\mu, L] = \mathcal{H}[\mu].$$

et en utilisant les propriétés aux limites de la transformée de Mellin (relation 1.7), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{K}[\mu, L, M] &= \mathcal{H}[\mu] \hat{\star} \mathcal{G}[1, M] = \mathcal{G}[\mu, M] \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{K}[\mu, L, M] &= \mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{H}[1] = \mathcal{G}[\mu, L] \end{aligned}$$

c'est à dire que la loi \mathcal{K} converge vers une loi Gamma Généralisée.

L'expression 2.74 directement les moments de la loi \mathcal{K} pour $r > -\inf(L, M)$:

$$m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L+r)}{L^r \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+r)}{M^r \Gamma(M)}$$

et en particulier, les trois premiers moments s'expriment comme :

$$\begin{cases} m_1 = & \mu \\ m_2 = & \frac{L+1}{L} \frac{M+1}{M} \mu^2 \\ m_3 = & \frac{(L+1)(L+2)}{L^2} \frac{(M+1)(M+2)}{M^2} \mu^3 \end{cases}$$

On en déduit le coefficient de variation :

$$\gamma = \sqrt{\frac{L+M+1}{LM}}$$

Le mode n'a pas d'expression analytique explicite.

⁴Blacknell [6] obtient cette expression en passant en échelle logarithmique et en utilisant la transformée de Laplace

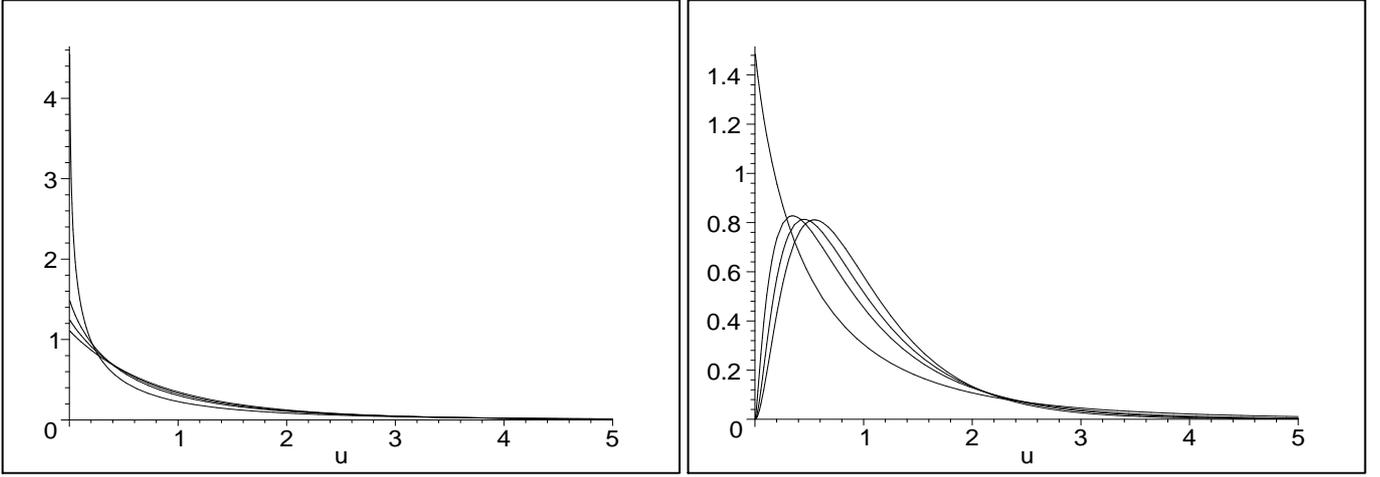


FIG. 2.18 – Loi $\mathcal{K}[\mu, L, M]$ (équation 2.75) : $\mu = 1$ et $M = 1, 3, 5$ et 10 . A gauche $L = 1$. A droite $L = 3$.

Les trois premiers log-cumulants s'expriment grâce à l'additivité des log-cumulants :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_1 &= \log(\mu) + (\Psi(L) - \log(L)) + (\Psi(M) - \log(M)) \\ \tilde{\kappa}_2 &= \Psi(1, L) + \Psi(1, M), \\ \tilde{\kappa}_3 &= \Psi(2, L) + \Psi(2, M),\end{aligned}\tag{2.77}$$

et on montre aussi que pour tout $r > 1$:

$$\tilde{\kappa}_{x(r)} = \Psi(r-1, L) + \Psi(r-1, M).\tag{2.78}$$

Enfin la moyenne de deuxième espèce :

$$\tilde{m} = \mu \frac{e^{\Psi(L)}}{L} \frac{e^{\Psi(M)}}{M}.\tag{2.79}$$

A partir de la relation 2.76, des propriétés de commutativité la convolution de Mellin ainsi que de la relation 2.27, il est évident de montrer que :

$$\mathcal{K}[\mu, L, M] = \mathcal{K}[\mu, M, L].$$

Enfin, il faut souligner que la loi \mathcal{K} n'appartient pas au système de Pearson. De plus la valeur de son mode ne peut s'obtenir par une expression explicite. Il est cependant intéressant de noter que pour une valeur de L donnée, et pour $M \in]0; \infty]$, le mode est compris entre 0 et $\frac{L-1}{L}\mu$.

2.3.3 La loi \mathcal{KI}

En partant cette fois de deux lois Gamma inverses : $\mathcal{GI}[\mu, L]$ et $\mathcal{GI}[1, M]$, calculons leur convolution de Mellin :

$$\mathcal{GI}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, M].\tag{2.80}$$

C'est bien évidemment la loi inverse de la loi \mathcal{K} , ce qui permet d'en écrire directement la forme analytique connaissant l'expression de la loi \mathcal{K} (équation 2.75) et la propriété 1.11 :

$$\mathcal{KI}(u) = \frac{1}{\Gamma(L+1)\Gamma(M+1)} \frac{2}{\mu} \left(\frac{LM\mu}{u}\right)^{\frac{M+L}{2}+1} K_{M-L} \left[2 \left(\frac{LM\mu}{u}\right)^{\frac{1}{2}} \right]\tag{2.81}$$

On a donc la relation fondamentale :

$$\mathcal{KI}[\mu, L, M] = \mathcal{GI}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, M].\tag{2.82}$$

Sa fonction caractéristique de deuxième espèce est donc le produit de deux fonctions caractéristiques de deuxième espèce de lois Gamma Inverse :

$$\phi_{\mathcal{KI}}(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+1-s)}{L^{1-s}\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s}\Gamma(M)}\tag{2.83}$$

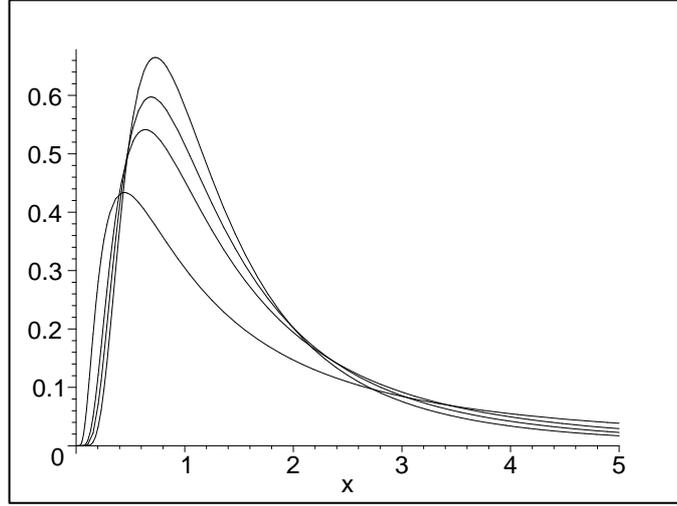


FIG. 2.19 – Loi $\mathcal{KI}[\mu, L, M]$ (équation 2.81) : $\mu = 1$, $L = 3$ et $M = 1, 3, 5$ et 10 .

A partir de l'équation 2.82, connaissant la limite des lois Gamma Généralisées Inverse (relation 2.48) :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{GI}[\mu, L] = \mathcal{H}[\mu]$$

et en utilisant les propriétés aux limites de la transformée de Mellin (relation 1.7), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{KI}[\mu, L, M] &= \mathcal{H}[\mu] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, M] = \mathcal{GI}[\mu, M] \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{KI}[\mu, L, M] &= \mathcal{GI}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{H}[1] = \mathcal{GI}[\mu, L] \end{aligned}$$

c'est à dire que la loi \mathcal{KI} converge vers une loi Gamma Généralisée Inverse.

La relation 2.83 permet d'écrire les moments d'ordre r avec $r < \inf(L, M)$:

$$m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L-r)}{L^{-r} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M-r)}{M^{-r} \Gamma(M)} \quad (2.84)$$

En particulier, les trois premiers moments s'expriment comme :

$$\begin{cases} m_1 = & \frac{L}{L-1} \frac{M}{M-1} \mu \\ m_2 = & \frac{L^2}{(L-1)(L-2)} \frac{M^2}{(M-1)(M-2)} \mu^2 \\ m_3 = & \frac{L^3}{(L-1)(L-2)(L-3)} \frac{M^3}{(M-1)(M-2)(M-3)} \mu^3 \end{cases}$$

Les trois premiers log-cumulants s'expriment facilement, soit grâce à l'additivité des log-cumulants (on somme les log-cumulants des lois Gamma Inverse sous jacente), soit par les propriétés des lois inverses, connaissant les log-cumulants de la loi \mathcal{K} :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_1 &= \log(\mu) - (\Psi(L) + \log(L) + \Psi(M) - \log(M)) \\ \tilde{\kappa}_2 &= \Psi(1, L) + \Psi(1, M), \\ \tilde{\kappa}_3 &= -(\Psi(2, L) + \Psi(2, M)), \end{aligned} \quad (2.85)$$

et on montre aussi que pour tout $r > 1$:

$$\tilde{\kappa}_{x(r)} = (-1)^r (\Psi(r-1, L) + \Psi(r-1, M)). \quad (2.86)$$

2.3.4 Loi de Fisher (loi Beta de seconde espèce ou loi Pearson type VI)

Considérons toujours deux lois Gamma : $\mathcal{G}[\mu, L]$ et $\mathcal{G}[1, M]$ mais cette fois ci en utilisant la corrélation de Mellin :

$$\mathcal{G}[\mu, L] \hat{\otimes} \mathcal{G}[1, M]. \quad (2.87)$$

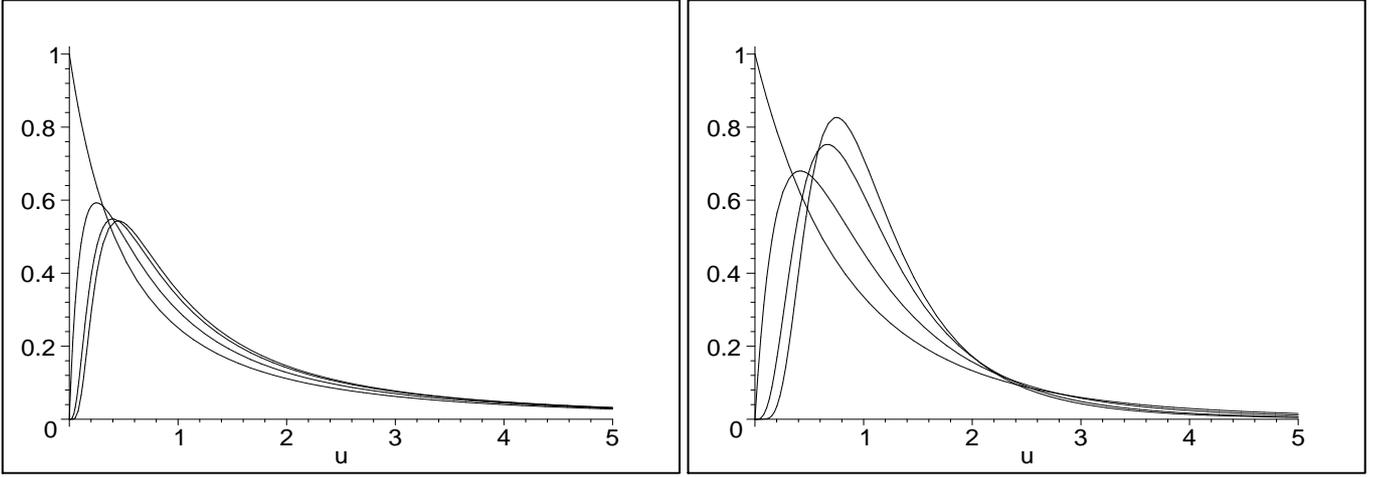


FIG. 2.20 – Loi de Fisher $\mathcal{F}[\mu, L, M]$ (Pearson type VI) (équation 2.90) avec $\mu = 1$, $L = 1, 2, 5, 10$ et $M = 1$ (à gauche) ou $M = 5$ (à droite). L’effet “queue lourde” est plus marqué à gauche ($M = 1$) qu’à droite ($M = 5$).

ce qui est équivalent à utiliser la loi Gamma inverse $\mathcal{GI}[1, M]$ et étudier

$$\mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, M]. \quad (2.88)$$

La fonction caractéristique de deuxième espèce s’écrit alors directement :

$$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s} \Gamma(M)} \quad (2.89)$$

Par transformation de Mellin inverse (résultat que l’on trouve dans les tables de transformée de Mellin inverse [57, 12, 13]), on obtient directement :

$$\mathcal{G}[\mu, L](u) \hat{\star} \mathcal{GI}[1, M] = \frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{\left(\frac{Lu}{M\mu}\right)^{L-1}}{\left(1 + \frac{Lu}{M\mu}\right)^{L+M}} \quad (2.90)$$

Ce résultat est connu sous le nom de loi de Fisher (ou loi Beta de deuxième espèce), caractérisée par 3 paramètres : $\mathcal{F}[\mu, L, M]$. Il est aussi connu comme la solution de type VI du système de Pearson : $P_{P_{VI}}[\mu, L, M]$. On a donc montré le résultat suivant :

$$\mathcal{F}[\mu, L, M] = P_{P_{VI}}[\mu, L, M] = \mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, M]. \quad (2.91)$$

La loi de Fisher vérifie le système de Pearson (voir annexe C) puisque :

$$\frac{1}{\mathcal{F}[\mu, L, M](u)} \frac{d\mathcal{F}[\mu, L, M](u)}{du} = -\frac{-\frac{\mu(L-1)M}{L(M+1)} + u}{\frac{\mu M}{L(M+1)}u + \frac{1}{M+1}u^2} \quad (2.92)$$

A partir de l’équation 2.91, connaissant la limite des lois Gamma Généralisées (relation 2.22) et Gamma Généralisées Inverse (relation 2.48) :

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{G}[\mu, L] &= \mathcal{H}[\mu] \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{GI}[\mu, M] &= \mathcal{H}[\mu] \end{aligned}$$

et en utilisant les propriétés aux limites de la transformée de Mellin (relation 1.7), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{F}[\mu, L, M] &= \mathcal{H}[\mu] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, M] = \mathcal{GI}[\mu, M] \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{F}[\mu, L, M] &= \mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{H}[1] = \mathcal{G}[\mu, L] \end{aligned}$$

c'est à dire que la loi de Fisher converge soit vers une loi Gamma Généralisée, soit vers une loi Gamma Généralisée Inverse.

Ce résultat peut paraître surprenant puisque la loi de Fisher s'exprime comme une fraction rationnelle et qu'elle a alors comme limite une exponentielle. En fait, on peut montrer que :

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(L+M)}{M \Gamma(M)} \frac{1}{\left(1 + \frac{Lu}{M\mu}\right)^{L+M}} = e^{-\frac{Lu}{\mu}}$$

relation étroitement liée aux propriétés de la fonction Gamma (pour démontrer cette relation, McDonald [47] utilise la formule de Stirling, voir annexe A).

L'expression 2.89 donne directement les moments de la loi de Fisher pour $-L < r < M$:

$$m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L+r)}{L^r \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M-r)}{M^{-r} \Gamma(M)} \quad (2.93)$$

avec, en particulier les moments d'ordre 1 et 2 :

$$\begin{cases} m_1 &= \frac{M-1}{M} \mu \\ m_2 &= \frac{L+1}{L} \frac{M^2}{(M-1)(M-2)} \mu^2 \end{cases}$$

On en déduit le coefficient de variation :

$$\gamma = \sqrt{\frac{L+M+1}{L(M-2)}}$$

Son mode (que l'on obtient directement à partir de la relation 2.92) s'exprime comme :

$$m_{mode} = \frac{(L-1)M}{L(M+1)} \mu$$

Les log-cumulants s'expriment très simplement à partir des log-cumulants des lois Gamma et Gamma Inverse, et grâce à l'additivité des log-cumulants dans le cas d'une convolution de Mellin :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_{x(1)} &= \log(\mu) + (\Psi(L) - \log(L)) - (\Psi(M) - \log(M)) \\ \tilde{\kappa}_{x(2)} &= \Psi(1, L) + \Psi(1, M) \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$\tilde{\kappa}_{x(2)} = \Psi(2, L) - \Psi(2, M), \quad (2.95)$$

et on montre aussi que pour tout $r > 1$:

$$\tilde{\kappa}_{x(r)} = \Psi(r-1, L) + (-1)^r \Psi(r-1, M). \quad (2.96)$$

Interprétation de la loi de Fisher

De manière très intuitive, on voit que la loi de Fisher est dotée de deux comportements opposés : celui de la loi Gamma (loi "à tête lourde") et celui de la loi Gamma inverse (loi à queue lourde). Le comportement "tête lourde" est piloté par le paramètre L , et le comportement "queue lourde" est piloté par le paramètre M . Dans les deux cas, faire tendre un paramètre vers l'infini fait perdre toute tendance au comportement lié au paramètre en question.

Aussi, la loi de Fisher peut se voir comme une loi hybride pouvant s'adapter aussi bien à un comportement "classique" (celui de la loi Gamma) qu'à un comportement de type queue lourde : pragmatiquement, les deux paramètres L et M permettent cette adaptation. Nous verrons ultérieurement que son utilisation expérimentale sur des images RSO permet une meilleure segmentation de ce type d'image, en particulier sur le milieu urbain.

Loi de Fisher Inverse

Une définition de la loi de Fisher Inverse $\mathcal{FI}[\mu, L, M]$ se fonde sur la relation liant les fonctions caractéristiques de deuxième espèce des lois directe et inverse (relation 1.46) :

$$\phi_I(s) = \phi(2-s) \Leftrightarrow \phi(s) = \phi_I(2-s).$$

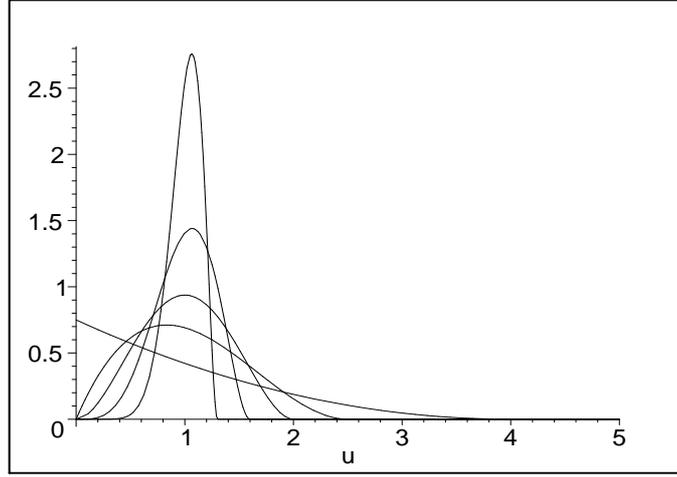


FIG. 2.21 – Loi Beta de première espèce (Pearson type I) $P_{P_I}[\mu, L, M]$ (équation 2.100) avec $\mu = 1$, $L = 1, 2, 3, 5, 10$ et $M = L + 3$

Appliquée à 2.89, on obtient :

$$\mu^{1-s} \frac{\Gamma(L+1-s)}{L^{1-s} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+s-1)}{M^{s-1} \Gamma(M)}.$$

On obtient alors à nouveau une loi de Fisher :

$$\mathcal{FI}[\mu, L, M](u) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{\mu}, M, L\right](u),$$

ce qui revient principalement à permuter les paramètres L et M . Il n'y a donc pas formellement de différence entre loi directe et loi inverse dans le cas de la distribution de Fisher.

2.3.5 Loi Beta (loi Beta de première espèce ou loi Pearson type I)

Considérons toujours deux lois Gamma : $\mathcal{G}[\mu, L]$ et $\mathcal{G}[1, M]$ mais cette fois ci en utilisant la convolution inverse de Mellin :

$$\mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star}^{-1} \mathcal{G}[1, M]. \quad (2.97)$$

La fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit alors directement :

$$\phi_x(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \frac{M^{s-1} \Gamma(M)}{\Gamma(M+s-1)}. \quad (2.98)$$

Nous verrons que cette loi n'existe que pour $M > L$.

Par transformation de Mellin inverse (résultat que l'on trouve dans les tables de transformée de Mellin inverse [57, 12, 13]), et sous l'hypothèse $M > L$, on voit que :

$$\mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star}^{-1} \mathcal{G}[1, M] = \frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \left(\frac{Lu}{M\mu}\right)^{L-1} \left(1 - \frac{Lu}{M\mu}\right)^{M-L-1} \quad u \in \left[0; \frac{M\mu}{L}\right] \quad (2.99)$$

Ce résultat est en fait une loi Beta (de première espèce)⁵, caractérisée par 3 paramètres μ, L, M , connue aussi comme solution de type I du système de Pearson : $P_{P_I}[\mu, L, M]$. On a donc retrouvé le résultat suivant :

$$P_{P_I}[\mu, L, M](u) = \mathcal{B}[\mu, L, M](u) = \mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star}^{-1} \mathcal{G}[1, M]. \quad (2.100)$$

Notons que la loi Beta vérifie le système de Pearson (voir annexe C) puisque :

$$\frac{1}{P_{P_I}[\mu, L, M](u)} \frac{dP_{P_I}[\mu, L, M](u)}{du} = -\frac{-\frac{\mu(L-1)M}{L(M-2)} + u}{\frac{\mu M}{L(M-2)}u - \frac{1}{M-2}u^2} \quad (2.101)$$

⁵Dans ce document, on désignera souvent la loi Beta de première espèce simplement sous le nom de loi Beta, tandis que la loi Beta de deuxième espèce sera toujours appelée Loi de Fisher, ce qui exclut toute ambiguïté

A partir de l'équation 2.100, connaissant la limite des lois Gamma Généralisées (relation 2.22) :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{G}[\mu, L] = \mathcal{H}[\mu]$$

et en utilisant les propriétés aux limites de la transformée de Mellin (relation 1.7), on peut écrire (en se rappelant que l'on doit avoir $M > L$) :

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{B}[\mu, L, M] &= \mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{H}[\mu] = \mathcal{G}[\mu, L] \\ \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{B}[\mu, L, M] &= \mathcal{H}[\mu] \end{aligned}$$

c'est à dire que la loi Beta converge soit vers une loi Gamma Généralisée, soit vers une loi homothétique.

L'expression 2.98 fournit directement les moments d'ordre r de la loi Beta pour $r > -\text{Inf}(L, M)$:

$$m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L+r)}{L^r \Gamma(L)} \frac{M^r \Gamma(M)}{\Gamma(M+r)}$$

et en particulier les deux premiers moments

$$\begin{cases} m_1 &= \mu \\ m_2 &= \frac{L+1}{L} \frac{M}{M+1} \mu^2 \end{cases}$$

m_2 doit vérifier la relation 1.19 : $m_2 \geq m_1^2$. Cela revient à imposer $M > L$.

On en déduit le coefficient de variation :

$$\gamma = \sqrt{\frac{M-L}{L(M+1)}}$$

La relation 2.101 permet de déterminer son mode qui s'exprime comme :

$$m_{mode} = \frac{(L-1)M}{L(M-2)} \mu$$

Les deux premiers log-cumulants s'expriment grâce à l'additivité des log-cumulants dans le cas d'une convolution de Mellin :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_{x(1)} &= \log(\mu) + (\Psi(L) - \log(L)) - (\Psi(M) - \log(M)) \\ \tilde{\kappa}_{x(2)} &= \Psi(1, L) - \Psi(1, M) \end{aligned} \tag{2.102}$$

$$\tilde{\kappa}_{x(3)} = \Psi(2, L) - \Psi(2, M) \tag{2.103}$$

Puisque l'on a affaire à une d.d.p., on doit avoir $\tilde{\kappa}_{x(2)} \geq 0$, ce qui implique $M \geq L$.

On montre aussi que pour tout $r > 1$:

$$\tilde{\kappa}_{x(r)} = \Psi(r-1, L) - \Psi(r-1, M). \tag{2.104}$$

Loi Beta Inverse

Une définition de la loi Beta Inverse se fonde sur la relation liant les fonctions caractéristiques de deuxième espèce des lois directe et inverse (relation 1.46) :

$$\phi_I(s) = \phi(2-s) \Leftrightarrow \phi(s) = \phi_I(2-s). \tag{2.105}$$

Appliquée à 2.97, cela revient à étudier la loi

$$\mathcal{GI}[\mu, L] \hat{\star}^{-1} \mathcal{GI}[1, M]$$

Partant de la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi Beta (équation 2.98), et en appliquant la même convention pour μ que dans le cas de la loi Gamma inverse (on souhaite avoir $\frac{x}{\mu}$ sans dimension), on obtient :

$$\phi_x(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+1-s)}{L^{1-s} \Gamma(L)} \frac{M^{1-s} \Gamma(M)}{\Gamma(M+1-s)}. \tag{2.106}$$

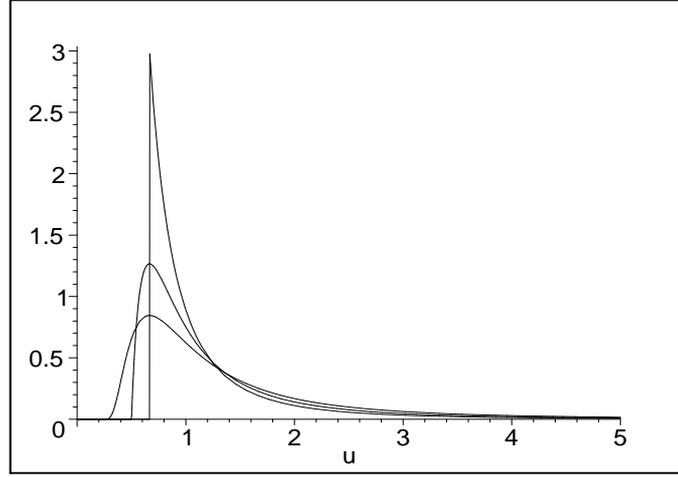


FIG. 2.22 – Loi Beta Inverse (Pearson type I-Inverse) $P_{P_{I, inverse}}[\mu, L, M]$ (équation 2.109) avec $\mu = 1$, $L = 2$ et $M = 3, 4$ et 8

A l'aide des tables de transformées de Mellin inverse [57, 12, 13], on peut alors écrire la formulation suivante pour la loi Beta Inverse :

$$\begin{aligned} \mathcal{BI}[\mu, L, M](u) &= P_{P_{I, inverse}}[\mu, L, M](u) \\ &= \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \frac{M}{L\mu} \frac{\left(\frac{Mu}{L\mu} - 1\right)^{M-L-1}}{\left(\frac{Mu}{L\mu}\right)^M} \quad u \geq \frac{L\mu}{M}, \quad M \geq L. \end{aligned} \quad (2.107)$$

$$= \mathcal{GI}[\mu, L] \hat{\star}^{-1} \mathcal{GI}[1, M] \quad (2.108)$$

Des exemples de cette loi sont donnés figure 2.22.

On peut montrer que cette relation vérifie l'expression définissant les solutions du système de Pearson (voir l'annexe C, équation C.1) :

$$\frac{1}{P_{P_{I, inverse}}(u)} \frac{dP_{P_{I, inverse}}(u)}{du} = -\frac{-\frac{L\mu}{L+1} + u}{-\frac{L\mu}{M(L+1)}u + \frac{1}{L+1}u^2} \quad (2.109)$$

mais que, curieusement, elle n'a jamais été reconnue comme telle : elle n'entre pas exactement dans le moule proposé des expressions classiques des solutions du système de Pearson et n'est jamais citée par les auteurs classiques (comme Johnson [35], ou Kendall [65]). Nous reviendrons plus spécifiquement sur cet aspect dans l'annexe dédiée au système de Pearson (annexe C) sur cette particularité.

Comme précédemment, il est facile de vérifier les propriétés aux limites suivantes (en se rappelant que l'on doit avoir $M > L$) :

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{BI}[\mu, L, M] &= \mathcal{GI}[\mu, L] \\ \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{BI}[\mu, L, M] &= \mathcal{H}[\mu] \end{aligned}$$

c'est à dire que la loi Beta Inverse converge soit vers une loi Gamma Généralisée Inverse, soit vers une loi homothétique.

L'expression 2.105 fournit directement les moments d'ordre r de la loi Beta Inverse pour $r < L$ (rappelons que l'on a $M \geq L$) :

$$m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L-r)}{L^{-r}\Gamma(L)} \frac{M^{-r}\Gamma(M)}{\Gamma(M-r)}$$

et en particulier les deux premiers moments :

$$\begin{cases} m_1 = & \frac{L}{L-1} \frac{M-1}{M} \mu \\ m_2 = & \frac{L^2}{(L-1)(L-2)} \frac{(M-1)(M-2)}{M^2} \mu^2 \end{cases}$$

Puisque que le moment d'ordre r n'existe que pour $r < L$, la loi Beta Inverse est une loi à queue lourde. On en déduit le coefficient de variation :

$$\gamma = \sqrt{\frac{M-L}{(L-1)(M-2)}}$$

Son mode, que l'on déduit directement de la relation 2.109 puisque cette loi appartient au système de Pearson, s'exprime comme :

$$m_{mode} = \frac{L}{L+1} \mu$$

Très curieusement, il ne dépend que de L et de μ : le facteur de forme M n'y joue aucun rôle (on observe effectivement cette propriété sur le cas particulier de la figure 2.22).

Les deux premiers log-cumulants peuvent s'exprimer à partir de l'expression 2.108 et grâce à l'additivité des log-cumulants dans le cas d'une convolution de Mellin :

$$\tilde{\kappa}_{x(1)} = \log(\mu) - (\Psi(L) - \log(L)) + (\Psi(M) - \log(M)) \quad (2.110)$$

$$\tilde{\kappa}_{x(2)} = \Psi(1, L) - \Psi(1, M), \quad (2.111)$$

et on montre aussi que pour tout $r > 1$:

$$\tilde{\kappa}_{x(r)} = (-1)^r (\Psi(r-1, L) - \Psi(r-1, M)).$$

2.3.6 Le cas "Bessel"

Considérons la fonction définie par

$$\mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star}^{-1} \mathcal{GI}[1, M].$$

Sa transformée de Mellin s'écrit :

$$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \frac{M^{1-s} \Gamma(M)}{\Gamma(M+1-s)}$$

et peut s'inverser à partir des tables de transformées de Mellin [12]

$$\frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)} \frac{ML}{\mu} \left(\frac{MLu}{\mu} \right)^{\frac{L-M-1}{2}} J_{L+M-1} \left(2 \sqrt{\frac{MLu}{\mu}} \right) \quad (2.112)$$

avec J_a fonction de Bessel.

les deux premiers moments s'écrivent

$$\begin{cases} m_1 &= \frac{M-1}{M} \mu \\ m_2 &= \frac{L+1}{L} \frac{(M-1)(M-2)}{M^2} \mu^2 \end{cases}$$

m_2 doit vérifier la relation 1.19 : $m_2 \geq m_1^2$. Cela revient à imposer $M > L + 2$. Mais nous verrons que ce n'est qu'une condition nécessaire, et non suffisante, pour démontrer que c'est une loi de probabilité.

Le second moment centré s'écrit :

$$M_2 = \frac{(M-1)(M-L-2)}{L M^2} \mu^2$$

et n'est positif que si $M > L + 2$.

Les cumulants de deuxième espèce se déduisent directement de ceux des lois Gamma et Gamma inverse :

$$\tilde{\kappa}_1 = \log(\mu) + (\Psi(L) - \log(L)) + (\Psi(M) - \log(M))$$

$$\tilde{\kappa}_2 = \Psi(1, L) - \Psi(1, M)$$

$$\tilde{\kappa}_r = \Psi(r-1, L) + (-1)^{r-1} \Psi(r-1, M) \quad \forall r > 1$$

La condition $\tilde{\kappa}_2 \geq 0$ est vérifiée si $M \geq L$, condition moins sévère que celle requise pour le calcul des moments ($M > L + 2$).

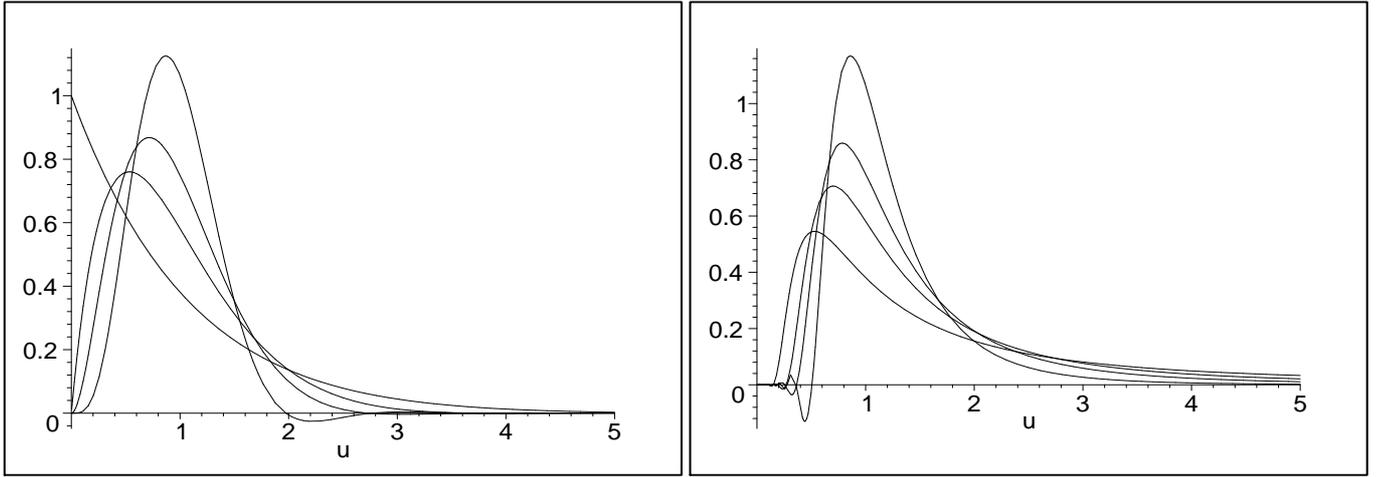


FIG. 2.23 – Le cas “Bessel” : allure de la fonction $\mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star}^{-1} \mathcal{G}[1, M]$ (à gauche, relation 2.112) et de sa loi inverse $\mathcal{G}\mathcal{I}[\mu, L] \hat{\star}^{-1} \mathcal{G}[1, M]$ (à droite, relation 2.113), avec $M = 15$ et $L = 1, 2, 3, 5$.

La moyenne et la moyenne de deuxième espèce s'écrivent :

$$\begin{aligned} \bar{m} &= \mu \frac{M-1}{M} \\ \tilde{m} &= \mu \frac{e^{\Psi(L)}}{L} \frac{e^{\Psi(M)}}{M} \end{aligned}$$

et le moment normalisé d'ordre 2 s'exprime :

$$\tilde{M}_2 = \Psi(1, L) - \Psi(1, M)$$

Bien que vérifiant la condition 1.19, on peut noter que cette fonction n'est pas une distribution de probabilité : en effet, si elle vérifie bien la condition $\int_0^{+\infty} p_x(u) du = 1$, et si M vérifie bien les conditions de positivité resuies par le moment centré d'ordre 2 ou le log cumulant d'ordre 2, elle peut prendre des valeurs négatives, ainsi que l'illustre la figure 2.23 (à gauche).

Le cas

$$\mathcal{G}\mathcal{I}[\mu, L] \hat{\star}^{-1} \mathcal{G}[1, M]$$

correspond à la fonction “inverse” de cette fonction Bessel et son expression se déduit directement de la relation 2.112 :

$$\frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)} \left(\frac{ML\mu}{u} \right)^{\frac{L-M+1}{2}} J_{L+M-1} \left(2\sqrt{\frac{ML\mu}{u}} \right) \quad (2.113)$$

Il présente bien évidemment des problèmes analogues (non positivité de la fonction) comme l'illustre la figure 2.23 (à droite).

2.4 Autres lois utilisées en imagerie RSO (lois à 4 paramètres)

L'introduction en radar de la loi \mathcal{K} s'est fondé d'une part sur le comportement du chatoiemment, se comportant comme un bruit multiplicatif, modélisé par une loi Gamma, et d'autre part sur l'hypothèse d'une texture de la scène sous jacente, modélisée elle aussi de la manière la plus simple possible, *i.e.* par une loi Gamma. Ce modèle ayant quelques limites, certains auteurs ont donc souhaité décrire la texture de la scène sous jacente par une autre loi à deux paramètres, voire par une loi à trois paramètres.

Delignon [16] a donc proposé d'utiliser, comme loi de texture de la scène sous jacente, les solutions du système de Pearson correspondant à des lois définies sur \mathbb{R}^+ , à savoir les distributions de Pearson de type I (ou loi Beta, voir 2.3.5), de type III (ou Loi Gamma, voir 2.2.3), de type V (ou loi Gamma inverse, voir 2.2.3) et de type VI (ou loi de Fisher, voir 2.3.4). En utilisant le formalisme de la convolution de Mellin, et en reprenant les appellations de Delignon, ces lois globales s'écrivent :

$$- P_{P_L}[\mu, M, N] \hat{\star} \mathcal{G}[1, L] = \mathcal{B}[\mu, M, N] \hat{\star} \mathcal{G}[1, L], \text{ appelée loi W (que nous allons voir au paragraphe 2.4.1),}$$

- $P_{P_{II}}[\mu, M] \hat{\star} \mathcal{G}[1, L] = \mathcal{G}[\mu, M] \hat{\star} \mathcal{G}[1, L]$, qui est la loi K (vue en 2.3.2),
- $P_{P_V}[\mu, M] \hat{\star} \mathcal{G}[1, L] = \mathcal{G}\mathcal{I}[\mu, M] \hat{\star} \mathcal{G}[1, L]$, appelée loi B et qui est la loi de Fisher $P_{P_{VI}}$ (vue en 2.3.4),
- $P_{P_{VI}}[\mu, M, N] \hat{\star} \mathcal{G}[1, L] = \mathcal{F}[\mu, M, N] \hat{\star} \mathcal{G}[1, L]$, appelée loi U (que nous allons voir au paragraphe 2.4.2).

C'est le célèbre système KWBU, dont nous allons maintenant analyser les deux premiers cas (les deux autres ayant été traités précédemment), et auquel nous allons ajouter un cinquième cas (baptisé loi Z, et que nous verrons au paragraphe 2.4.3).

Une recherche exhaustive de toutes les lois pouvant être construites selon ce modèle est menée dans l'annexe E : il n'est pas certain que les autres lois ainsi trouvées soient, vu leur complexité, d'une grande utilité en imagerie Radar...

D'autre part, une analyse fondée sur le système de Pearson est proposée en annexe C.4 : elle permet de retrouver par une autre technique calculatoire les résultats présentés dans ce paragraphe.

Bien entendu, la convolution de Mellin par des lois connues (comme la loi Gamma) n'est pas la seule méthode pour augmenter le nombre de paramètres. En particulier, il est toujours possible de "généraliser" une loi en prenant comme variable une certaine puissance de la variable d'origine : cette approche sera abordée ultérieurement au paragraphe 2.6.

2.4.1 Loi W

Posons la relation suivante :

$$\begin{aligned} Q_W &= \mathcal{G}[1, L] \hat{\star} \mathcal{G}[\mu, M] \hat{\star}^{-1} \mathcal{G}[1, N] \quad \text{avec } N \geq M \text{ ou } N \geq L \\ &= \mathcal{G}[1, L] \hat{\star} P_{P_I}[\mu, M, N] \quad \text{si } N \geq M \\ &= \mathcal{G}[1, M] \hat{\star} P_{P_I}[\mu, L, N] \quad \text{si } N \geq L \end{aligned}$$

Il est aisé d'en déduire directement la fonction caractéristique de deuxième espèce :

$$\phi(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+s-1)}{M^{s-1} \Gamma(M)} \frac{N^{s-1} \Gamma(N)}{\Gamma(N+s-1)} \quad (2.114)$$

On trouve dans [57] la relation suivante (relation 5.46) :

$$\mathcal{M}^{-1} \left(\frac{\Gamma(s+1-\alpha) \Gamma(s+\alpha)}{\Gamma(s+\beta)} \right) = e^{-\frac{x}{2}} W_{1-\beta, \alpha-\frac{1}{2}}(x),$$

dans laquelle W est la fonction W de Whittaker (la définition est rappelée en annexe : équation B.2). On peut alors écrire :

$$\mathcal{M}^{-1} \left(\frac{\Gamma(s+1-\alpha+\gamma) \Gamma(s+\alpha+\gamma)}{\Gamma(s+\beta+\gamma)} \right) = x^\gamma e^{-\frac{x}{2}} W_{1-\beta, \alpha-\frac{1}{2}}(x).$$

En identifiant cette relation avec la précédente, on en déduit :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{M+1-L}{2} \\ \beta &= \frac{1-M-L}{2} + N \\ \gamma &= \frac{L+M-3}{2}. \end{aligned}$$

La solution recherchée s'écrit alors :

$$\frac{\Gamma(N)}{\Gamma(M)\Gamma(L)} \frac{LM}{N\mu} \left(\frac{LMu}{N\mu} \right)^{\frac{L+M-3}{2}} e^{-\frac{LMu}{2N\mu}} W_{\frac{1+L+M-2N}{2}, \frac{M-L}{2}} \left(\frac{LMu}{N\mu} \right) \quad (2.115)$$

c'est en fait la solution "W" établie par exemple par Delignon[16]. On a ainsi établi la relation :

$$Q_W[\mu, L, M, N](u) = \mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{G}[1, M] \hat{\star}^{-1} \mathcal{G}[1, N] \quad (2.116)$$

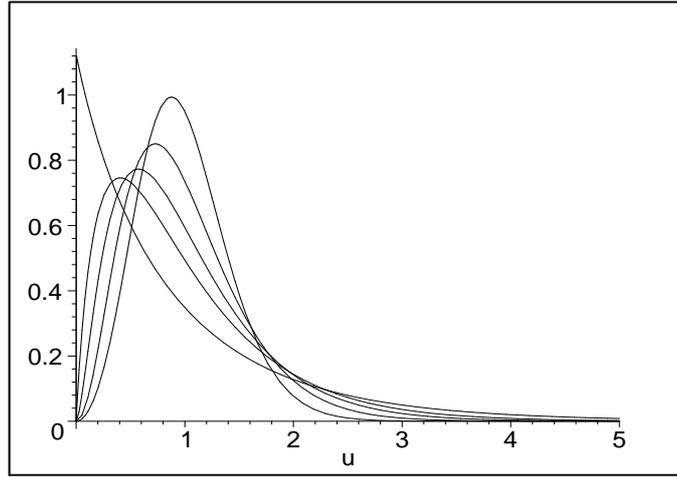


FIG. 2.24 – Loi W (équation 2.115) : avec $\mu = 1$, $L = 3$, $N = 4$ et $M = 1, 2, 3, 5$ et 10 .

De manière évidente, on trouve aisément (soit en utilisant la fonction caractéristique de deuxième espèce 2.114, soit en utilisant l'expression générique 2.116) les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} Q_W[\mu, L, M, N] &= \mathcal{G}[\mu, M] \hat{\star}^{-1} \mathcal{G}[1, N] = \mathcal{B}[\mu, M, N] \\ \lim_{M \rightarrow \infty} Q_W[\mu, L, M, N] &= \mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star}^{-1} \mathcal{G}[1, N] = \mathcal{B}[\mu, L, N] \\ \lim_{N \rightarrow \infty} Q_W[\mu, L, M, N] &= \mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{G}[1, M] = \mathcal{K}[\mu, L, M] \end{aligned}$$

Les moments d'ordre r de cette loi se déduisent de l'expression de sa fonction caractéristique de deuxième espèce (équation 2.114) :

$$m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L+r)}{L^r \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+r)}{M^r \Gamma(M)} \frac{N^r \Gamma(N)}{\Gamma(N+r)}$$

En particulier, les moments d'ordre 1 et 2 s'écrivent :

$$\begin{aligned} m_1 &= \mu \\ m_2 &= \frac{L+1}{L} \frac{M+1}{M} \frac{N}{N+1} \mu^2 \end{aligned}$$

Les cumulants de seconde espèce s'obtiennent directement grâce aux propriétés d'additivité de ce type de cumulants vis à vis de la convolution de Mellin, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_{x(1)} &= \log(\mu) + (\Psi(L) - \log L) + (\Psi(M) - \log M) - (\Psi(N) - \log N) \\ \tilde{\kappa}_{x(2)} &= \Psi(1, L) + \Psi(1, M) - \Psi(1, N) \\ \tilde{\kappa}_{x(3)} &= \Psi(2, L) + \Psi(2, M) - \Psi(2, N) \\ \tilde{\kappa}_{x(r)} &= \Psi(r-1, L) + \Psi(r-1, M) - \Psi(r-1, N) \end{aligned}$$

La moyenne de deuxième espèce et le moment normalisé d'ordre 2 s'écrivent :

$$\begin{aligned} \tilde{m} &= \mu \frac{e^{\Psi(L)}}{L} \frac{e^{\Psi(M)}}{M} \frac{N}{e^{\Psi(N)}} \\ \tilde{M}_2 &= \Psi(1, L) + \Psi(1, M) - \Psi(1, N) \end{aligned}$$

Remarquons qu'en partant de la définition 2.116, on peut permuter M et L sans modifier la forme de Q_W , ce qui permet d'écrire la solution Q_W sous une autre forme analytique :

$$\frac{\Gamma(N)}{\Gamma(M)\Gamma(L)} \frac{LM}{N\mu} \left(\frac{LMu}{N\mu} \right)^{\frac{M+L-3}{2}} e^{-\frac{LMu}{2N\mu}} W_{\frac{1+M+L-2N}{2}, \frac{L-M}{2}} \left(\frac{LMu}{N\mu} \right).$$

Bien entendu, en exploitant de manière efficaces les tables mathématiques (comme celles de Gradshteyn [26]), il aurait été possible de retrouver cette forme analytique à partir des propriétés analytiques des fonction de Whittaker (relation B.3).

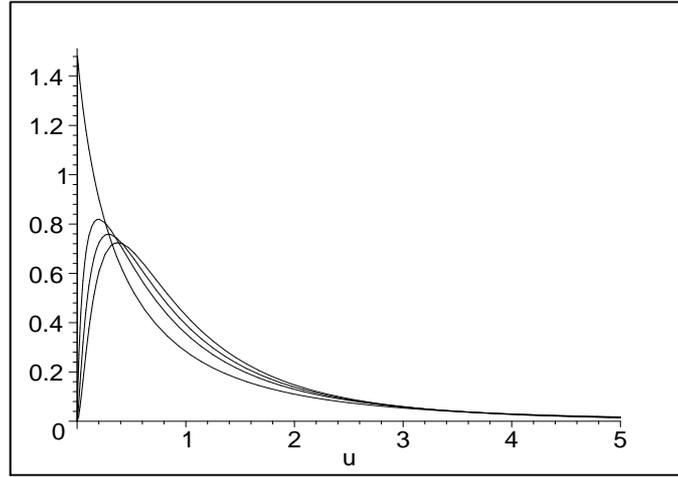


FIG. 2.25 – Loi U (équation 2.118) avec $\mu = 1$, $L = 3$, $N = 4$ et $M = 1, 2, 3, 5$.

2.4.2 Loi U

En partant de l'expression :

$$\begin{aligned} Q_U &= \mathcal{G}[1, L] \hat{\star} P_{P_{VI}}[\mu, M, N] \\ &= \mathcal{G}[1, L] \hat{\star} \mathcal{G}[\mu, M] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, N] \end{aligned}$$

on déduit directement la fonction caractéristique de deuxième espèce de cette nouvelle loi à 4 paramètres :

$$\phi(s) = \mu^{(s-1)} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+s-1)}{M^{s-1} \Gamma(M)} \frac{\Gamma(N+1-s)}{N^{1-s} \Gamma(N)} \quad (2.117)$$

On trouve dans [57] (relation 5.47) :

$$\mathcal{M}^{-1}(\Gamma(s+1-\alpha)\Gamma(s+\alpha)\Gamma(\beta-s)) = \Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(1-\alpha+\beta) e^{\frac{x}{2}} W_{-\beta, \alpha-\frac{1}{2}}(x).$$

Une simple identification, comme dans le cas précédent, permet d'écrire la solution recherchée :

$$\frac{\Gamma(L+N)\Gamma(M+N)}{\Gamma(M)\Gamma(N)\Gamma(L)} \frac{LM}{N\mu} \left(\frac{LMu}{N\mu}\right)^{\frac{L+M-3}{2}} e^{\frac{LMu}{2N\mu}} W_{-1-L-M-2N, \frac{L-M}{2}}\left(\frac{LMu}{N\mu}\right) \quad (2.118)$$

qui est en fait la solution "U" établie par exemple par Delignon[16] (qui utilise un autre formalisme identique fondé sur la fonction hypergéométrique confluyente). On a ainsi démontré :

$$Q_U[\mu, L, M, N](u) = \mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{G}[1, M] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, N] \quad (2.119)$$

De manière évidente, on trouve aisément (soit en utilisant la fonction caractéristique de deuxième espèce 2.117, soit en utilisant l'expression générique 2.119) les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} Q_U[\mu, L, M, N] &= \mathcal{G}[1, M] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, N] = \mathcal{F}[\mu, M, N] \\ \lim_{M \rightarrow \infty} Q_U[\mu, L, M, N] &= \mathcal{G}[1, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, N] = \mathcal{F}[\mu, L, N] \\ \lim_{N \rightarrow \infty} Q_U[\mu, L, M, N] &= \mathcal{G}[1, L] \hat{\star} \mathcal{G}[1, M] = \mathcal{K}[\mu, L, M] \end{aligned}$$

Les moments d'ordre r de cette loi se déduisent de l'expression de sa fonction caractéristique de deuxième espèce (équation 2.117) :

$$m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L+r)}{L^r \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+r)}{M^r \Gamma(M)} \frac{\Gamma(N-r)}{N^{-r} \Gamma(N)}$$

En particulier, les moments d'ordre 1 et 2 s'écrivent :

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{N}{N-1} \mu \\ m_2 &= \frac{L+1}{L} \frac{M+1}{M} \frac{N^2}{(N-1)(N-2)} \mu^2 \end{aligned}$$

Les cumulants de seconde espèce s'obtiennent directement grâce aux propriétés d'additivité de ce type de cumulants vis à vis de la convolution de Mellin, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_{x(1)} &= \log \mu + (\Psi(L) - \log L) + (\Psi(M) - \log M) - (\Psi(N) - \log N) \\ \tilde{\kappa}_{x(2)} &= \Psi(1, L) + \Psi(1, M) + \Psi(1, N) \\ \tilde{\kappa}_{x(3)} &= \Psi(2, L) + \Psi(2, M) - \Psi(2, N) \\ \tilde{\kappa}_{x(r)} &= \Psi(r-1, L) + \Psi(r-1, M) + (-1)^r \Psi(r-1, N)\end{aligned}$$

La moyenne de deuxième espèce et le moment normalisé d'ordre 2 s'écrivent :

$$\begin{aligned}\bar{m} &= \mu \frac{e^{\Psi(L)}}{L} \frac{e^{\Psi(M)}}{M} \frac{N}{e^{\Psi(N)}} \\ \bar{M}_2 &= \Psi(1, L) + \Psi(1, M) + \Psi(1, N)\end{aligned}$$

Remarquons qu'en partant de la définition 2.119, on peut permuter M et L sans modifier la forme de Q_U , ce qui permet d'écrire la solution Q_U sous une autre forme analytique :

$$\frac{\Gamma(M+N)\Gamma(L+N)}{\Gamma(M)\Gamma(N)\Gamma(L)} \frac{ML}{N\mu} \left(\frac{MLu}{N\mu} \right)^{\frac{L+M-3}{2}} e^{\frac{LMu}{2N\mu}} W_{1-\frac{L-M-2N}{2}, \frac{M-L}{2}} \left(\frac{MLu}{N\mu} \right)$$

Bien entendu, il aurait été possible de retrouver cette forme analytique directement à partir des propriétés des fonction de Whittaker (relation B.3).

Des exemples de cette loi sont donnés figure 2.25.

2.4.3 Autre loi à 4 paramètres : la loi Z

Les combinaisons de lois Gamma et Gamma inverse par convolution de Mellin et convolution inverse de Mellin peuvent mener à une dernière loi, appelée ici loi Z. En partant de l'expression :

$$\begin{aligned}Q_Z &= \mathcal{G}[1, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[\mu, M] \hat{\star}^{-1} \mathcal{GI}[1, N] \quad \text{avec } N \geq M \\ &= \mathcal{G}[1, L] \hat{\star} P_{P_{L, inverse}}[\mu, M, N]\end{aligned}$$

on déduit directement la fonction caractéristique de deuxième espèce :

$$\phi(s) = \mu^{(s-1)} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1}\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s}\Gamma(M)} \frac{N^{1-s}\Gamma(N)}{\Gamma(N+1-s)} \quad (2.120)$$

On trouve dans [57] (relation 5.45) :

$$\mathcal{M}^{-1} \left(\frac{\Gamma(s+\alpha)\Gamma(\beta-s)}{\Gamma(\alpha-s)} \right) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(2\alpha)} e^{-\frac{x}{2}} MW_{\beta, \alpha-\frac{1}{2}}(x).$$

avec MW la fonction M de Whittaker (la définition de cette fonction est rappelée en annexe : équation B.1).

Toujours par simple identification, on obtient la loi Q_Z :

$$Q_Z[\mu, L, M, N] = \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L+N)} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{LN}{M\mu} \left(\frac{LNx}{M\mu} \right)^{\frac{L-N-2}{2}} e^{-\frac{LNx}{M\mu}} MW_{\frac{L+2M-N}{2}, \frac{L+N-2}{2}} \left(\frac{LNx}{M\mu} \right) \quad (2.121)$$

qui correspond donc à la construction :

$$Q_Z[\mu, L, M, N] = \mathcal{G}[1, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[\mu, M] \hat{\star}^{-1} \mathcal{GI}[1, N] \quad (2.122)$$

Des exemples de cette loi sont donnés figure 2.26.

De manière évidente, on trouve aisément (soit en utilisant la fonction caractéristique de deuxième espèce 2.120, soit en utilisant l'expression générique 2.122) les limites suivantes :

$$\begin{aligned}\lim_{L \rightarrow \infty} Q_Z[\mu, L, M, N] &= \mathcal{GI}[1, M] \hat{\star}^{-1} \mathcal{GI}[1, N] = \mathcal{BI}[\mu, M, N] \\ \lim_{M \rightarrow \infty} Q_Z[\mu, L, M, N] &= \mathcal{G}[1, L] \hat{\star}^{-1} \mathcal{GI}[1, N] = \mathcal{BI}[\mu, L, N] \\ \lim_{N \rightarrow \infty} Q_Z[\mu, L, M, N] &= \mathcal{G}[1, L] \hat{\star} \mathcal{G}[1, M] = \mathcal{F}[\mu, L, M]\end{aligned}$$

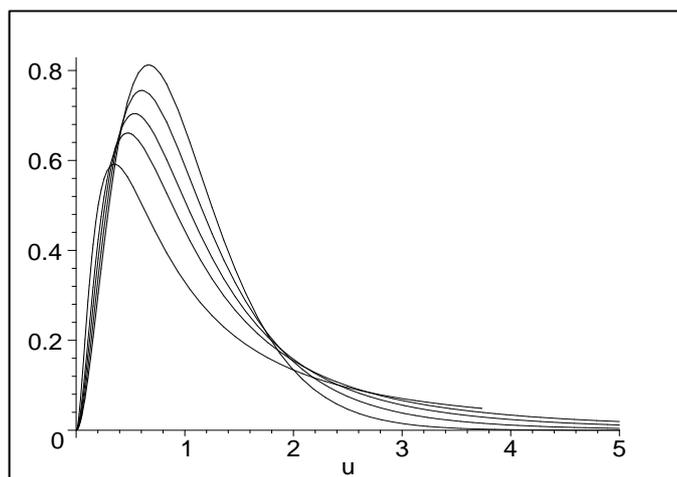


FIG. 2.26 – Loi Z (équation 2.121) avec $\mu = 1$, $N = 10$ et $M = 1, 2, 3, 5$ et 10 ($M \leq N$).

Les moments d'ordre r de cette loi se déduisent de l'expression de sa fonction caractéristique de deuxième espèce (équation 2.120) :

$$m_r = \mu^r \frac{\Gamma(L+r)}{L^r \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M-r)}{M^{-r} \Gamma(M)} \frac{N^{-r} \Gamma(N)}{\Gamma(N-r)}$$

En particulier, les moments d'ordre 1, et 2 s'écrivent :

$$m_1 = \frac{M}{M-1} \frac{N}{N-1} \mu$$

$$m_2 = \frac{L+1}{L} \frac{M^2}{(M-1)(M-2)} \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} \mu^2$$

Les cumulants de seconde espèce s'obtiennent directement grâce aux propriétés d'additivité de ce type de cumulants vis à vis de la convolution de Mellin, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_{x(1)} &= \log \mu + (\Psi(L) - \log L) - (\Psi(M) - \log M) + (\Psi(N) - \log N) \\ \tilde{\kappa}_{x(2)} &= \Psi(1, L) + \Psi(1, M) - \Psi(1, N) \\ \tilde{\kappa}_{x(3)} &= \Psi(2, L) - \Psi(2, M) + \Psi(2, N) \\ \tilde{\kappa}_{x(r)} &= \Psi(r-1, L) + (-1)^r \Psi(r-1, M) - (-1)^r \Psi(r-1, N) \end{aligned}$$

La moyenne de deuxième espèce et le moment normalisé d'ordre 2 s'écrivent :

$$\begin{aligned} \tilde{m} &= \mu \frac{e^{\Psi(L)}}{L} \frac{M}{e^{\Psi(M)}} \frac{e^{\Psi(N)}}{N} \\ \tilde{M}_2 &= \Psi(1, L) + \Psi(1, M) - \Psi(1, N) \end{aligned}$$

2.5 Les lois à queue lourde

2.5.1 Définition et caractérisation

Parmi les différents exemples rencontrés précédemment, certains présentaient la particularité de n'avoir qu'un nombre limité de moments. Par exemple, les moments de la loi Gamma Inverse $\mathcal{GI}(\mu, L)$, donnés par l'expression :

$$m_n = \mu^n \frac{\Gamma(L-n)}{L^{-n}} \Gamma(L)$$

ne sont définis que pour $n < L$, ce qui veut dire que la fonction $\frac{1}{x^{L+1}}$ décroît à l'infini plus vite que la loi Gamma Inverse. Quantitativement, l'influence de la queue de distribution s'avère telle qu'il existe un ordre pour lequel les moments ne sont pas définis : on parlera alors de queue lourde.

En général, une loi inverse f_I , déduite d'une loi f par l'expression 1.11 :

$$f_I = \frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u}\right)$$

a sa fonction caractéristique de deuxième espèce ϕ_I déduite de celle de $f : \phi$ par la relation 1.46

$$\phi_I(s) = \phi(2-s).$$

On voit tout naturellement qu'en général, si l'une de ces lois n'est pas à queue lourde, sa loi inverse est à queue lourde. Mais attention, certaines lois ne vérifient pas cette assertion puisque, par exemple, la loi log-normale a tous ses moments, tant positifs que négatifs : elle n'est ni à queue lourde, ni à tête lourde.

Dans le cas d'un processus à queue lourde, la méthode des moments s'avère rapidement inutilisable, voir inefficace. Aussi certains auteurs ont utilisés les FLOM (Fractionnal Lower Order Moments) pour les valeurs où ces moments existent.

Cependant, il est frappant de remarquer que, même pour une loi à queue lourde, en règle générale, les moments et cumulants de deuxième espèce existent : ceci est la conséquence du théorème d'existence (paragraphe 1.3.6) qui requiert seulement l'existence de la fonction caractéristique de deuxième espèce sur un ouvert $\Omega =]s_a, s_b[$, $s = 1 \in \Omega$. Autrement dit, un processus à queue lourde décroît à l'infini plus vite que l'inverse de n'importe quelle puissance du logarithme.

Notons aussi que le troisième cumulant de deuxième espèce est un indicateur de loi à queue lourde. En effet, il est identique au troisième moment normalisé et s'écrit :

$$\tilde{\kappa}_{x(3)} = \int_0^{+\infty} \left(\log \frac{u}{m}\right)^3 p_x(u) du.$$

Si la queue est lourde, la pondération logarithmique privilégiera les valeurs de la d.d.p. supérieures à la moyenne de deuxième espèce pour lesquelles le cube du logarithme est positif : le cumulant sera alors positif. En revanche, dans le cas contraire, c'est le début de la distribution qui sedra prédominant, et, comme la pondération logarithmique sera alors négative, le cumulant sera négatif.

Notons aussi la relation entre cumulants d'une loi et de sa loi inverse (relation 1.49) :

$$\tilde{\kappa}_{I,x(r)} = (-1)^r \tilde{\kappa}_{x(r)} \quad \forall r \geq 2.$$

Si une loi n'est pas à queue lourde, alors son troisième cumulant de deuxième espèce sera négatif : sa loi inverse sera à queue lourde et son troisième cumulant de deuxième espèce sera positif.

2.5.2 Distributions α -Stables positives

Une distribution α -stable positive est une d.d.p. caractérisée par deux paramètres : α et γ et n'est, en général, définie que par sa fonction caractéristique Φ [59] :

$$\Phi = e^{-\gamma|\nu|^\alpha (1+j \operatorname{sgn}(\nu) \tan(\frac{\alpha\pi}{2}))} \quad (2.123)$$

avec

$$\operatorname{sgn}(\nu) = \begin{cases} 1, & \nu > 0 \\ 0, & \nu = 0, \\ -1, & \nu < 0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1 \quad \gamma > 0.$$

Sauf pour certaines valeurs de α , il n'est pas possible de connaître la forme analytique de ces lois.

On peut néanmoins exprimer les moments d'ordre ν (éventuellement fractionnaires) de ces lois :

$$m_\nu = \frac{\gamma^{\frac{\nu}{\alpha}} \sin(\pi\nu) \Gamma(\nu+1) \left(1 + \left(\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)^2\right)^{\frac{\nu}{2\alpha}}}{\alpha \sin\left(\frac{\pi\nu}{\alpha}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{\alpha}\right)} \quad (2.124)$$

Ces moments ne sont définis que pour $\nu < \alpha < 1$, ce qui veut dire que même le moment d'ordre 1 n'est pas défini : on est en présence d'une loi "à queue lourde".

Par prolongement analytique, il est néanmoins possible d'en déduire la fonction caractéristique de deuxième espèce, qui s'écrit :

$$\phi(s) = \frac{\gamma^{\frac{s-1}{\alpha}} \sin(\pi(s-1)) \Gamma(s) \left(1 + \left(\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)^2\right)^{\frac{s-1}{2\alpha}}}{\alpha \sin\left(\frac{\pi(s-1)}{\alpha}\right) \Gamma\left(1 + \frac{s-1}{\alpha}\right)}$$

On voit qu'elle est définie dans un voisinage complexe autour de la valeur $s = 1$: le théorème d'existence du paragraphe 1.3.6 permet donc d'affirmer que les moments et cumulants de deuxième espèce de tout ordre existent, alors que les moments d'ordre $\nu \geq \alpha$ de cette loi ne sont pas définis.

Bien que la forme analytique soit assez compliquée, il est néanmoins possible d'obtenir des expressions simples des cumulants de deuxième espèce. Notons que ces expressions ne sont que des prolongements analytiques car les fonctions Gamma présentent des discontinuités pour la valeur $s = 1$ requise pour le calcul des cumulants : il est alors nécessaire d'étudier la limite en $s=1$ pour obtenir les expressions analytiques. Les résultats suivants ont été établis sous Maple© :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_1 &= \frac{(1-\alpha)\Psi(1)}{\alpha} + \frac{-\log\left(\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)}{\alpha} + \frac{\log\gamma}{\alpha} \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{(1-\alpha^2)}{\alpha^2}\Psi(1,1) \\ \tilde{\kappa}_3 &= \frac{\alpha^3-1}{\alpha^3}\Psi(2,1)\end{aligned}\tag{2.125}$$

Ces expressions, finalement assez simples, illustrent bien tout l'intérêt de cette nouvelle approche. En effet, les deux paramètres de ces distributions se déduisent aisément puisque :

- grâce au cumulants de deuxième espèce d'ordre 2, on peut estimer le paramètre α :

$$\alpha = \sqrt{\frac{\Psi(1,1)}{\Psi(1,1) - \tilde{\kappa}_2}}$$

- Connaissant α , le premier cumulants permet d'obtenir γ :

$$\gamma = e^{\alpha\tilde{\kappa}_1 - (1-\alpha)\Psi(1) + \log\left(\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)},$$

- on peut aussi déduire γ uniquement de $\tilde{\kappa}_1$ et $\tilde{\kappa}_2$:

$$\gamma = e^{\sqrt{\frac{\Psi(1,1)}{\Psi(1,1) - \tilde{\kappa}_2}}\tilde{\kappa}_1 - \left(1 - \sqrt{\frac{\Psi(1,1)}{\Psi(1,1) - \tilde{\kappa}_2}}\right)\Psi(1) + \log\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\Psi(1,1)}{\Psi(1,1) - \tilde{\kappa}_2}}\right)\right)}.$$

2.5.3 Le modèle de Rayleigh généralisé

Pour illustrer le concept de "queue lourde", analysons la généralisation de la distribution de Rayleigh proposée par Kuruoğlu et Zerubia [38]. S'appuyant sur des résultats récents concernant les distributions α -stable, ces auteurs ont construit une généralisation de la distribution de Rayleigh sous une forme à deux paramètres (α et γ) dont l'expression analytique est donné par l'équation intégrale suivante :

$$p(u) = u \int_0^\infty v e^{-\gamma v^\alpha} J_0(uv) dv\tag{2.126}$$

avec J_0 fonction de Bessel de première espèce.

Pour calculer sa fonction caractéristique de deuxième espèce, deux approches sont possibles :

- La première cherche la transformée de Mellin de cette expression, ce qui conduit au calcul suivant :

$$\begin{aligned}\phi(s) &= \int_0^\infty u^{s-1} p(u) du \\ &= \int_0^\infty u^s \int_0^\infty v e^{-\gamma v^\alpha} J_0(uv) dv du \\ &= \int_0^\infty v e^{-\gamma v^\alpha} \left(\int_0^\infty u^s J_0(uv) du \right) dv \\ &= \int_0^\infty v e^{-\gamma v^\alpha} \left(\frac{1}{v^{s+1}} \int_0^\infty w^s J_0(w) dw \right) dv \quad \text{avec } w = uv \\ &= \int_0^\infty v^{-s} e^{-\gamma v^\alpha} dv \int_0^\infty w^{s-1} (w J_0(w)) dw \\ &= \mathcal{M}\left[e^{-\gamma u^\alpha}\right] (1-s) \mathcal{M}[u J_0(u)](s)\end{aligned}$$

On a donc un produit de fonctions caractéristiques dont on connaît les expressions tabulées. En rappelant que [12]

$$\mathcal{M}[J_0] = \frac{2^{s-1} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)}.$$

on obtient finalement la fonction caractéristique de deuxième espèce de $p(u)$ [54] :

$$\phi(s) = \frac{2^s \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \gamma^{\frac{s-1}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{1-s}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \alpha}$$

– La seconde s’appuie sur la définition de la corrélation de Mellin (paragraphe 1.1.3). En utilisant l’expression 1.10 et la propriété 1.13, l’expression 2.126 s’exprime comme :

$$\begin{aligned} p(u) &= u \left(J_0(u) \hat{\otimes} e^{-\gamma u^\alpha} \right) \\ &= (u J_0(u)) \hat{\otimes} \left(\frac{e^{-\gamma u^\alpha}}{u} \right) \end{aligned}$$

ce qui permet d’en écrire directement la fonction caractéristique :

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \mathcal{M}(u J_0(u))(s) \mathcal{M}\left(\frac{e^{-\gamma u^\alpha}}{u}\right)(2-s) \\ &= \mathcal{M}(J_0(u))(s+1) \mathcal{M}\left(e^{-\gamma u^\alpha}\right)(1-s) \end{aligned}$$

Là aussi, les expressions sont connues et tabulées, et donnent la même expression que dans la première approche.

On peut noter qu’en $s = 1$, la fonction caractéristique de deuxième espèce de cette loi admet comme limite la valeur 1 puisque

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} = \frac{\alpha}{2}$$

C’est donc bien une d.d.p..

Au voisinage de $s = 1$, cette fonction est définie pour $s < 1 + \min(\alpha, 2)$ et pour $s > -1$. Elle est donc bien définie dans un voisinage de $s = 1$ et il est donc légitime de calculer ses moments et cumulants de deuxième espèce.

Cette distribution entre dans la catégorie des lois à “queue lourde” dont les moments ne sont pas définis à partir d’un certain ordre : $\min(\alpha, 2)$.

Notons que

- le cas $\alpha = 2$ donne la loi de Rayleigh puisque

$$\phi(s) = 2^{s-1} \gamma^{\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$$

avec, par identification,

$$\mu = 2 \sqrt{\gamma}.$$

C’est un cas limite puisque nous savons que la loi de Rayleigh possède tous ses moments et n’est absolument pas à queue lourde.

- le cas $\alpha = 1$ donne la loi de Fisher (en amplitude) :

$$p(u) = \frac{\gamma u}{(u^2 + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}}$$

i.e. $\mathcal{F}_A [2\gamma, 1, \frac{1}{2}]$

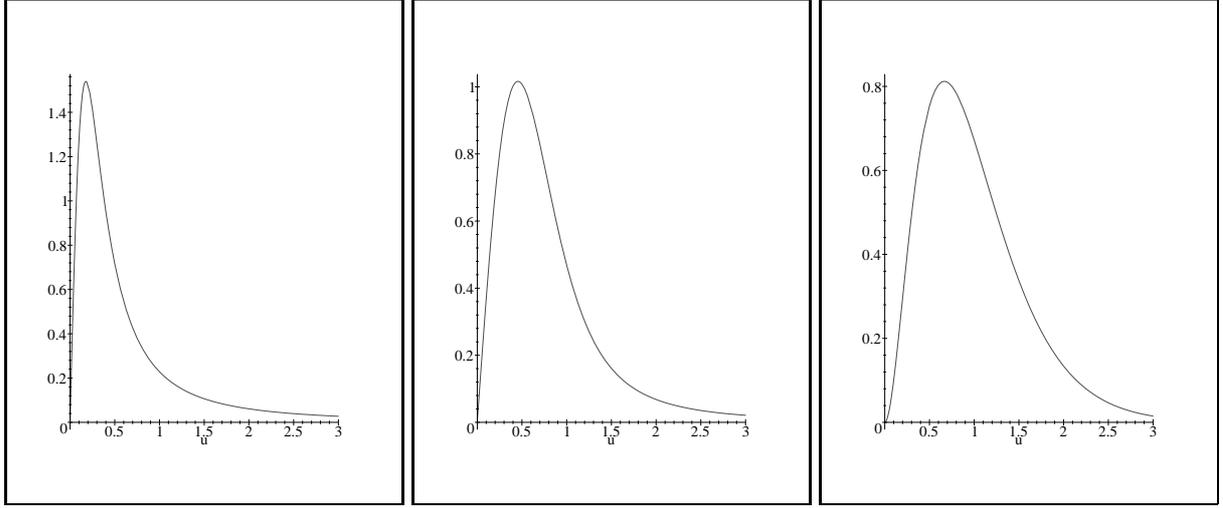
La figure 2.27 illustre cette loi pour $\alpha = 1$ (loi de Fisher), $\alpha = 1.5$ et $\alpha = 2$ (loi de Rayleigh).

Bien que la forme analytique soit assez lourde, il est effectivement possible de calculer les cumulants de deuxième espèce d’ordre 2 et 3 de cette loi de probabilité. Notons que ces valeurs ne sont que des prolongements analytiques car les fonctions Gamma présentent des discontinuités pour la valeur $s = 1$ requise pour le calcul des cumulants. Les résultats ici obtenus ont été établis sous Maple© :

$$\tilde{\kappa}_1 = -\Psi(1) \frac{1-\alpha}{\alpha} + \log\left(2 \gamma^{\frac{1}{\alpha}}\right) \quad (2.127)$$

$$\tilde{\kappa}_2 = \frac{\Psi(1, 1)}{\alpha^2} \quad (2.128)$$

$$\tilde{\kappa}_3 = \frac{\Psi(2, 1) \alpha^3 - 4}{4 \alpha^3} \quad (2.129)$$

FIG. 2.27 – Loi de Rayleigh généralisée [38] : $\alpha = 1$, $\alpha = 1.5$ et $\alpha = 2$.

et on peut démontrer par récurrence que

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_p &= \frac{\Psi(p-1, 1)}{\alpha^p} \quad \text{si } p > 1 \text{ pair} \\ \tilde{\kappa}_p &= \frac{\Psi(p-1, 1)}{2^{p-1}} \frac{\alpha^p - 2^{p-1}}{\alpha^p} \quad \text{si } p > 1 \text{ impair}\end{aligned}\quad (2.130)$$

Le système ainsi obtenu est d'un maniement aisé puisque le second cumulante de deuxième espèce donne α , d'où l'on peut déduire γ à partir du premier.

Même si on ne connaît pas de formulation analytique de cette loi, par le biais des log-cumulants, on peut néanmoins la caractériser pour certaines valeurs de α :

- On vérifie que pour $\alpha = 2$, on retrouve la loi de Rayleigh :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_1 &= \log\left(2\gamma^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{\Psi(1)}{2} \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{\Psi(1, 1)}{4} \\ \tilde{\kappa}_3 &= \frac{\Psi(2, 1)}{8}\end{aligned}$$

- Pour $\alpha = 1$, les log-cumulants 2 et 3 s'écrivent :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_2 &= \Psi(1, 1) \\ \tilde{\kappa}_3 &= -\frac{3}{4}\Psi(2, 1)\end{aligned}$$

En utilisant la formule de duplication des fonctions Polygamma (relation A.14), on peut réécrire ces expressions sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_2 &= \frac{1}{4} \left(\Psi(1, 1) + \Psi\left(1, \frac{1}{2}\right) \right) \\ \tilde{\kappa}_3 &= \frac{1}{8} \left(\Psi(2, 1) - \Psi\left(2, \frac{1}{2}\right) \right)\end{aligned}$$

On reconnaît la formulation (en amplitude) de la convolution de Mellin d'une loi de Nakagami par une loi de Nakagami inverse (*i.e.* une loi de Fisher en amplitude). Par récurrence, on peut étendre la démonstration pour tous les log-cumulants, ce qui permet de retrouver :

$$\mathcal{RN}[\mu, L = 1] \hat{\star} \mathcal{RN}\mathcal{I}\left[1, M = \frac{1}{2}\right]$$

- Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, considérons le log-cumulant d’ordre 2 :

$$\tilde{\kappa}_2 = 4\Psi(1, 1)$$

On peut réécrire cette expression comme :

$$\tilde{\kappa}_2 = \Psi(1, 1) + \frac{1}{4} \left(\Psi \left(1, \frac{1}{4} \right) + \Psi \left(1, \frac{3}{4} \right) \right)$$

Le log-cumulant d’ordre 3 s’écrit :

$$\tilde{\kappa}_3 = -\frac{31}{4} \Psi(1, 1)$$

On peut réécrire cette expression comme :

$$\tilde{\kappa}_3 = -\frac{3}{4} \Psi(2, 1) - \frac{1}{4} \left(\Psi \left(2, \frac{1}{4} \right) + \Psi \left(2, \frac{3}{4} \right) \right)$$

On reconnaît dans le premier terme de ces expressions les log-cumulants du cas $\alpha = 1$, les termes complémentaires correspondant à deux lois de Rayleigh Nakagami Inverse ($L = \frac{1}{4}$ et $L = \frac{3}{4}$) ce qui donne pour formulation analytique de la loi de Rayleigh généralisée l’expression suivante :

$$\mathcal{RN}[\mu, L = 1] \hat{\star} \mathcal{RN}\mathcal{I} \left[1, M = \frac{1}{2} \right] \hat{\star} \mathcal{RN}\mathcal{I} \left[1, M = \frac{3}{4} \right] \hat{\star} \mathcal{RN}\mathcal{I} \left[1, M = \frac{1}{4} \right]$$

ce qui revient à effectuer une convolution de Mellin d’une loi de Fisher (en amplitude) et d’une loi \mathcal{K} inverse (en amplitude).

- Ce raisonnement se généralise et on peut enfin montrer que pour tout $\alpha = \frac{1}{2^p}$ avec p entier, la loi de Rayleigh généralisée peut se concevoir comme des convolutions de Mellin d’une loi de Fisher (en amplitude) et de p lois \mathcal{K} inverse (en amplitude).

Le tableau suivant reprend les 3 cas les plus simples de valeur du paramètre α donnant explicitement ou implicitement la forme de la loi :

$\alpha = 2$	$\mathcal{RN} [2\sqrt{\gamma}, 1]$
$\alpha = 1$	$\mathcal{F}_A [2\gamma, 1, \frac{1}{2}] = \mathcal{RN}[\mu, L = 1] \hat{\star} \mathcal{RN}\mathcal{I} [1, M = \frac{1}{2}]$
$\alpha = \frac{1}{2}$	$\mathcal{RN}[\mu, L = 1] \hat{\star} \mathcal{RN}\mathcal{I} [1, M = \frac{1}{2}] \hat{\star} \mathcal{RN}\mathcal{I} [1, M = \frac{3}{4}] \hat{\star} \mathcal{RN}\mathcal{I} [1, M = \frac{1}{4}]$

2.6 Changement de variable : lois “généralisées”

2.6.1 Lois en intensité, lois en amplitude

Hormis les cas des lois de Rayleigh et de Nakagami, spécifiquement dédiées à des données en amplitude, les densité de probabilité proposées dans ce chapitre sont utilisées en pratique sur des données en intensité (en ce sens que c’est l’intensité du chatoiement qui vérifie une loi Gamma). Une des raisons essentielles en est que la forme analytique de telles lois est plus simple à exprimer ; on peut aussi remarquer que les moments sont aussi en général d’expression beaucoup plus simple.

Analytiquement, ce passage pourrait être un problème en soi, à ceci près que nous avons vu au chapitre 1 que la loi de probabilité d’une variable en amplitude se déduit de la loi de probabilité en intensité selon la relation 1.56

$$p_A(u) = 2u p_I(u^2)$$

et que la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi en amplitude s’exprime de façon simplissime (relation 1.57) :

$$\phi_A(s) = \phi_I \left(\frac{s+1}{2} \right).$$

Il existe ainsi des relations entre les moments pairs de la loi en amplitude et les moments de la loi en intensité (relation 1.58) :

$$m_{A,2n} = m_{I,n}.$$

On pourrait utiliser les méthodes appliquées aux lois en intensité sur les lois en amplitude en n'utilisant que les moments pairs : nous verrons au chapitre 3 que ce choix est lourd de conséquence pour la variance des estimateurs ainsi calculés.

En revanche les log-cumulants sont simplement liés par un facteur multiplicatif (relation 1.59) :

$$\tilde{\kappa}_{p_A, r} = \left(\frac{1}{2}\right)^r \tilde{\kappa}_{p_I, r}.$$

Toutes les méthodes fondées sur les log-cumulants et développées pour les lois en intensité sont donc applicables aux lois en amplitude, à condition simplement de multiplier par le facteur adéquat chaque log-cumulant calculé sur les données en amplitude. Nous verrons que cela n'aura aucune incidence sur la variance des estimateurs.

2.6.2 Lois "généralisées"

Une première définition

Il est tout aussi possible d'imaginer de passer d'une variable u à une puissance quelconque u^β : cette transformation est à la base de la définition de la loi de Weibull et de la gaussienne généralisée. Cependant, la littérature peut être déroutante sur ce point car la taxonomie des distributions mènent à des terminologies parfois contradictoires.

Par exemple, McDonald [47] propose des lois généralisées dès lors que l'on utilise une puissance quelconque de la variable. Il propose ainsi

– la loi Gamma généralisée $f(y; a, \beta, p)$:

$$f(y; a, \beta, p) = \frac{ay^{a\beta-1} e^{-\left(\frac{y}{\beta}\right)^\alpha}}{\beta^{a\beta} \Gamma(p)}$$

– la loi Beta généralisée de première espèce $g(y; a, b, p, q)$:

$$g(y; a, b, p, q) = \frac{ay^{a\beta-1} \left(1 - \left(\frac{y}{b}\right)^\alpha\right)^{q-1}}{\beta^{a\beta} B(p, q)}$$

– la loi Beta généralisée de seconde espèce $h(y; a, b, p, q)$:

$$h(y; a, b, p, q) = \frac{ay^{a\beta-1}}{\beta^{a\beta} B(p, q) \left(1 + \left(\frac{y}{b}\right)^\alpha\right)^{q-1}}$$

appelée parfois distribution de Feller-Pareto ou distribution de Burr XII. avec $B(p, q)$ la fonction d'Euler (voir Annexe A.1.2). Cependant, sa définition de la loi Gamma généralisée (3 paramètres) ne correspond pas à celle généralement admise dans le monde du radar (loi à deux paramètres), mais plutôt à celle de la loi de Weibull généralisée.

A ce titre, il propose donc une subtile différence entre la loi Gamma générale, et la loi Gamma généralisée, ce que l'on trouve parfois chez certains auteurs.

Approche proposée

Néanmoins, on voit qu'il est possible de "généraliser" une loi quelconque par le biais de la transformation G définie au paragraphe 1.5.

En partant des lois à 3 paramètres (de type Beta), on pourra donc introduire

– la loi de Fisher généralisée $\mathcal{FG}[\mu, L, M, \eta]$, définie par 4 paramètres μ, L, M, η :

$$\mathcal{FG}[\mu, L, M, \eta] = \eta \frac{L^{\frac{1}{\eta}} \Gamma(L+M)}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu \Gamma(L) \Gamma(M)} \frac{\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} u}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu}\right)^{\eta L-1}}{\left(1 + \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} u}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu}\right)^\eta\right)^{L+M}}$$

μ étant choisi homogène à u . Par identification, on retrouve l'expression de McDonald avec $a = \eta$,

$$p = L, q = M, b = \frac{M^{\frac{1}{\eta}} \mu}{L^{\frac{1}{\eta}}}$$

Cette loi est effectivement utilisée par C.Valade [66] en compression d'images RSO.

- la loi Beta généralisée $\mathcal{BG}[\mu, L, M, \eta]$, définie par 4 paramètres μ, L, M, η :

$$\mathcal{BG}[\mu, L, M, \eta] = \eta \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L) \Gamma(M-L)} \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} u}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu} \right)^{\eta L - 1} \left(1 - \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} u}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu} \right)^{\eta} \right)^{M-L-1}$$

μ étant choisi homogène à u . Par identification, on retrouve l'expression de McDonald avec $a = \eta$, $p = L$, $q = M - L$, $b = \frac{M^{\frac{1}{\eta}} \mu}{L^{\frac{1}{\eta}}}$.

Remarquons que, chacune de ces deux lois étant sa propre inverse, il n'est pas requis de définir spécifiquement la loi Beta Inverse généralisée.

En appliquant la propriété 1.63, on retrouve alors des relations a priori difficiles à démontrer *ex nihilo* :

$$\begin{aligned} \mathcal{FG}[\mu, L, M, \eta] &= \mathcal{WG}[\mu, L, \eta] \hat{\star} \mathcal{WG}[1, M, -\eta] \\ \mathcal{BG}[\mu, L, M, \eta] &= \mathcal{WG}[\mu, L, \eta] \hat{\star}^{-1} \mathcal{WG}[1, M, \eta] \end{aligned}$$

2.7 Conclusions et Synthèse

2.7.1 Conclusions

A travers ce catalogue de lois, plus ou moins connues et plus ou moins utilisées, il apparaît que les statistiques de deuxième espèce sont un outil puissant. En effet, utiliser des d.d.p. simples et bien connues –comme la distribution homothétique, la loi Gamma et la loi Gamma Inverse– et les combiner par le biais de la convolution de Mellin est dans ce formalisme d'une très grande simplicité puisque cela conduit à multiplier les fonctions caractéristiques de deuxième espèce. Or les tables de transformée de Mellin permettent aisément de trouver alors la forme analytique des d.d.p., même si leurs expressions s'avèrent alors redoutables. Notons que cette approche a en fait été initialisée par Epstein en 1948 pour traiter d'un cas particulier de la loi \mathcal{K} [20].

Ce “Meccano” a eu une conséquence inattendue puisque, utilisé de manière exhaustive, il a permis d'exhiber une loi méconnue, voire inconnue : la loi Beta Inverse (plus précisément la loi Beta de première espèce Inverse). S'il semble difficile de trouver un rôle pratique à cette d.d.p., nous verrons au chapitre 4 qu'elle pose des problèmes conceptuels au sujet d'un diagramme bien connu qui est le diagramme β_1 - β_2 et qu'il n'est alors pas étonnant qu'elle soit ignorée de la quasi totalité des spécialistes, vu les problèmes qu'elle pose.

Utiliser les fonctions caractéristiques de deuxième espèce permet aussi des démonstrations d'une grande simplicité puisque dans le cas des d.d.p. l'application de la transformée de Mellin inverse ne pose aucun problème (les bandes de définition des transformée de Mellin des d.d.p. incluent toujours la valeur $c = 1$, et c'est autour de cette valeur que l'on recherche la transformée de Mellin inverse). De ce fait, il est alors possible de mener des démonstrations extrêmement concises pour des problèmes de convergence dans les passages à la limite des facteurs de forme. En particulier, deux résultats majeurs ont été montrés :

- La loi Gamma Généralisée converge vers la distribution homothétique. On montre aussi aisément que la loi normale converge vers cette même distribution homothétique. Mais puisque, hormis le cas dégénéré $\sigma = 0$, une loi normale a un support sur \mathbb{R} et puisque la loi Gamma Généralisée a un support sur \mathbb{R}^+ , il semble difficile d'affirmer sans précaution que la loi Gamma Généralisée converge vers la loi normale, ce que beaucoup d'auteurs affirment hâtivement. L'introduction de la loi homothétique est alors d'un grand secours pour lever ce problème.
- La loi Gaussienne Généralisée converge vers la loi uniforme. Il est bien entendu possible de faire une démonstration n'utilisant que la forme analytique de ces deux d.d.p.. Cependant, l'utilisation des fonctions caractéristiques de deuxième espèce permet une démonstration simple et concise.

Enfin, puisque les spécialistes d'imagerie RSO sont souvent confrontés au problème du passage des données en amplitude aux données en intensité, rarement simple dans le formalisme classique, l'approche des statistiques de deuxième espèce propose un formalisme dans lequel ce passage ne pose pas de difficultés majeures et devient même “transparent”. Dans le prochain chapitre, nous discuterons de ce point à l'aune de l'estimation des paramètres d'une loi : passer de données en amplitude à des données en intensité requiert l'inversion de systèmes d'équations, toujours différents en statistiques traditionnelles, quasiment identiques en statistiques de deuxième espèce.

2.7.2 Synthèse

Les tableaux qui vont suivre donnent un récapitulatif des principales lois rencontrées dans ce chapitre :

- Le premier rappelle les noms et expressions fondamentales des lois les plus usitées en imagerie RSO.
- Le second donne les expressions analytiques de ces lois. Pour faciliter l'analyse des images RSO, les lois sont données pour des images en intensité (lois fondées sur la loi Gamma généralisée) et des images en amplitude (dédites des précédentes par la relation 1.56).
- le troisième donne les expressions des fonctions caractéristiques de deuxième espèce,
- le dernier donne les moments et log-moments les plus usuels pour ces lois.

Enfin, pour résumer toutes ces lois, nous proposons les organigrammes suivants (inspirés de McDonald [47]) :

- un premier organigramme qui montre les liens existants (convolution de Mellin, passage en puissance de variable, introduction d'un facteur de forme) entre la plupart des lois cités dans ce document (figure 2.28).
- un second organigramme montrant comment passer d'une loi à n paramètres à une loi à $n - 1$ paramètres et comment les paramètres doivent être choisis pour permettre ce passage (figure 2.29).

Lois à un paramètre		
Homothétique	$\mathcal{H}[\mu](u)$	
Uniforme	$\mathcal{U}_1[\mu](u)$	
Gamma	$\mathcal{G}_1[\alpha](u)$	
Lois à deux paramètres		
Gamma Généralisée	$\mathcal{G}[\mu, L](u)$	$\mathcal{G}_1[\alpha = L] \hat{\star} \mathcal{H}\left[\frac{\mu}{L}\right]$
Gamma Inverse	$\mathcal{GI}[\mu, L](u)$	
Weibull	$\mathcal{W}[\mu, \eta](u)$	
Log-normale	$\mathcal{L}[\mu, \sigma]$	
Lois à trois paramètres		
Loi \mathcal{K}	$\mathcal{K}[\mu, L, M]$	$\mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{G}[1, M]$
Loi \mathcal{KI}	$\mathcal{KI}[\mu, L, M]$	$\mathcal{GI}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, M]$
Fisher	$\mathcal{F}[\mu, L, M]$	$\mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, M]$
Beta	$\mathcal{B}[\mu, L, M]$	$\mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star}^{-1} \mathcal{G}[1, M]$
Beta Inverse	$\mathcal{BI}[\mu, L, M]$	$\mathcal{GI}[\mu, L] \hat{\star}^{-1} \mathcal{GI}[1, M]$
Weibull généralisé	$\mathcal{WG}[\mu, L, \eta](u)$	
Lois à quatre paramètres		
loi W		$\mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{G}[1, M] \hat{\star}^{-1} \mathcal{G}[1, N]$
loi U		$\mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{G}[1, M] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, N]$
loi Z		$\mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, M] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, N]$

	lois en intensité	lois en amplitude
Gamma	$\frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{Lu}{\mu}\right)^{L-1} e^{-\frac{Lu}{\mu}}$	$\frac{2}{\mu'} \frac{\sqrt{L}}{\Gamma(L)} \left(\frac{\sqrt{Lu}}{\mu'}\right)^{2L-1} e^{-\left(\frac{\sqrt{Lu}}{\mu'}\right)^2}$
Gamma Inverse	$\frac{1}{\Gamma(L)} \frac{1}{L\mu} \left(\frac{L\mu}{u}\right)^{L+1} e^{-\frac{L\mu}{u}}$	$\frac{1}{\Gamma(L)} \frac{2}{\sqrt{L}\mu} \left(\frac{\sqrt{L\mu'}}{u}\right)^{2L+1} e^{-\left(\frac{\sqrt{L\mu'}}{u}\right)^2}$
Weibull	$\frac{ \eta }{\mu} \left(\frac{u}{\mu}\right)^{\eta-1} e^{-\left(\frac{u}{\mu}\right)^\eta}$	$\frac{ 2\eta }{\mu'} \left(\frac{u}{\mu'}\right)^{2\eta-1} e^{-\left(\frac{u}{\mu'}\right)^{2\eta}}$
Log-normale	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}u} e^{\left(-\frac{(\log u - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$	
Loi \mathcal{K}	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{2LM}{\mu} \left(\frac{LMu}{\mu}\right)^{\frac{M+L}{2}-1} K_{M-L} \left[2\left(\frac{LMu}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{4\sqrt{LM}}{\mu'} \left(\frac{\sqrt{LM}u}{\mu'}\right)^{M+L-1} K_{M-L} \left[2\frac{\sqrt{LM}u}{\mu'}\right]$
Fisher	$\frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{L}{M\mu} \left(\frac{Lu}{M\mu}\right)^{L-1} \left(1+\frac{Lu}{M\mu}\right)^{-L+M}$	$\frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \sqrt{\frac{L}{M}} \frac{2}{\mu'} \frac{\left(\sqrt{\frac{L}{M}} \frac{u}{\mu'}\right)^{2L-1}}{\left(1+\left(\sqrt{\frac{L}{M}} \frac{u}{\mu'}\right)^2\right)^{L+M}}$
Beta	$\frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \frac{L}{M\mu} \left(\frac{Lu}{M\mu}\right)^{L-1} \left(1-\frac{Lu}{M\mu}\right)^{M-L-1}$	$\frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \sqrt{\frac{L}{M}} \frac{2}{\mu'} \left(\sqrt{\frac{L}{M}} \frac{u}{\mu'}\right)^{2L-1} \left(1-\left(\sqrt{\frac{L}{M}} \frac{u}{\mu'}\right)^2\right)^{M-L-1}$
Beta Inverse	$\frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \frac{M}{L\mu} \left(\frac{Mu}{L\mu}\right)^{-M} \left(\frac{Mu}{L\mu} - 1\right)^{M-L-1}$	$\frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \sqrt{\frac{M}{L}} \frac{2}{\mu'} \left(\sqrt{\frac{M}{L}} \frac{u}{\mu'}\right)^{-2M} \left(\left(\sqrt{\frac{M}{L}} \frac{u}{\mu'}\right)^2 - 1\right)^{M-L-1}$
Weibull généralisé	$\frac{ \eta }{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{\Gamma(L)} \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}}u}{\mu}\right)^{\eta L-1} e^{-\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}}u}{\mu}\right)^\eta}$	

Lois à un paramètre	
Homothétique	μ^{s-1}
Loi uniforme	$\frac{\mu^{s-1}}{s}$
Lois à deux paramètres	
Gamma	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)}$
Gamma Inverse	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+1-s)}{L^{1-s} \Gamma(L)}$
Weibull	$\mu^{s-1} \Gamma\left(1 + \frac{s-1}{\eta}\right)$
Log-normale	$e^{\mu(s-1)} e^{\left(\sigma^2 \frac{(s-1)^2}{2}\right)}$
Lois à trois paramètres	
Loi \mathcal{K}	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+s-1)}{M^{s-1} \Gamma(M)}$
Loi \mathcal{K} Inverse	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+1-s)}{L^{1-s} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s} \Gamma(M)}$
Fisher	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s} \Gamma(M)}$
Beta	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \frac{M^{s-1} \Gamma(M)}{\Gamma(M+s-1)}$
Beta Inverse	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+1-s)}{L^{1-s} \Gamma(L)} \frac{M^{1-s} \Gamma(M)}{\Gamma(M+1-s)}$
Weibull généralisé	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma\left(L + \frac{s-1}{\eta}\right)}{L^{\frac{s-1}{\eta}} \Gamma(L)}$
Lois à quatre paramètres	
loi W	$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+s-1)}{M^{s-1} \Gamma(M)} \frac{N^{s-1} \Gamma(N)}{\Gamma(N+s-1)}$
loi U	$\mu^{(s-1)} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+s-1)}{M^{s-1} \Gamma(M)} \frac{\Gamma(N+1-s)}{N^{1-s} \Gamma(N)}$
loi Z	$\mu^{(s-1)} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s} \Gamma(M)} \frac{N^{1-s} \Gamma(N)}{\Gamma(N+1-s)}$

		Moments	Log-moments
Homothétique	$\mathcal{H}[\mu](u)$	$m_1 = \mu$ $m_2 = \mu^2$ $\gamma = 0$ $m_{mode} = \mu$	$\tilde{\kappa}_1 = \log(\mu)$ $\tilde{\kappa}_2 = 0$ $\tilde{\kappa}_3 = 0$
Uniforme	$\mathcal{U}_1[\mu](u)$	$m_1 = \frac{\mu}{2}$ $m_2 = \frac{\mu^2}{3}$ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\tilde{\kappa}_1 = \log(\mu) - 1$ $\tilde{\kappa}_2 = 1$ $\tilde{\kappa}_3 = -2$
Gamma	$\mathcal{G}[\mu, L](u)$	$m_1 = \mu$ $m_2 = \frac{L+1}{L} \mu^2$ $\gamma = \sqrt{\frac{1}{L}}$ $m_{mode} = \frac{L-1}{L} \mu$	$\tilde{\kappa}_1 = \log(\mu) + \Psi(L) - \log(L)$ $\tilde{\kappa}_2 = \Psi(1, L)$ $\tilde{\kappa}_3 = \Psi(2, L)$
Gamma Inverse	$\mathcal{GI}[\mu, L](u)$	$m_1 = \frac{L}{L-1} \mu$ $m_2 = \frac{L^2}{(L-1)(L-2)} \mu^2$ $\gamma = \sqrt{\frac{1}{L-2}}$ $m_{mode} = \frac{L}{L+1} \mu$	$\tilde{\kappa}_1 = \log(\mu) - (\Psi(L) - \log(L))$ $\tilde{\kappa}_2 = \Psi(1, L)$ $\tilde{\kappa}_3 = -\Psi(2, L)$
Weibull	$\mathcal{W}[\mu, \eta](u)$	$m_1 = \Gamma(1 + \frac{1}{\eta}) \mu$ $m_2 = \Gamma(1 + \frac{2}{\eta}) \mu^2$ $\gamma = \sqrt{\frac{\Gamma(1 + \frac{2}{\eta})}{\Gamma(1 + \frac{1}{\eta})^2} - 1}$ $m_{mode} = \left(\frac{\eta-1}{\eta}\right)^{\frac{1}{\eta}} \mu$	$\tilde{\kappa}_1 = \log \mu + \frac{\Psi(1)}{\eta}$ $\tilde{\kappa}_2 = \frac{\Psi(1,1)}{\eta^2}$ $\tilde{\kappa}_3 = \frac{\Psi(2,1)}{\eta^3}$
Log-Normale	$\mathcal{L}[\mu, \sigma]$	$m_1 = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$ $m_2 = \exp\left(2\mu + 2\sigma^2\right)$ $\gamma = \sqrt{\exp(\sigma^2) - 1}$ $m_{mode} = \exp(\mu - \sigma^2)$	$\tilde{\kappa}_1 = \mu$ $\tilde{\kappa}_2 = \sigma^2$ $\tilde{\kappa}_3 = 0$

		Moments	Log-moments
Loi \mathcal{K}	$\mathcal{K}[\mu, L, M]$	$m_1 = \mu$ $m_2 = \frac{L+1}{L} \frac{M+1}{M} \mu^2$ $m_3 = \frac{(L+1)(L+2)}{L^2} \frac{(M+1)(M+2)}{M^2} \mu^3$ $\gamma = \sqrt{\frac{L+M+1}{LM}}$ $m_{mode} : \text{expression implicite}$	$\tilde{\kappa}_1 = \log(\mu) + \Psi(L) - \log(L) + \Psi(M) - \log(M)$ $\tilde{\kappa}_2 = \Psi(1, L) + \Psi(1, M)$ $\tilde{\kappa}_3 = \Psi(2, L) + \Psi(2, M)$
Fisher	$\mathcal{F}[\mu, L, M]$	$m_1 = \frac{M}{M-1} \mu$ $m_2 = \frac{L+1}{L} \frac{M^2}{(M-1)(M-2)} \mu^2$ $m_3 = \frac{(L+1)(L+2)}{L^2} \frac{M^3}{(M-1)(M-2)(M-3)} \mu^3$ $\gamma = \sqrt{\frac{L+M+1}{L(M-2)}}$ $m_{mode} = \frac{(L-1)M}{L(M+1)} \mu$	$\tilde{\kappa}_1 = \log(\mu) + \Psi(L) - \log(L) - (\Psi(M) - \log(M))$ $\tilde{\kappa}_2 = \Psi(1, L) + \Psi(1, M)$ $\tilde{\kappa}_3 = \Psi(2, L) - \Psi(2, M)$
Beta	$\mathcal{B}[\mu, L, M]$	$m_1 = \mu$ $m_2 = \frac{L+1}{L} \frac{M}{M+1} \mu^2$ $m_3 = \frac{(L+1)(L+2)}{L^2} \frac{M^2}{(M+1)(M+2)} \mu^3$ $\gamma = \sqrt{\frac{M-L}{L(M+1)}}$ $m_{mode} = \frac{(L-1)M}{L(M-2)} \mu$	$\tilde{\kappa}_1 = \log(\mu) + \Psi(L) - \log(L) - (\Psi(M) - \log(M))$ $\tilde{\kappa}_2 = \Psi(1, L) - \Psi(1, M)$ $\tilde{\kappa}_3 = \Psi(2, L) - \Psi(2, M)$
Beta Inverse	$\mathcal{BI}[\mu, L, M]$	$m_1 = \frac{L}{L-1} \frac{M-1}{M} \mu$ $m_2 = \frac{L^2}{(L-1)(L-2)} \frac{(M-1)(M-2)}{M^2} \mu^2$ $m_3 = \frac{L^3}{(L-1)(L-2)(L-3)} \frac{(M-1)(M-2)(M-3)}{M^3} \mu^3$ $\gamma = \sqrt{\frac{M-L}{(L-1)(M-2)}}$ $m_{mode} = \frac{L}{L+1} \mu$	$\tilde{\kappa}_1 = \log(\mu) - (\Psi(L) - \log(L)) + (\Psi(M) - \log(M))$ $\tilde{\kappa}_2 = \Psi(1, L) - \Psi(1, M)$ $\tilde{\kappa}_3 = -\Psi(2, L) + \Psi(2, M)$
Weibull généralisée	$\mathcal{WG}[\mu, L, \eta](u)$	$m_1 = \frac{\Gamma(L+\frac{1}{\eta})}{L^{\frac{1}{\eta}} \Gamma(L)} \mu$ $m_2 = \frac{\Gamma(L+\frac{2}{\eta})}{L^{\frac{2}{\eta}} \Gamma(L)} \mu^2$ $m_3 = \frac{\Gamma(L+\frac{3}{\eta})}{L^{\frac{3}{\eta}} \Gamma(L)} \mu^3$ $\gamma = \sqrt{\frac{\Gamma(L+\frac{2}{\eta})}{\Gamma(L+\frac{1}{\eta})^2} - 1}$ $m_{mode} = \left(\frac{\eta L - 1}{\eta L}\right)^{\frac{1}{\eta}} \mu$	$\tilde{\kappa}_1 = \log(\mu) + \frac{\Psi(L) - \log(L)}{\eta}$ $\tilde{\kappa}_2 = \frac{\Psi(1, L)}{\eta^2}$ $\tilde{\kappa}_3 = \frac{\Psi(2, L)}{\eta^3}$

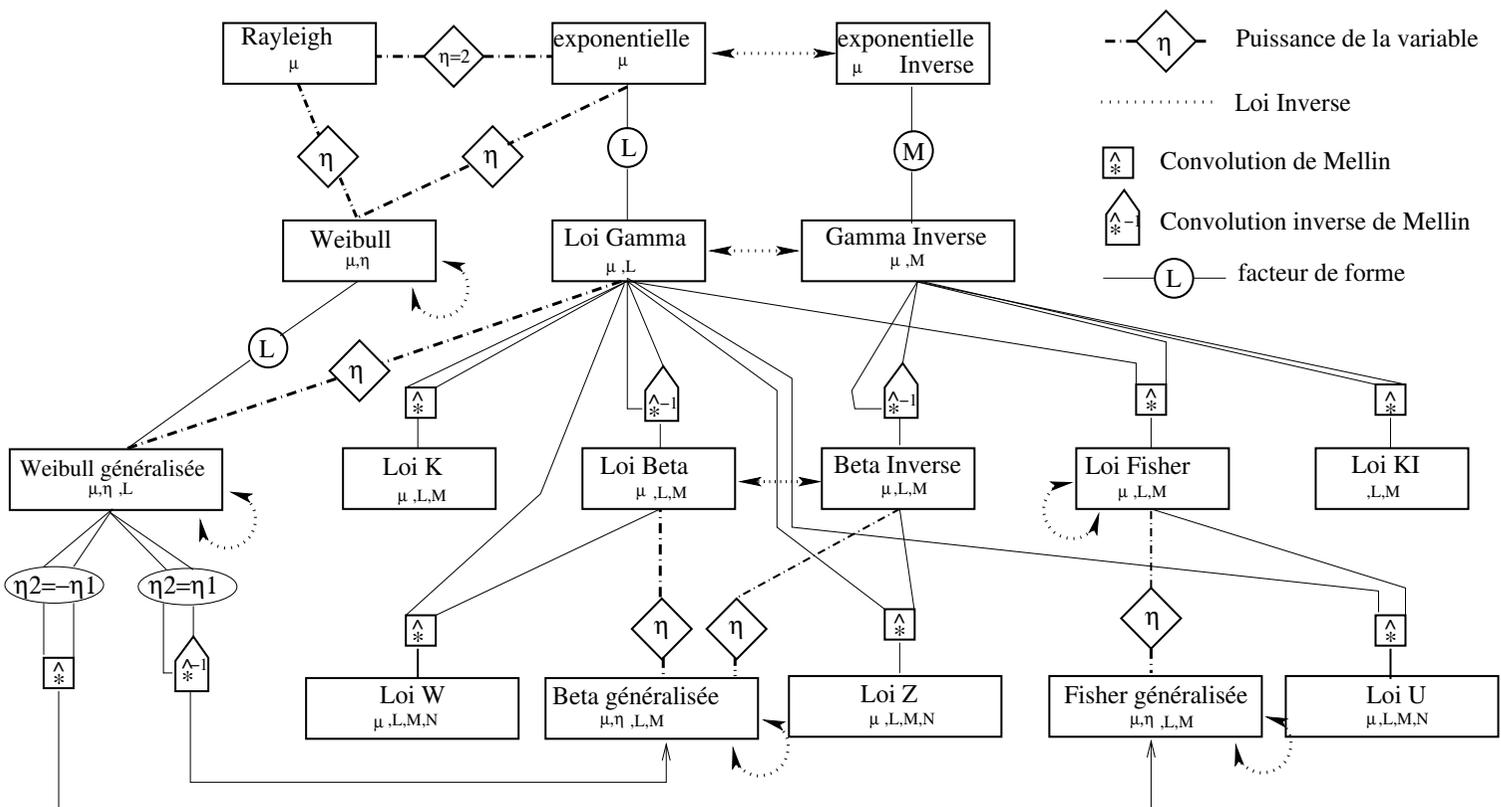


FIG. 2.28 – Organigramme des lois : passage des lois à une variable (première ligne) aux lois à quatre variable (quatrième ligne). Les opérations élémentaires sont la convolution de Mellin, la convolution inverse de Mellin, l'introduction d'un facteur de forme, l'élevation de la variable à une puissance donnée et le passage à la loi inverse.

Chapitre 3

Estimation des paramètres de lois de probabilités définies sur \mathbb{R}^+

Ce chapitre va analyser les diverses méthodes qui peuvent être employées pour estimer les paramètres de densité de probabilité définies sur \mathbb{R}^+ dès lors que l'on dispose d'un certain nombre de valeurs correspondant à des tirages de ces lois de probabilité. Parmi ces méthodes, certaines sont bien connues (MM : Méthode des Moments, MMV : Méthode du Maximum de Vraisemblance), d'autres explorent de nouvelles pistes (MLM : Méthode des Log-Moments, méthode mixte).

Après avoir présenté les différentes démarches possibles ainsi que les outils pouvant être mis en place, les principales densité de probabilité vues au précédent chapitre vont être abordées. Dans le cas des lois effectivement utilisées en imagerie RSO, une attention particulière sera portée à la variance des estimateurs ainsi calculés : en effet, le choix d'une loi sous jacente à une zone sur une image RSO va conduire à l'estimation sur cette zone des paramètres de cette loi. La méthode utilisée devra viser une minimisation de cette variance afin de proposer la meilleure estimée de la loi sous jacente possible qui pourra alors être utilisé pour traiter l'image.

Cependant, si chaque loi conduit à un choix de méthode différent, on peut imaginer que toute estimation mènera à un très grand nombre de calculs, plus ou moins utiles et pertinents, pour permettre la mise en œuvre de plusieurs méthodes d'estimation. Nous verrons qu'une méthode originale émerge : la Méthode des Log Moments (MLM) qui semble suffisamment universelle et efficace pour être proposée dans tous les cas concrets envisageables.

3.1 Bornes de Cramer-Rao et variance d'un estimateur

Le but de ce paragraphe est de rappeler quelques définitions fondamentales et de poser des notations qui seront utilisées tout au long de ce chapitre.

3.1.1 Matrice d'information de Fisher

Soit une d.d.p. $p(u)$ à c paramètres $\{\theta_i, i \in [1, c]\}$. Dans la mesure où l'on peut calculer la matrice A :

$$a_{kj} = \frac{\partial^2 \log(p)}{\partial \theta_k \partial \theta_j}$$

on définit alors la matrice d'information de Fisher $I(\theta)$ comme

$$I_{kj} = -E \{a_{kj}\}$$

La matrice de Fisher joue un grand rôle en théorie de l'estimation, en particulier pour l'estimation des bornes de variances d'un estimateur. Malheureusement, il existe de nombreux cas où son expression ne peut être obtenue analytiquement, en particulier lorsqu'il n'est pas possible de dériver le logarithme de la loi en fonction d'un de ses paramètres.

3.1.2 Méthode du Maximum de Vraisemblance et bornes de Cramer-Rao

Soient N échantillons indépendants x_1, \dots, x_N vérifiant une loi statistique $p(x)$. L'indépendance des échantillons permet alors d'écrire :

$$p(x_1, \dots, x_N) = \prod_{k=1}^N p(x_k)$$

et cette expression représente la vraisemblance. En en prenant le logarithme, on obtient alors une expression additive, la log-vraisemblance :

$$\mathcal{LV} = \log(p(x_1, \dots, x_N)) = \sum_{k=1}^N \log(p(x_k)). \quad (3.1)$$

Si la loi $p(x)$ est décrite par c paramètres $\theta_1, \dots, \theta_c$, le maximum de vraisemblance sera atteint pour des paramètres vérifiant

$$\frac{d \log(p(x_1, \dots, x_N))}{d \theta_j} = \sum_{k=1}^N \frac{d \log p}{d \theta_j} \Big|_{x=x_k} = 0 \quad \forall j \in [1, c]$$

Or dans le cas des lois dites exponentielles, et dans la mesure où cette dérivée existe, on montre que les estimées des paramètres obtenus par la méthode du Maximum de Vraisemblance ont une variance minimale que l'on appellera "bornes de Cramer Rao".

Pour des paramètres indépendants, on montre alors que la matrice d'information de Fisher est diagonale, et les bornes de Cramer Rao sont égales à l'inverse des termes diagonaux.

Notons que si, pour une loi statistique $p(x)$, on définit l'entropie \mathcal{S} comme :

$$\mathcal{S} = - \int p(x) \log p(x) dx$$

on a la relation :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{LV}}{N} = -\mathcal{S}$$

Nous verrons que pour un certain nombre de lois étudiées dans ce document l'entropie s'exprime en fonction des moments et des log-moments.

3.1.3 Calcul de la variance d'un estimateur

Méthode de Kendall et Stuart

Kendall & Stuart [65] : proposent de calculer la variance d'une fonction $g(m_1, m_2)$ en effectuant un développement limité au premier ordre de la fonction $g(m_1, m_2)$ autour des valeurs $m_{0,1}$ et $m_{0,2}$:

$$g(m_1, m_2) = g(m_{0,1}, m_{0,2}) + (m_1 - m_{0,1}) \frac{\partial g}{\partial m_1}(m_{0,1}, m_{0,2}) + (m_2 - m_{0,2}) \frac{\partial g}{\partial m_2}(m_{0,1}, m_{0,2})$$

En ayant vérifié que les $\frac{\partial g}{\partial m_i}$ ne sont pas tous deux nuls en $(m_{0,1}, m_{0,2})$, on établit la variance de g par la formule ([65], formule 10.12)

$$\begin{aligned} \text{var} \{g(m_1, m_2)\} &= E \left\{ [g(m_1, m_2) - g(m_{0,1}, m_{0,2})]^2 \right\} \\ &= E \left\{ \left[(m_1 - m_{0,1}) \frac{\partial g}{\partial m_1}(m_{0,1}, m_{0,2}) + (m_2 - m_{0,2}) \frac{\partial g}{\partial m_2}(m_{0,1}, m_{0,2}) \right]^2 \right\} \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial m_1} \right)^2 (m_{0,1}, m_{0,2}) \text{var} \{m_1\} + \left(\frac{\partial g}{\partial m_2} \right)^2 (m_{0,1}, m_{0,2}) \text{var} \{m_2\} \\ &\quad + 2 \frac{\partial g}{\partial m_1}(m_{0,1}, m_{0,2}) \frac{\partial g}{\partial m_2}(m_{0,1}, m_{0,2}) \text{cov} \{m_1, m_2\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

avec

$$\text{var} \{m_i\} = \frac{1}{N} (m_{2i} - m_i^2) \quad (3.3)$$

$$\text{cov} \{m_i, m_j\} = \frac{1}{N} (m_{i+j} - m_i m_j) \quad (3.4)$$

Cette méthode est bien évidemment généralisable à des moments d'ordre quelconque.

Une adaptation de la Méthode de Kendall et Stuart pour les statistiques de deuxième espèce

En s'inspirant de l'approche de Kendall & Stuart [65], et puisque l'on connaît les log-cumulants en fonction des log-moments, on va chercher à effectuer un développement limité au premier ordre des log-cumulants autour de la valeur théorique. Dans le cas du second log-cumulant, on peut le considérer comme une fonction des deux premiers log-moments $g(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2)$ et le développement limité s'exprime alors autour des valeurs théoriques des deux premiers log-moments $\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2}$ comme :

$$g(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2) = g(\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2}) + (\tilde{m}_1 - \tilde{m}_{0,1}) \frac{\partial g}{\partial \tilde{m}_1}(\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2}) + (\tilde{m}_2 - \tilde{m}_{0,2}) \frac{\partial g}{\partial \tilde{m}_2}(\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2})$$

En ayant vérifié que les $\frac{\partial g}{\partial \tilde{m}_i}$ ne sont pas tous deux nuls en $(\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2})$, on établit la variance de g par la formule formellement identique à la relation 3.2 :

$$\begin{aligned} \text{var} \{g(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2)\} &= E \left\{ [g(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2) - g(\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2})]^2 \right\} \\ &= E \left\{ \left[(\tilde{m}_1 - \tilde{m}_{0,1}) \frac{\partial g}{\partial \tilde{m}_1}(\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2}) + (\tilde{m}_2 - \tilde{m}_{0,2}) \frac{\partial g}{\partial \tilde{m}_2}(\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2}) \right]^2 \right\} \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial \tilde{m}_1} \right)^2 (\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2}) \text{var} \{\tilde{m}_1\} + \left(\frac{\partial g}{\partial \tilde{m}_2} \right)^2 (\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2}) \text{var} \{\tilde{m}_2\} \\ &\quad + 2 \frac{\partial g}{\partial \tilde{m}_1}(\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2}) \frac{\partial g}{\partial \tilde{m}_2}(\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2}) \text{cov} \{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.2 Estimateurs des grandeurs statistiques usuelles

Expérimentalement, on dispose donc d'un jeu de N échantillons et on cherche quelle serait la distribution de probabilité sous jacente qui serait la "mieux" adaptée à ce jeu de données. Ce paragraphe a pour but de rappeler quelques formules plus ou moins usuelles permettant la mise en œuvre de techniques classiques d'estimation de paramètres et qui seront utilisées explicitement sur les lois décrites précédemment aux paragraphes 3.4, 3.5 et 3.6.

3.2.1 Méthode du Maximum de Vraisemblance (MMV)

Nous avons donc vu que, pour une loi de probabilité $p(u)$ décrites par c paramètres $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_c)$, l'estimée du paramètre $\theta_j, j \in [1, c]$ au sens du maximum de vraisemblance doit vérifier la relation :

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} \sum_{i=1}^N \log(p(x_i)) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \log(p(x_i))}{\partial \theta_j} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{p(x_i)} \frac{\partial p(x_i)}{\partial \theta_j} = 0 \quad (3.6)$$

Si ces dérivées existent (et nous verrons malheureusement que ce n'est pas toujours le cas) on obtient ainsi un système de c équations à c inconnues plus ou moins facile à résoudre, tant analytiquement que numériquement.

3.2.2 Méthode des Moments : Moments et Moments centrés (MM)

Connaissant un tirage de N échantillons d'une loi de probabilité P , on peut toujours en déduire les estimées des moments $\hat{m}_1, \hat{m}_2, \dots, \hat{m}_p$ en calculant les expressions :

$$\begin{aligned} \hat{m}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \\ \hat{m}_2 &= \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} \\ \hat{m}_p &= \frac{\sum_{i=1}^N x_i^p}{N} \end{aligned}$$

Il est important de noter que ces estimées sont toujours calculables dans la mesure où les données sont bornées (et elles le sont toujours en pratique).

On peut aussi calculer les estimées des moments centrés par le biais des formules suivantes (cf relations 1.17) :

$$\begin{aligned}\hat{M}_2 &= \hat{m}_2 - \hat{m}_1^2 \\ \hat{M}_3 &= \hat{m}_3 - 3\hat{m}_2\hat{m}_1 + 2\hat{m}_1^3 \\ \hat{M}_4 &= \hat{m}_4 - 4\hat{m}_1\hat{m}_3 + 6\hat{m}_2\hat{m}_1^2 - 3\hat{m}_1^4\end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}\hat{M}_2 &= \frac{\sum_{i=1}^N (x_i)^2}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \right)^2 \\ \hat{M}_3 &= \frac{\sum_{i=1}^N (x_i)^3}{N} - 3 \frac{\left(\sum_{i=1}^N x_i \right) \left(\sum_{i=1}^N (x_i)^2 \right)}{N^2} + 2 \frac{\left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^3}{N^3}\end{aligned}$$

Insistons sur le fait que, en pratique, ces relations peuvent toujours être calculées sur un jeu de données, même si le moment correspondant n'existe pas. Ce cas se rencontre en particulier dans le cadre des lois à queue lourde.

Si la loi sous jacente que l'on cherche à estimer est décrite par c paramètres, il suffit d'estimer c moments d'ordre divers et de remplacer ces valeurs estimées dans les relations liant ces moments aux paramètres de la loi.

3.2.3 Méthode des Moments d'Ordre Inférieurs (MMOI)

Comme dans le cas des moments entiers, l'estimée d'un moment d'ordre inférieur ν , s'il existe, peut s'obtenir à partir du calcul suivant :

$$\hat{m}_\nu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^\nu}{N}.$$

Là aussi, si la loi sous jacente que l'on cherche à estimer est décrite par c paramètres, il suffit d'estimer c log-moments correspondant à divers ordres fractionnaires et de remplacer ces valeurs estimées dans les relations liant ces moments aux paramètres de la loi.

3.2.4 Méthode des Log-Moments et Log-Cumulants (MLM)

Connaissant un tirage de N échantillons d'une loi de probabilité P définie sur \mathbb{R}^+ , On peut en déduire les estimées des log-moments $\hat{m}_1, \hat{m}_2, \hat{m}_p$ en calculant les expressions :

$$\begin{aligned}\hat{m}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^N \log(x_i)}{N} \\ \hat{m}_2 &= \frac{\sum_{i=1}^N \log(x_i)^2}{N} \\ \hat{m}_p &= \frac{\sum_{i=1}^N \log(x_i)^p}{N}\end{aligned}$$

Connaissant ces estimées, on peut alors estimer les log-cumulants par le biais des formules suivantes :

$$\begin{aligned}\hat{\kappa}_2 &= \hat{m}_2 - \hat{m}_1^2 \\ \hat{\kappa}_3 &= \hat{m}_3 - 3\hat{m}_2\hat{m}_1 + 2\hat{m}_1^3 \\ \hat{\kappa}_4 &= \hat{m}_4 - 4\hat{m}_1\hat{m}_3 - 3\hat{m}_2^2 + 12\hat{m}_1^2\hat{m}_2 - 6\hat{m}_1^4\end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire explicitement les expressions des estimées :

$$\begin{aligned}\hat{\kappa}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^N \log x_i}{N} \\ \hat{\kappa}_2 &= \frac{\sum_{i=1}^N (\log x_i)^2}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^N \log x_i}{N} \right)^2 \\ \hat{\kappa}_3 &= \frac{\sum_{i=1}^N (\log x_i)^3}{N} - 3 \frac{\left(\sum_{i=1}^N \log x_i \right) \left(\sum_{i=1}^N (\log x_i)^2 \right)}{N^2} + 2 \frac{\left(\sum_{i=1}^N \log x_i \right)^3}{N^3}\end{aligned}$$

Comme pour la Méthode des Moments, si la loi sous jacente que l'on cherche à estimer des décrite par c paramètres, il suffit d'estimer c log-moments (ou log-cumulants) de divers ordres et de remplacer ces valeurs estimées dans les relations liant ces log-moments (ou log-cumulants) aux paramètres de la loi.

3.2.5 Méthode mixtes : moments mixtes et log-moments mixtes

En partant des relations donnant l'expression des moments mixtes (1.70) et des log-moments mixtes (1.71), on en déduit les estimées de ces valeurs :

$$\begin{aligned}\hat{w}_n &= \frac{\sum_{i=1}^N x_i^n \log(x_i) x_i}{N} \\ \hat{\hat{w}}_n &= \frac{\sum_{i=1}^N x_i \log(x_i)^n}{N}\end{aligned}$$

Là aussi, il suffit d'avoir un système inversible de c relations pour remonter aux c paramètres de la loi sous jacente.

3.3 Variance des estimateurs des grandeurs statistiques usuelles

3.3.1 Méthode des moments : variance des Moments et Moments centrés

Nous avons vu que, dans le cadre des statistiques usuelles, la définition de la variance (formule 3.3) permet d'écrire :

$$\text{var} \{m_i\} = \frac{1}{N} (m_{2i} - m_i^2).$$

On a donc directement par définition la variance des moments :

$$\begin{aligned}\text{var} \{m_2\} &= \frac{1}{N} (m_4 - m_2^2) \\ \text{var} \{m_3\} &= \frac{1}{N} (m_6 - m_3^2) \\ \text{var} \{m_4\} &= \frac{1}{N} (m_8 - m_4^2)\end{aligned}$$

L'application de la formule de Kendall et Stuart (expression 3.2) permet de calculer les variances des moments centrés M_i en utilisant la relation liant le moment centré M_i et les moments $m_k, k \in [1, 2i]$ (équation 1.17). On obtient par exemple :

$$\begin{aligned}\text{var} \{M_2\} &= \frac{1}{N} (8 m_1^2 m_2 - 4 m_1^4 + m_4 - m_2^2 - 4 m_1 m_3) \\ \text{var} \{M_3\} &= \frac{1}{N} (9 m_2^3 - 72 m_2^2 m_1^2 + 108 m_2 m_1^4 - 36 m_1^6 + 21 m_1^2 m_4 + m_6 - m_3^2 \\ &\quad + 30 m_1 m_2 m_3 - 48 m_1^3 m_3 - 6 m_2 m_4 - 6 m_1 m_5) \\ \text{var} \{M_4\} &= \frac{1}{N} (528 m_1^3 m_2 m_3 + m_8 - m_4^2 + 24 m_2 m_1 m_5 - 132 m_2 m_1^2 m_4 + 48 m_1 m_3 m_4 \\ &\quad - 96 m_1 m_2^2 m_3 + 28 m_1^2 m_6 + 156 m_1^4 m_4 + 576 m_2 m_1^6 + 16 m_3^2 m_2 - 112 m_3^2 m_1^2 \\ &\quad - 336 m_1^5 m_3 + 144 m_2^3 m_1^2 - 612 m_2^2 m_1^4 - 144 m_1^8 - 8 m_1 m_7 - 8 m_3 m_5 - 72 m_1^3 m_5)\end{aligned}$$

Si au lieu d'utiliser les moments on utilise les moments centrés, ces relations se simplifient et on obtient par exemple

$$\begin{aligned}\text{var} \{M_2\} &= \frac{1}{N} (M_4 - M_2^2) \\ \text{var} \{M_3\} &= \frac{1}{N} (M_6 - 6M_2 M_4 - M_3^2 + 9M_2^3)\end{aligned}$$

3.3.2 Méthode des moments : variance du coefficient de variation

De la même manière, on peut calculer la variance du coefficient de variation γ :

$$\text{var} \{\gamma\} = \frac{1}{N} \frac{m_1^2 (4m_2^3 - m_2^2 m_1^2 + m_1^2 m_4 - 4m_1 m_2 m_3)}{(-m_2 + m_1^2)^4}$$

Il est curieux de noter que cette expression se réécrit de manière quasi identique si on utilise les moments centrés :

$$\text{var} \{\gamma\} = \frac{1}{N} \frac{m_1^2 (4m_2^3 - m_2^2 M_1^2 + m_1^2 M_4 - 4M_1 M_2 M_3)}{M_2^4}$$

3.3.3 Méthode des moments : variance des coefficients β_1 et β_2

Les expressions des variances des coefficients β_1 et β_2 (asymétrie et aplatissement, définis par les relations 1.21 et 1.22, peuvent s'obtenir sans problème majeur, si ce n'est celui de les écrire ;

$$\begin{aligned} \text{var} \{\beta_1\} &= \frac{1}{N} \frac{-(m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3)^2}{(m_2 - m_1^2)^8} \\ &\quad (24m_1^3 m_3 m_4 + 24m_2^3 m_4 - 12m_3 m_5 m_1^2 - 12m_2^2 m_1 m_5 + 12m_2 m_1^3 m_5 + 12m_3 m_5 m_2 \\ &\quad + 36m_1 m_3^3 - 4m_6 m_2^2 - 4m_6 m_1^4 - 6m_3 m_2 m_1 m_4 + 8m_6 m_2 m_1^2 - 80m_1^2 m_3^2 m_2 \\ &\quad - 33m_2^2 m_1^2 m_4 + 9m_2^4 m_1^2 + 16m_1^4 m_3^2 - 9m_3^2 m_4 - 35m_3^2 m_2^2 + 114m_2^3 m_1 m_3 \\ &\quad - 24m_2^2 m_1^3 m_3 - 36m_2^5) \\ \text{var} \{\beta_2\} &= \frac{1}{N} \frac{-1}{(m_2 - m_1^2)^6} \\ &\quad (-288m_1^4 m_3^2 m_2 + 64m_1^6 m_3^2 + 96m_2^4 m_1 m_3 + 432m_2^3 m_1^3 m_3 - 96m_2^2 m_1^5 m_3 \\ &\quad - 16m_1^6 m_6 - 176m_1^2 m_3^2 m_4 - 4m_1^2 m_6 m_2^2 + 20m_1^4 m_6 m_2 + 2m_8 m_2 m_1^2 + 48m_4^2 m_1 m_3 \\ &\quad - 4m_4^3 - 12m_2^3 m_1^2 m_4 - 96m_2^2 m_1^4 m_4 - 14m_1^2 m_4^2 m_2 + 36m_2^4 m_1^4 - 23m_1^4 m_4^2 \\ &\quad + m_4^2 m_2^2 - 336m_2^2 m_2^2 m_1^2 - 16m_2^3 m_2^2 - 16m_2 m_2^3 m_4 + 64m_2 m_3^3 m_1 + 192m_3^3 m_1^3 \\ &\quad - m_8 m_2^2 - m_8 m_1^4 + 48m_3 m_2^2 m_1 m_4 + 192m_3 m_2 m_1^3 m_4 - 144m_5^2 m_1^2 + 48m_5^2 m_3 m_4 \\ &\quad - 24m_1 m_4 m_5 m_2 + 24m_1^3 m_4 m_5 + 8m_3 m_5 m_2^2 - 88m_3 m_5 m_1^4 - 24m_2^3 m_1 m_5 \\ &\quad - 24m_2^2 m_1^3 m_5 + 80m_3 m_5 m_2 m_1^2 + 48m_2 m_5^2 m_5 + 8m_7 m_1^5 - 16m_1 m_3 m_6 m_2 - 4m_4 m_6 m_1^2 \\ &\quad + 4m_4 m_6 m_2 + 16m_1^3 m_3 m_6 - 16m_7 m_2 m_1^3 + 8m_1 m_7 m_2^2) \end{aligned}$$

Même si ces expressions sont très lourdes et peu maniables, elles n'en restent pas moins aisées à introduire dans un code numérique.

3.3.4 Méthode des log-moments : variance des log-cumulants

L'application de la formule modifiée de Kendall et Stuart (expression 3.5) permet de calculer les variances des log-cumulants $\tilde{\kappa}_i$ en utilisant la relation liant le log-cumulant $\tilde{\kappa}_i$ et les log-moments \tilde{m}_k , $k \in [1, 2i]$.

En particulier, on peut calculer la variance des log-cumulants 2 et 3 :

$$\begin{aligned} \text{var} \{\tilde{\kappa}_2\} &= \frac{1}{N} (8\tilde{m}_1^2 \tilde{m}_2 - 4\tilde{m}_1^4 + \tilde{m}_4 - \tilde{m}_2^2 - 4\tilde{m}_1 \tilde{m}_3) \\ \text{var} \{\tilde{\kappa}_3\} &= \frac{1}{N} (9\tilde{m}_2^3 - 72\tilde{m}_2^2 \tilde{m}_1^2 + 108\tilde{m}_2 \tilde{m}_1^4 - 36\tilde{m}_1^6 + 21\tilde{m}_1^2 \tilde{m}_4 + \tilde{m}_6 - \tilde{m}_3^2 \\ &\quad + 30\tilde{m}_1 \tilde{m}_2 \tilde{m}_3 - 48\tilde{m}_1^3 \tilde{m}_3 - 6\tilde{m}_2 \tilde{m}_4 - 6\tilde{m}_1 \tilde{m}_5) \end{aligned}$$

Ce sont formellement les mêmes expressions que dans le cas des statistiques traditionnelles. En pratique, on préférera exprimer ces deux grandeurs en fonction des log-cumulants, ce qui simplifie grandement les relations :

$$\text{var} \{\tilde{\kappa}_2\} = \frac{1}{N} (\tilde{M}_4 - \tilde{M}_2^2) \quad (3.7)$$

$$\text{var} \{\tilde{\kappa}_3\} = \frac{1}{N} (\tilde{M}_6 - 6\tilde{M}_2 \tilde{M}_4 - \tilde{M}_3^2 + 9\tilde{M}_2^3) \quad (3.8)$$

Il faut noter qu'elles ne dépendent pas de $\tilde{\kappa}_1$, ce qui signifie que dans les lois que nous avons détaillées au chapitre 2, ces variances ne font intervenir que les facteurs de formes (L, M, \dots).

3.4 Application aux lois à 1 paramètre

3.4.1 La distribution homothétique (loi à 1 paramètre)

La loi homothétique s'écrit (formule 2.1) :

$$\mathcal{H}[\mu] = \frac{1}{\mu} \delta_{\frac{1}{\mu}}^{\mathcal{M}} = \frac{1}{\mu} \delta \left(\frac{u}{\mu} - 1 \right)$$

Il n'est pas possible d'établir la formulation analytique de la matrice de Fisher, puisqu'on ne sait en calculer la dérivée logarithmique par rapport au paramètre μ . On ne peut donc appliquer la Méthode du Maximum de Vraisemblance.

Méthode des Moments

La relation donnant le premier moment de la loi homothétique :

$$m_1 = \mu$$

permet d'obtenir directement l'estimée de μ :

$$\hat{\mu} = \hat{m}_1$$

et sa variance théorique :

$$Var \{ \hat{\mu} \}_{MM} = \frac{M_2}{N} = 0$$

ce qui est tout compte fait assez normal puisque la loi n'a qu'un paramètre et qu'elle est parfaitement localisée.

Méthode des Log-Moments

Il est aisé de montrer que

$$\hat{\mu} = e^{\hat{k}_1}$$

et que sa variance est elle aussi nulle.

Dans ce cas simple, il y a la même différence entre méthode des moments et méthode des log-moments qu'entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique.

3.4.2 La loi uniforme à 1 paramètre

Elle est donnée par la relation (2.3) :

$$\mathcal{U}_1[\mu](u) = \frac{Y(u) - Y(\mu - u)}{\mu}.$$

Comme pour la loi homothétique, il n'est pas possible d'établir la formulation analytique de la matrice de Fisher, puisqu'on ne sait en calculer la dérivée logarithmique par rapport au paramètre μ .

La Méthode du Maximum de Vraisemblance ne peut donc s'appliquer en utilisant le schéma classique vu au paragraphe 3.1.2.

Reprenons l'expression de la log-vraisemblance (relation 3.1) :

$$\log(p(x_1, \dots, x_N)) = \sum_{k=1}^N \log(p(x_k)).$$

$p(x_k)$ doit être non nul, ce qui impose :

$$\mu > \sup_{k \in [1, N]} x_k$$

et la log-vraisemblance calculée sur les N échantillons s'écrit :

$$- N \log \mu$$

Si on cherche à la maximiser, il est alors évident de choisir :

$$\hat{\mu} = \sup_{k \in [1, N]} x_k$$

On a alors :

$$\mathcal{L}\mathcal{V} = -N \log \hat{\mu}$$

Notons que :

$$\int_0^\infty \mathcal{U}_1[\mu](u) \log(\mathcal{U}_1[\mu](u)) du = -\log \mu$$

Méthode des Moments

Connaissant les expressions des deux premiers moments :

$$\begin{cases} m_1 = \frac{\mu}{2} \\ m_2 = \frac{\mu^2}{3} \end{cases},$$

on en déduit directement l'estimée de μ :

$$\hat{\mu} = 2 \hat{m}_1$$

et sa variance théorique :

$$\text{Var} \{\hat{\mu}\}_{MM} = \frac{M_2}{N} = \frac{1}{N} \frac{\mu^2}{12}$$

Méthode des Log-Moments

Les log-cumulants sont donnés par

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_{x(1)} = -1 + \log \mu \\ \tilde{\kappa}_{x(2)} = 1 \end{cases}$$

ce qui permet de déduire μ :

$$\hat{\mu} = e^{1+\hat{\kappa}_1}$$

et sa variance théorique (en appliquant la relation 3.5) :

$$\text{Var} \{\hat{\mu}\}_{MLM} = \frac{1}{N} \mu^2$$

La variance est donc 12 fois plus élevée que dans le cas de la Méthode des Moments !!

On voit dans cet exemple que la méthode des Log-Moments est inadaptée aux lois "à tête lourde", ce qui est somme toute assez logique puisqu'elle requiert le calcul d'une somme de logarithmes pris au voisinage de 0.

3.5 Application aux lois à 2 paramètres

3.5.1 La loi uniforme

Premier formalisme : la distribution rectangulaire

A partir du formalisme traditionnel de la loi rectangulaire (équation 2.7) :

$$\mathcal{U}[\mu, h](u) = \frac{Y(u - (\mu - h)) - Y((\mu + h) - u)}{2h} \quad h < \mu$$

on observe que, comme dans le cas de la loi homothétique, il n'est pas possible d'établir la formulation analytique de la matrice de Fisher, puisqu'on ne sait en calculer la dérivée logarithmique par rapport aux paramètres μ ou h . La Méthode du Maximum de Vraisemblance ne peut donc s'appliquer en utilisant le schéma classique vu au paragraphe 3.1.2.

Reprenons l'expression de la log-vraisemblance (relation 3.1) :

$$\log(p(x_1, \dots, x_N)) = \sum_{k=1}^N \log(p(x_k)).$$

$p(x_k)$ doit être non nul, ce qui impose :

$$\begin{aligned} \mu + h &> \sup_{k \in [1, N]} x_k \\ \mu - h &< \inf_{k \in [1, N]} x_k \end{aligned}$$

et la log-vraisemblance s'écrit :

$$-N \log(2h)$$

Si on cherche à la maximiser, il est alors évident de choisir :

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= \frac{1}{2} \left(\sup_{k \in [1, N]} x_k + \inf_{k \in [1, N]} x_k \right) \\ \hat{h} &= \left(\sup_{k \in [1, N]} x_k - \inf_{k \in [1, N]} x_k \right)\end{aligned}$$

et on a alors :

$$\mathcal{L}\mathcal{V} = -N \log(2\hat{h})$$

Notons que :

$$\int_0^\infty \mathcal{U}[\mu, h](u) \log(\mathcal{U}[\mu, h](u)) du = -\log(2h)$$

La méthode des moments s'inverse aisément puisque l'on a :

$$\begin{cases} m_1 &= \mu \\ m_2 &= \mu^2 + \frac{h^2}{3} \end{cases},$$

d'où

$$\begin{cases} \hat{\mu} &= \frac{\hat{m}_1}{\hat{h}} \\ \hat{h} &= \sqrt{3(\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2)} \end{cases}.$$

La méthode des log-cumulants semble peu intéressante puisque cette méthode ne convient pas à ce type de distribution (le second log-cumulant dépend du paramètre μ).

Second formalisme

Ce second formalisme s'exprime (expression 2.9) :

$$\mathcal{U}'[\mu, \alpha](u) = \frac{Y(u - \frac{\mu}{\alpha}) - Y(\alpha\mu - u)}{(\alpha - \frac{1}{\alpha})\mu} \quad \alpha > 1.$$

Connaissant les moments :

$$\begin{cases} m_1 &= \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha} \mu \\ m_2 &= \frac{\alpha^4 + \alpha^2 + 1}{3\alpha^2} \mu^2 \end{cases},$$

il est difficile d'en déduire directement les paramètres. Néanmoins, si l'on connaît un estimateur du coefficient de variation $\hat{\gamma}$:

$$\hat{\gamma} = \sqrt{\frac{\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2}{\hat{m}_1^2}},$$

on en déduit facilement un estimateur du paramètre α :

$$\hat{\alpha} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}\hat{\gamma}}{1 - \sqrt{3}\hat{\gamma}}}$$

puis du paramètre μ :

$$\hat{\mu} = \sqrt{1 - 3\hat{\gamma}^2} \hat{m}_1$$

A la différence du cas de la distribution rectangulaire, les log-cumulants ont une expression formellement utilisable (le second log-cumulant ne dépend pas de μ) :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 &= -1 + \log \mu + \log \alpha \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1} \\ \tilde{\kappa}_2 &= 1 - 4 (\log \alpha)^2 \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 - 1)^2} \end{cases}$$

On voit qu'il n'est cependant pas possible d'obtenir une expression analytique des paramètres en fonction des estimateurs des deux premiers log-cumulants et qu'une méthode numérique est requise pour l'estimation du paramètre α à partir uniquement du second log-cumulant (connaissant α , le premier log-cumulant permet alors de calculer analytiquement μ).

3.5.2 La loi lognormale

A partir du formalisme traditionnel de la loi lognormale (équation 2.12) :

$$\mathcal{L}[\mu, \sigma](u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}u} e^{\left(-\frac{(\log u - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \quad u > 0$$

la matrice A s'écrit :

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sigma^2} & \frac{2(\mu - \log(x))}{\sigma^3} \\ \frac{2(\mu - \log(x))}{\sigma^3} & -\sigma^2 + 3(\log x)^2 - 6\mu \log(x) + 3\mu^2 \end{pmatrix},$$

ce qui permet de déduire la matrice de Fisher :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sigma^2} \end{pmatrix}.$$

A partir de la représentation en " μ, L " (équation 2.18) :

$$\mathcal{L}[\mu, L](u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Psi(1, L)u} e^{\left(-\frac{(\log u - \log \mu)^2}{2\Psi(1, L)}\right)} \quad u > 0$$

la matrice A s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \frac{-1 - \ln(x) + \log(\mu)}{\mu^2 \Psi(1, L)} & \frac{\Psi(2, L)(-\log(x) + \log(\mu))}{\mu \Psi(1, L)^2} \\ \frac{\Psi(2, L)(-\log(x) + \log(\mu))}{\mu \Psi(1, L)^2} & \frac{1}{2} \frac{-\Psi(3, L)(\Psi(1, L))^2 + \Psi(3, L)\Psi(1, L)(\log(x) - \log(\mu))^2 + (\Psi(2, L))^2(\Psi(1, L) - 2(\log(x) - \log(\mu))^2)}{(\Psi(1, L))^3} \end{pmatrix},$$

ce qui permet de déduire la matrice de Fisher :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\mu^2 \Psi(1, L)} & 0 \\ 0 & \left(\frac{\Psi(2, L)}{\Psi(1, L)}\right)^2 \end{pmatrix}.$$

Méthode du Maximum de Vraisemblance

Soit l'expression logarithmique de la loi lognormale :

$$\log \mathcal{L} = - \left(\log(\sqrt{2\pi} \sigma u) + \frac{(\log u - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) \quad (3.9)$$

Partant de cette expression, on en calcule les dérivées partielles selon les variables μ et σ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log(\mathcal{L}[\mu, \sigma](u))}{\partial \mu} &= \frac{\log u - \mu}{\sigma^2} \\ \frac{\partial \log(\mathcal{L}[\mu, \sigma](u))}{\partial \sigma} &= \frac{(\log u - \mu)^2 - \sigma^2}{\sigma^3} \end{aligned}$$

Si l'on dispose de N échantillons x_1, \dots, x_N , la première relation permet d'avoir directement une estimée de μ :

$$\hat{\mu}_{MMV} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log(x_i) \quad (3.10)$$

En introduisant ce résultat dans la seconde équation, on peut alors écrire :

$$\hat{\sigma}_{MMV} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\log(x_i))^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log(x_i)\right)^2} \quad (3.11)$$

En introduisant ces résultats dans le calcul de la log-vraisemblance, on obtient :

$$\mathcal{LV}_{\mathcal{L}} = N \left(-\log(\sqrt{2\pi} \sigma_{MMV}) - \mu_{MMV} - \frac{1}{2} \right)$$

Notons aussi qu'à partir de l'expression 3.9, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathcal{L} \log \mathcal{L} du &= -\log(\sqrt{2\pi}\sigma) - \int_0^\infty u \mathcal{L} du - \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^\infty (\log u - \mu)^2 \mathcal{L} du \\ &= -\log(\sqrt{2\pi}\sigma) - \tilde{\kappa}_1 - \frac{1}{2\sigma^2} \tilde{\kappa}_2 \\ &= -\log(\sqrt{2\pi}\sigma) - \mu - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Méthode des Moments

Connaissant l'expression des moments de la loi lognormale (équation 2.15) :

$$\begin{cases} m_1 = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \\ m_2 = \exp(2\mu + 2\sigma^2) \end{cases}$$

on en déduit les estimateurs $\hat{\mu}_{MM}$ et $\hat{\sigma}_{MM}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{MM} &= \sqrt{\log \frac{m_2}{m_1^2}} \\ \mu_{MM} &= 2\log(m_1) - \frac{1}{2}\log m_2 \end{aligned}$$

Le calcul de la variance des estimateurs de μ et σ conduit aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} Var\{\hat{\mu}\}_{MM} &= \frac{e^{4\sigma^2} - 8e^{2\sigma^2} + 16e^{\sigma^2} - 9}{4} \\ Var\{\hat{\sigma}\}_{MM} &= \frac{e^{4\sigma^2} - 4 + e^{2\sigma^2} + 4 + e^{\sigma^2} - 1}{4\sigma^2} \end{aligned}$$

Méthode des Moments d'ordre inférieur

Puisque la loi log-normale possède tous ses moments, tant positifs que négatifs, on peut estimer ses deux paramètres $\hat{\mu}_{MMOI}$ et $\hat{\sigma}_{MMOI}$ à partir des moments d'ordre 1 m_1 et -1 m_{-1} (relation 2.16) :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{MMOI} &= \frac{1}{2} \log\left(\frac{m_1}{m_{-1}}\right) \\ \hat{\sigma}_{MMOI} &= \sqrt{\log(m_1 m_{-1})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var\{\hat{\mu}\}_{MMOI} &= \frac{e^{\sigma^2} - e^{-\sigma^2}}{2} \\ Var\{\hat{\sigma}\}_{MMOI} &= \frac{e^{\sigma^2} - 2 + e^{-\sigma^2}}{2\sigma^2} \end{aligned}$$

On observe facilement que ces variances sont notablement inférieures à celles obtenues par la méthode des moments fondées sur les moments d'ordre 1 et 2.

Méthode des Log-Moments

les deux premiers log-cumulants de la loi lognormale s'écrivent (relation 2.17) :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \mu \\ \tilde{\kappa}_2 = \sigma^2 \end{cases}$$

ce qui permet d'écrire directement :

$$\begin{cases} \hat{\mu}_{MLM} = \tilde{\kappa}_1 \\ \hat{\sigma}_{MLM} = \sqrt{\tilde{\kappa}_2} \end{cases}$$

Plus précisément, si l'on dispose de N échantillons, on a :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log(x_i)$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\log(x_i))^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log(x_i) \right)^2}$$

relations qui sont strictement identiques à celles obtenues avec la méthode du maximum de vraisemblance (équations 3.10 et 3.11).

Puisque ces expressions sont identiques, on en déduit que la variance des estimateurs de la méthode des log-moments doit dans ce cas précis atteindre les bornes de Cramer Rao.

Modèle mixte

Si l'on cherche à calculer le premier moment mixte de la loi log-normale, on trouve l'expression suivante :

$$w_1 = (\mu + \sigma^2) e^{(\mu + \sigma^2)}$$

qui, manifestement, ne peut conduire à des méthodes simples d'inversion.

Variances des estimateurs des log-cumulants

Enfin notons le résultat du calcul des variances des estimateurs des log-cumulants 2 et 3, que l'on déduit des expressions théoriques 3.7 et 3.8 :

$$\text{Var} \{ \hat{\kappa}_2 \} = \frac{1}{N} \sigma^4$$

$$\text{Var} \{ \hat{\kappa}_3 \} = \frac{1}{N} \sigma^6$$

3.5.3 Lois Gamma et Gamma Généralisée

L'expression de la loi Gamma Généralisée est donnée par la relation 2.20 :

$$\mathcal{G}[\mu, L](u) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{Lu}{\mu} \right)^{L-1} e^{-\frac{Lu}{\mu}}$$

La matrice A s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \frac{L(\mu-2x)}{\mu^3} & \frac{x-\mu}{\mu^2} \\ \frac{x-\mu}{\mu^2} & -\Psi(1, L) + \frac{1}{L} \end{pmatrix},$$

d'où l'expression de la matrice de Fisher :

$$\begin{pmatrix} \frac{L}{\mu^2} & 0 \\ 0 & \Psi(1, L) - \frac{1}{L} \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Remarquons que la matrice est diagonale et que le terme $\Psi(1, L) - \frac{1}{L}$ ne dépend pas de μ .

On en déduit les bornes de Cramer Rao :

$$\text{Min}(\text{Var}(L)) = \frac{1}{\Psi(1, L) - \frac{1}{L}}$$

$$\text{Min}(\text{Var}(\mu)) = \frac{\mu^2}{L}$$

Si on choisit la formulation "classique" de la loi Gamma (relation 2.30) :

$$\mathcal{G}'[\theta, L](u) = \frac{u^{L-1} e^{-\frac{u}{\theta}}}{\theta^L \Gamma(L)}$$

la matrice A s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \frac{L\theta-2x}{\theta^3} & -\frac{1}{\theta} \\ -\frac{1}{\theta} & -\Psi(1, L) \end{pmatrix},$$

d'où l'expression de la matrice de Fisher :

$$\begin{pmatrix} \frac{L}{\theta^2} & \frac{1}{\theta} \\ \frac{1}{\theta} & \Psi(1, L) \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Cette matrice n'est plus diagonale : on ne peut faire varier de manière indépendante μ et θ .

Méthode du Maximum de Vraisemblance

Le logarithme de la loi Gamma Généralisée s'exprime comme :

$$\log \mathcal{G} = L \log L - \log(\Gamma(L)) + (L-1) \log\left(\frac{u}{\mu}\right) - \frac{Lu}{\mu} - \log \mu \quad (3.14)$$

Calculée sur N échantillons, la log-vraisemblance s'écrit :

$$\mathcal{LV}_{\mathcal{G}} = N(L \log L - \log(\Gamma(L))) + (L-1) \sum_{i=1}^N \log\left(\frac{x_i}{\mu}\right) - L \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\mu} - N \log \mu \quad (3.15)$$

Les estimées $(\hat{\mu}, \hat{L})$ se déduisent du calcul des dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial \log \mathcal{G}}{\partial \mu} = \frac{L(u - \mu)}{\mu^2} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \log \mathcal{G}}{\partial L} = \frac{\mu - u}{\mu} + \log L - \Psi(L) + \log u - \log \mu \quad (3.17)$$

La résolution de la première équation (relation 3.16) donne la valeur explicite de $\hat{\mu}_{MMV}$:

$$\hat{\mu}_{MMV} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}, \quad (3.18)$$

ce qui permet, connaissant $\hat{\mu}_{MMV}$, de résoudre l'équation 3.17 sous forme d'un système implicite pour \hat{L}_{MMV} :

$$\log \hat{L}_{MMV} - \Psi(\hat{L}_{MMV}) = \log \hat{\mu}_{MMV} - \frac{\sum_{i=1}^N \log x_i}{N} \quad (3.19)$$

avec Ψ la fonction Digamma.

Si l'on considère ces estimées, on peut alors réécrire l'expression 3.15 de la log-vraisemblance sous la forme :

$$\mathcal{LV}_{\mathcal{G}} = N(-\log(\Gamma(L)) + (L-1)\Psi(L) + \log L - L - \log \mu) \quad (3.20)$$

Notons au passage que

$$\begin{aligned} \int_{u=0}^{\infty} \mathcal{G} \log(\mathcal{G}) du &= L \log L - \log(\Gamma(L)) - L \log \mu + (L-1) \tilde{\kappa}_1 - \frac{L}{\mu} m_1 \\ &= -\log(\Gamma(L)) + (L-1)\Psi(L) + \log L - L - \log \mu \end{aligned}$$

Afin de trouver une approximation explicite de l'expression implicite 3.19, on montre que la loi $\frac{1}{\Psi(L) - \log L}$ a un comportement quasi linéaire pour des valeurs raisonnables de L (entre 1 et 50), et, à l'aide d'un logiciel de calcul formel (comme Maple), on peut retenir un développement au premier ordre $\frac{1}{\log L - \Psi(L)} \simeq 1.98278L - 0.2668$ permettant d'écrire une expression explicite de \hat{L}_{MMV} :

$$\hat{L}_{MMV} \simeq 0.1346 + \frac{0.504}{\frac{\log \hat{\mu}_{MMV} - \sum_{i=1}^N \log x_i}{N}}$$

L'estimation du paramètre μ s'effectue avec une variance minimale (borne de Cramer Rao) donnée par l'inverse du terme I_{11} de la matrice de Fisher (équation 3.12) :

$$Var\{\hat{\mu}\}_{MMV} = \frac{1}{N} \frac{\mu^2}{L} \quad (3.21)$$

De même l'estimation du paramètre L est directement donnée par l'inverse du terme I_{22} de la matrice de Fisher :

$$Var \left\{ \hat{L} \right\}_{MMV} = \frac{1}{N} \frac{1}{\Psi(1, L) - \frac{1}{L}} \quad (3.22)$$

Pour des valeurs de L supérieures à 0.5, on peut éventuellement prendre l'approximation suivante :

$$Var \left\{ \hat{L} \right\}_{MMV} \simeq \frac{1}{N} 2 L (L - 0.25) \quad (3.23)$$

Méthode des Moments

Puisque les deux premiers moments de la loi Gamma Généralisée sont données par la relation 2.24 :

$$\begin{cases} m_1 &= \mu \\ m_2 &= \frac{L+1}{L} \mu^2 \end{cases}$$

les estimées $(\hat{\mu}_{MM}, \hat{L})$ se déduisent par les relations suivantes :

$$\hat{\mu}_{MM} = \hat{m}_1 \quad (3.24)$$

$$\hat{L}_{MM} = \frac{\hat{m}_1^2}{\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{\hat{m}_2}}{\hat{m}_1}\right)^2 - 1} \quad (3.25)$$

Si l'on utilise l'estimé du coefficient de variation $\hat{\gamma}$, on a alors la relation :

$$\hat{L}_{MM} = \frac{1}{\hat{\gamma}^2} \quad (3.26)$$

Le calcul de la variance de l'estimée $\hat{\mu}$ est trivial, puisque, si N valeurs servent à calculer cette estimée, et en utilisant le moment centré d'ordre 2 : M_2 , la variance de l'estimée est alors donnée par la relation

$$Var \left\{ \hat{\mu} \right\}_{MM} = \frac{M_2}{N} = \frac{1}{N} \frac{\mu^2}{L}. \quad (3.27)$$

On retrouve exactement la formulation de la variance de μ obtenue avec la méthode du Maximum de Vraisemblance (équation 3.21).

La variance de \hat{L} se déduit du calcul de Kendall et Stuart (équation 3.2), ce qui permet d'écrire :

$$Var \left\{ \hat{L} \right\}_{MM} = \frac{2 L (L + 1)}{N} \quad (3.28)$$

Elle est indépendante de μ . On peut remarquer que la variance relative, qui s'exprime comme

$$\frac{Var \left\{ \hat{L} \right\}_{MM}}{L} = \frac{2 (L + 1)}{N},$$

est linéairement croissante avec L : plus L est grand, plus la loi Gamma Généralisée a une allure symétrique. Il est alors de plus en plus difficile d'évaluer sa forme exacte.

Méthode des Moments d'ordre inférieur

Connaissant les 3 moments fractionnaires m_ν , $m_{\nu+1}$ et $m_{\nu+2}$, on peut alors, par identification obtenir des estimées des paramètres L et μ de la loi Gamma puisque l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} m_\nu &= \left(\frac{\mu}{L}\right)^\nu \frac{\Gamma(\nu + L)}{\Gamma(L)} \\ m_{\nu+1} &= \frac{\mu}{L} (\nu + L) m_\nu \\ m_{\nu+2} &= \frac{\mu}{L} (\nu + L + 1) m_{\nu+1} \end{aligned}$$

En calculant les estimées \hat{m}_ν , $\hat{m}_{\nu+1}$ et $\hat{m}_{\nu+2}$ à partir des données expérimentales, on obtient :

$$\hat{\mu}_{MMOI} = \frac{\hat{m}_{\nu+1}(1 + \nu) - \nu \hat{m}_{\nu+2}}{\hat{m}_\nu}$$

$$\hat{L}_{MMOI} = \frac{\hat{m}_{\nu+1}^2}{\hat{m}_\nu \hat{m}_{\nu+2} - \hat{m}_{\nu+1}^2} - \nu = \frac{\hat{m}_\nu \hat{m}_{\nu+2}}{\hat{m}_\nu \hat{m}_{\nu+2} - \hat{m}_{\nu+1}^2} - (1 + \nu) = \frac{1}{\hat{m}_\nu \left(\frac{\sqrt{\hat{m}_{\nu+2}}}{\hat{m}_{\nu+1}} \right)^2 - 1} - \nu$$

On peut vérifier que pour $\nu = 0$, on retrouve les équations 3.24 et 3.25.

La variance de ces estimateurs se déduisent sans trop de problème, ce qui permet d'écrire :

$$Var \{ \hat{\mu} \}_{MMOI} = \frac{1}{N} \frac{\Gamma(L) \Gamma(L + 2\nu)}{(\Gamma(L + 1 + \nu))^2} \frac{\mu^2}{L^2} (L^3 + 2L^2\nu(1 - \nu) + 2L\nu^2(\nu^2 + \nu + 1) + \nu^3(\nu + 4)(\nu + 1)^2)$$

$$Var \{ \hat{L} \}_{MMOI} = \frac{1}{N} \frac{\Gamma(L) \Gamma(L + 2\nu)}{(\Gamma(L + \nu))^2} (2L(L + 1) + \nu (4L(\nu + 2) + (\nu + 4)(\nu + 1)^2)) \quad (3.29)$$

Pour μ , on peut montrer que la variance est minimale pour $\nu = 0 \forall L \forall \mu$ et est égale à

$$Var \{ \hat{\mu} \}_{\min} = \frac{1}{N} \frac{\mu^2}{L}$$

On retrouve donc pour $\hat{\mu}$ le même estimateur que celui de la méthode des moments et que celui de la méthode du maximum de vraisemblance.

Pour L , la variance dépend donc de L et de ν . On peut vérifier qu'en posant $\nu = 0$, on retrouve le résultat (équation 3.28) de la méthode des moments. On peut aussi chercher la valeur de ν telle que la variance soit minimale : pour cela il suffit de chercher les valeurs de ν annulant la dérivée de $Var \{ \hat{L} \}_{MMOI}$. Malheureusement, on obtient une relation implicite qui ne permet pas d'obtenir une expression explicite de ν en fonction de L .

Qualitativement, on peut néanmoins faire les constatations suivantes :

- le terme $\frac{\Gamma(L) \Gamma(2\nu+L)}{(\Gamma(\nu+L))^2}$ a son minimum en $\nu = 0, \forall L$, et n'est défini que pour $\nu + L > 0$.
- le terme $(2L(L + 1) + \nu (4L(\nu + 2) + (\nu + 4)(\nu + 1)^2))$ a son minimum pour $\nu = -1, \forall L$.

La figure 3.1 permet d'exploiter ces constatations : $Var \{ \hat{L} \}_{MMOI}$ a un aspect "sympathique" (existence effective d'un minimum pour tout L) et sa dérivée s'annule entre -1 et 0.

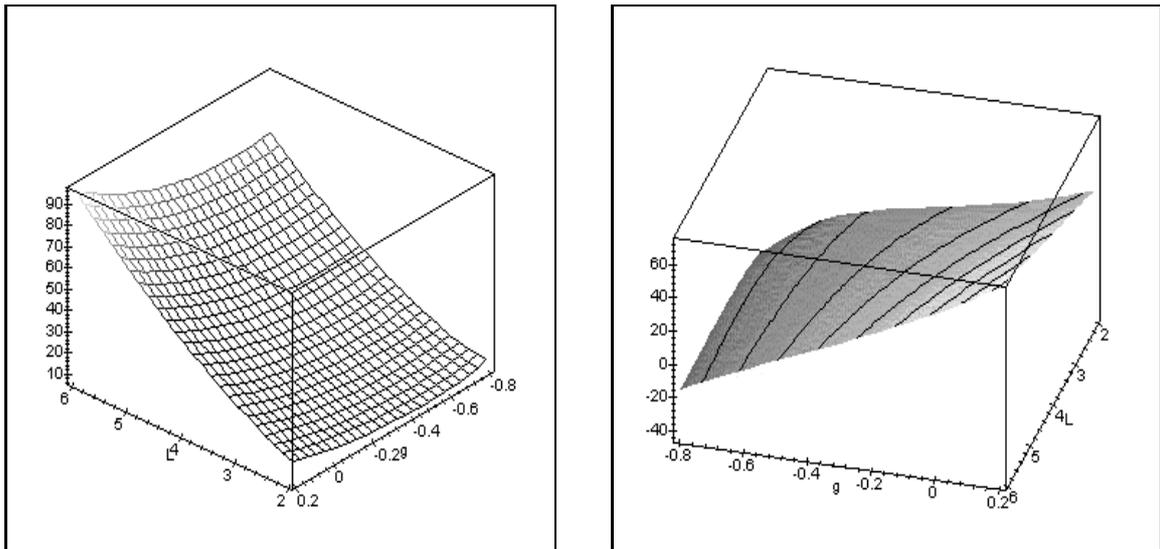


FIG. 3.1 – Méthode des Moments d'Ordre Inférieur : à gauche fonction $Var \{ \hat{L} \}(\nu, L)$ – variance de \hat{L} en fonction de ν et L – à droite sa dérivée

Puisqu'une formulation explicite de la variance minimale ne peut être obtenue, nous allons comparer les valeurs numériques de cette variance (avec la valeur de ν donnant la variance minimale), nous allons

utiliser une fonction auxiliaire $R(L)$, rapport de la variance par la Méthode des Moments d'Ordre Inférieur avec celle de la Méthode des Moment (formule 3.28) :

$$R(L) = \frac{\text{Var}\{\hat{L}\}_{MMOI}}{\text{Var}\{\hat{L}\}_{MM}} \quad (3.30)$$

La figure 3.2 (droite) montre l'allure de cette courbe pour L variant entre 1 et 20. Le tableau suivant donne quelques valeurs de ce rapport.

L	ν_{optimal}	$\frac{\text{Var}\{\hat{L}\}_{MMOI}}{\text{Var}\{\hat{L}\}_{MM}}$
1	-0.351	0.449
2	-0.505	0.590
3	-0.564	0.682
5	-0.609	0.784

Ces valeurs numériques montrent qu'à variance égale (*i.e.* à écart type constant), on peut donc se contenter, pour calculer les estimées de L , d'un nombre de points plus faible (moins de la moitié pour $L = 1$, environ les deux tiers pour $L = 3$).

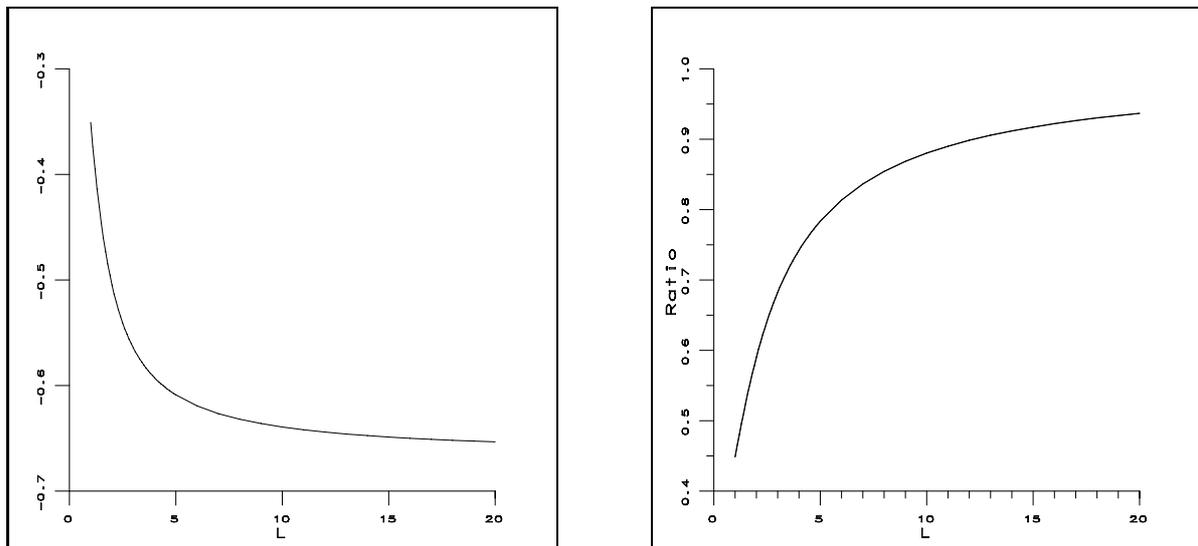


FIG. 3.2 – A gauche Valeur optimale de ν minimisant la variance de l'estimateur de L , à droite, ratio entre la variance optimale de la Méthode des Moments d'Ordre Inférieur et la variance de la Méthode des Moments (formule 3.30)

Méthode des Log-Moments

Les log-cumulants de la loi Gamma sont donnés par la relation 2.26

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 &= \log(\mu) + \Psi(L) - \log(L) \\ \tilde{\kappa}_2 &= \Psi(1, L) \end{cases}$$

Les estimations de $\hat{\mu}$ et \hat{L} s'effectuent en résolvant le système :

$$\log(\hat{\mu}_{MLM}) - \log(\hat{L}_{MLM}) + \Psi(\hat{L}_{MLM}) = \frac{\sum_{i=1}^N \log x_i}{N} \quad (3.31)$$

$$\Psi(1, \hat{L}_{MLM}) = \frac{\sum_{i=1}^N (\log x_i)^2}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^N \log x_i}{N} \right)^2 \quad (3.32)$$

Cette résolution se fait numériquement sans problème majeur, les fonctions Gamma, Digamma et Polygamma étant monotones pour $L \geq 1$. Une fois obtenu la valeur de \hat{L}_{MLM} en résolvant numériquement l'équation implicite 3.32, on l'introduit dans l'équation 3.31 qui fournit alors explicitement \hat{L}_{MLM} .

Il faut noter que l'équation 3.31 est exactement celle obtenue dans la méthode du Maximum de Vraisemblance (équation 3.19) : seulement, dans le cas de la méthode des log-moments, on commence par estimer L (équation 3.32), puis μ (équation 3.31) alors que dans la méthode du Maximum de Vraisemblance, on calcule μ (simple moyenne, équation 3.18) puis L avec l'équation 3.19.

Puisque le paramètre L se déduit de la relation

$$\Psi(1, L) = \tilde{\kappa}_2$$

il peut se réécrire en fonction de $(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2)$:

$$\Psi(1, L) = \tilde{m}_2 - \tilde{m}_1^2.$$

On effectue alors le développement limité, adaptation de la méthode de Kendall et Stuart (relation 3.5), et, bien que les expressions mettent en jeu les moments de deuxième espèce d'ordre 1 à 4 dont les expressions sont extrêmement lourdes, le résultat se simplifie et on obtient :

$$Var \left\{ \hat{L} \right\}_{MLM} = \frac{1}{N} \frac{\Psi(3, L) + 2\Psi(1, L)^2}{\Psi(2, L)^2} \quad (3.33)$$

Cette expression ne dépend pas de μ , mais, bien que concise, ne permet pas cependant de se faire une idée concrète de l'allure de la variance en fonction de L . Aussi, par analogie avec la méthode des moments pour laquelle la variance est donnée par la formule 3.28 et qui a donc une allure asymptotique en $2L^2$, on va analyser son comportement par rapport à une fonction de comportement quadratique en L . Soit donc la fonction auxiliaire $r(L)$:

$$r(L) = \frac{Var \left\{ \hat{L} \right\}_{MLM}}{\frac{2L^2}{N}} = \frac{\Psi(3, L) + 2\Psi(1, L)^2}{\Psi(2, L)^2} \frac{1}{2L^2}$$

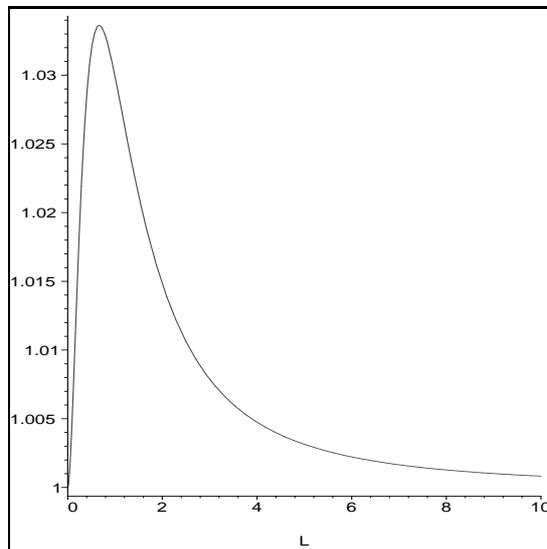


FIG. 3.3 – Loi Gamma. Approximation de la variance de l'estimateur de L dans le cas de la méthode des log-moments : ratio de la formule exacte (formule 3.33) et de la formule approchée (formule 3.34).

Il est aisé, avec Maple, de montrer que :

$$\begin{aligned} r(L) &\rightarrow 1 \quad \text{si } L \rightarrow 0 \\ r(L) &\rightarrow 1 \quad \text{si } L \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Mieux, en traçant $r(L)$ (figure 3.3), on voit que la valeur demeure toujours très proche de 1. Aussi peut-on utiliser couramment l'approximation suivante, valable à 3% près :

$$Var \left\{ \hat{L} \right\}_{MLM} \simeq \frac{1}{N} 2L^2 \quad (3.34)$$

Cette expression simplifiée permet donc directement des comparaisons entre les variances du paramètre L estimé par la méthode des moments et par la méthode des log-moments. En particulier, on peut calculer $R_1(L)$, rapport de la variance par la Méthode des Log-Moments (formule approchée 3.34) avec celle de la Méthode des Moment (formule 3.28) :

$$R_1(L) = \frac{\text{Var}\{\hat{L}\}_{MLM}}{\text{Var}\{\hat{L}\}_{MM}} = \frac{L}{L+1}$$

Le tableau suivant donne quelques valeurs de ce rapport.

L	$R_1(L) = \frac{\text{Var}\{\hat{L}\}_{MLM}}{\text{Var}\{\hat{L}\}_{MM}}$
1	0.5
2	0.666
3	0.75
5	0.833

On voit en particulier, qu'à variance égale, pour $L = 1$, la méthode des log-moments ne requiert que la moitié des pixels utilisés par la méthode des moments, soit à peu près le nombre requis par la méthode des moments d'ordre inférieur.

Si l'on compare maintenant cette variance avec celle obtenue par la Méthode du Maximum de Vraisemblance, on peut écrire le rapport $R_2(L)$:

$$R_2(L) = \frac{\text{Var}\{\hat{L}\}_{MLM}}{\text{Var}\{\hat{L}\}_{MMV}} = \frac{\Psi(3, L) + 2\Psi(1, L)^2}{\Psi(2, L)^2} \left(\Psi(1, L) - \frac{1}{L} \right)$$

Le tableau suivant donne quelques valeurs de ce rapport.

L	$R_2(L) = \frac{\text{Var}\{\hat{L}\}_{MLM}}{\text{Var}\{\hat{L}\}_{MMV}}$
1	1,33
2	1,18
3	1,12
5	1,07

Bien évidemment, on voit que la Méthode du Maximum de Vraisemblance requiert moins d'échantillons à variance constante : cependant le gain est beaucoup moins marqué que lors de la comparaison de la Méthode des Moments et la Méthode des Log Moments.

Pour le paramètre μ , le calcul est beaucoup plus laborieux, et on obtient finalement l'expression suivante, dont l'interprétation est peu limpide :

$$\begin{aligned} \text{Var}\{\hat{\mu}\}_{MLM} = & -\frac{\mu^2}{N L^2 \Psi(2, L)^2} (2 \Psi(1, L) L \Psi(3, L) - \Psi(1, L)^2 L^2 \Psi(3, L) + 4 \Psi(1, L)^3 L \\ & - 2 \Psi(1, L)^4 L^2 - 2 L \Psi(2, L)^2 + \Psi(1, L) L^2 \Psi(2, L)^2 - 2 \Psi(1, L)^2 - \Psi(3, L)) \quad (3.35) \end{aligned}$$

Comparer cette équation avec celle donnant la variance de μ par la méthode des moments (équation 3.27) ne peut se faire par un simple coup d'oeil. On peut utiliser Maple pour montrer que les deux valeurs sont asymptotiquement identiques pour L tendant vers l'infini. Pour des valeurs de L usuelles (entre 1 et 10 par exemple), la figure donnant le rapport peut s'avérer instructive (figure 3.4) : en effet, on y voit que la variance de la méthode des log-moments est toujours supérieure à celle obtenue par application de la méthode des moments (ce qui semble assez raisonnable puisque celui-ci est *de facto* l'estimateur du maximum de vraisemblance qui dans ce cas atteint les bornes de Cramer-Rao).

Le tableau suivant donne quelques exemples de valeurs de ce rapport.

L	Rapport
0.5	1.754
1	1.212
2	1.051
3	1.022
5	1.006

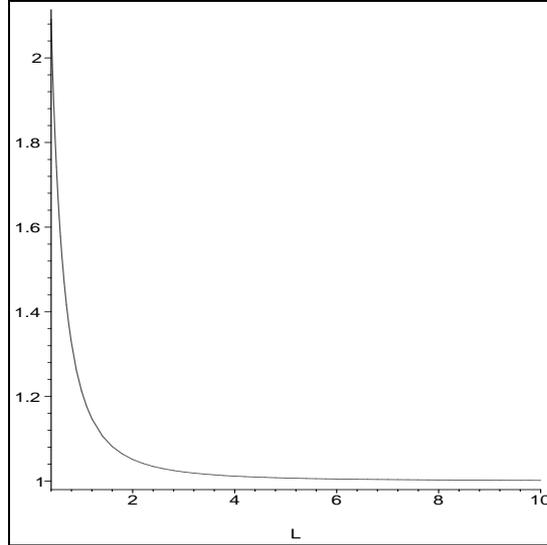


FIG. 3.4 – Loi Gamma. Ratio de l'estimateur de μ de la méthode des log-moments (formule 3.35) avec celui de la méthode des moments (formule 3.27). L varie entre 0.4 et 10.

Une Méthode mixte : estimation de $u \log u$

Cette méthode, introduite par Blacknell dans le cadre de la loi $\mathcal{K}[7]$, s'appuie sur l'estimation de la variable $u \log u$. Nous avons vu au paragraphe 1.6.2 que le formalisme des statistiques de deuxième espèce permet aisément de calculer cette estimée :

- soit en calculant la transformée de Mellin $\Phi_X(s)$ de la fonction $u\mathcal{G}(u)$, ce qui donne (relation 1.66) :

$$\Phi_X(s) = \Phi_{\mathcal{G}}(s+1) = \mu^s \frac{\Gamma(L+s)}{L^s \Gamma(L)}$$

et ce qui permet d'en calculer le premier log-moment.

- soit en calculant la transformée de Mellin $\Phi_L(s)$ de la fonction $\log u \mathcal{G}(u)$, ce qui donne (relation 1.67) :

$$\Phi_L(s) = \frac{d\phi_{\mathcal{G}}(s)}{ds} = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} (\log \mu + \Psi(L+s-1) - \log L)$$

et ce qui permet d'en calculer le premier moment.

Donc, de deux manières différentes, on peut calculer $E(u \log u)$:

- en tant que premier moment mixte

$$w_1 = \left. \frac{d\phi_X}{ds} \right|_{s=1}$$

- en tant que premier log-moment mixte

$$\tilde{w}_1 = \phi_L(s)|_{s=2}$$

ce qui donne :

$$w_1 = \tilde{w}_1 = E(u \log u) = \mu (\log \mu + \Psi(L+1) - \log L)$$

Considérons aussi les deux grandeurs suivantes :

– le moment m_1 , qui dans le cas de la loi Gamma est donné par

$$m_1 = \mu$$

– le log-moment \tilde{m}_1 qui dans le cas de la loi Gamma est donné par

$$\tilde{m}_1 = \log \mu + \Psi(L) - \log L$$

Connaissant les propriétés de la fonction Digamma (équation A.12) il est aisé de vérifier que

$$\frac{w_1}{m_1} - \tilde{m}_1 = \Psi(L+1) - \Psi(L) = \frac{1}{L}$$

On a donc trouvé une méthode originale permettant de calculer un estimateur du facteur de forme L par une relation simple :

$$\hat{L}_{AM} = \frac{m_1}{w_1 - \tilde{m}_1 m_1}$$

Cette expression évite l'inversion de la fonction Polygamma rencontrée dans la Méthode des Log-Moments, mais requiert le calcul de trois estimées au lieu de deux.

Récapitulatif

Si l'estimation du paramètre μ de la loi Gamma Généralisée est toujours à effectuer de la manière la plus simple et la plus efficace : la Méthode des Moments (qui donne, rappelons le, la même expression que la Méthode du Maximum de Vraisemblance), il n'en est pas de même pour le paramètre L .

Dans l'absolu, la Méthode du Maximum de Vraisemblance, qui, au passage, requiert l'estimation préalable de μ , est celle qui donne la variance minimale. Nous avons vu que cette variance s'exprime (équations 3.22 et 3.23) :

$$Var\{\hat{L}\}_{MMV} = \frac{1}{\Psi(1, L) - \frac{1}{L}} \simeq 2L(L - 0.25)$$

L'expression approchée des variances permet une comparaison rapide puisque :

$$Var\{\hat{L}\}_{MMV} \simeq 2L(L - 0.25) < Var\{\hat{L}\}_{MLM} \simeq 2L^2 < Var\{\hat{L}\}_{MM} = 2L(L + 1)$$

Plus précisément, nous allons donc comparer les différents estimateurs en calculant le rapport de leurs variances respectives avec la variance de l'estimateur de la Méthode du Maximum de Vraisemblance pour plusieurs valeurs usuelles de L . On donne aussi dans ce tableau l'écart type normalisé de la Méthode du Maximum de Vraisemblance (calculé avec $N=1$) :

L	$\sqrt{Var\{\hat{L}\}_{MMV}}$	$\frac{Var\{\hat{L}\}_{MM}}{Var\{\hat{L}\}_{MMV}}$	$\frac{Var\{\hat{L}\}_{MMOI}}{Var\{\hat{L}\}_{MMV}}$	$\frac{Var\{\hat{L}\}_{MLM}}{Var\{\hat{L}\}_{MMV}}$
1	1.245	2.580	1.157	1.328
2	2.627	1.739	1.026	1.177
3	4.029	1.478	1.009	1.118
5	6.848	1.279	1.002	1.069

On voit donc que la Méthode des Moments donne des résultats assez désastreux, en particulier pour les faibles valeurs de L : pour $L = 1$, elle requiert, à variance égale, 2.5 fois plus de points que la Méthode du Maximum de Vraisemblance.

La Méthode des Moments d'Ordre Inférieur donne des variances très proches des bornes de Cramer Rao : cependant, l'application de cette méthode nécessite de connaître L pour connaître l'ordre optimal ν . Comme l'illustre le tableau suivant, un choix unique $\nu = -0.35$ donne déjà d'excellents résultats globaux, les puristes pouvant éventuellement souhaiter ajouter une itération pour raffiner la valeur de ν .

L	$\frac{Var\{\hat{L}\}_{MMOI}}{Var\{\hat{L}\}_{MMV}} \Big _{\nu \text{ optimal}}$	$\frac{Var\{\hat{L}\}_{MMOI}}{Var\{\hat{L}\}_{MMV}} \Big _{\nu = -0.35}$
1	1.157	1.157
2	1.026	1.098
3	1.009	1.077
5	1.002	1.052

La Méthode des Log-Moments présente une caractéristique essentielle : celle de déduire directement un estimé de L à l'aide du second log-cumulant, et sans utiliser le paramètre μ comme le requiert la Méthode du Maximum de Vraisemblance. Nous verrons que cette propriété simplificatrice est à la clé d'un certain succès de cette méthode pour l'analyse des lois à 3 paramètres. Ceci compense largement le fait que la variance est légèrement plus grande que la borne de Cramer-Rao : se restreindre à ce simple critère aurait fait choisir sans hésitation la Méthode des Moments d'Ordre Inférieur. Soulignons enfin qu'en pratique, la mise en œuvre de la Méthode des Log-Moments est effectivement très aisée, même si l'inversion des fonctions Polygamma est alors requise.

Variances des estimateurs des log-cumulants

Enfin notons le résultat du calcul des variances des estimateurs des log-cumulants 2 et 3, que l'on déduit des expressions théoriques 3.7 et 3.8 :

$$\text{Var} \left\{ \hat{\kappa}_2 \right\} = \frac{1}{N} \left(\Psi(3, L) + 2 (\Psi(1, L))^2 \right) \quad (3.36)$$

$$\text{Var} \left\{ \hat{\kappa}_3 \right\} = \frac{1}{N} \left(6 (\Psi(1, L))^3 + 9 (\Psi(2, L))^2 + 9 \Psi(3, L) \Psi(1, L) + \Psi(5, L) \right) \quad (3.37)$$

3.5.4 Lois de Rayleigh et de Nakagami

L'expression de la loi de Nakagami est donnée par la relation 2.34 :

$$\mathcal{RN}[\mu, L](u) = \frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{L}}{\Gamma(L)} \left(\frac{\sqrt{L}u}{\mu} \right)^{2L-1} e^{-\left(\frac{\sqrt{L}u}{\mu}\right)^2}.$$

Il est facile de calculer la matrice de Fisher qui s'exprime :

$$\begin{pmatrix} \frac{4L}{\mu^2} & 0 \\ 0 & \Psi(1, L) - \frac{1}{L} \end{pmatrix}.$$

On remarque que le premier terme diagonal, qui donnera la borne de Cramer Rao pour l'estimation du paramètre μ est à un facteur multiplicatif près le même que celui de la matrice de Fisher de la loi Gamma Généralisée (équation 3.12). Le second terme, qui correspond à la borne de Cramer Rao pour l'estimation du paramètre L est exactement le même.

On en déduit que la borne de Cramer Rao pour la variance de l'estimée de L sera identique à celle de la loi Gamma. En revanche, l'estimation de μ pour la loi de Nakagami aura une variance 4 fois inférieure à celle du cas de la loi Gamma.

Méthode du Maximum de Vraisemblance

Le logarithme de la loi de Rayleigh-Nakagami s'écrit :

$$\log \mathcal{RN} = \log 2 - \log(\Gamma(L)) + L \log L - 2L \log \mu + (2L - 1) \log u - \frac{L}{\mu^2} u^2$$

Les estimées $(\hat{\mu}_{MMV}, \hat{L}_{MMV})$ se déduisent du calcul des dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial \log \mathcal{RN}}{\partial \mu} = -\frac{2L(\mu^2 - u^2)}{\mu^3} \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial \log \mathcal{RN}}{\partial L} = \frac{\mu^2 - u^2}{\mu^2} + \log L - \Psi(L) + \log u^2 - \log \mu^2 \quad (3.39)$$

L'expression 3.38 donne l'expression explicite de $\hat{\mu}_{MMV}$:

$$\hat{\mu}_{MMV} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N}} \quad (3.40)$$

ce qui permet, connaissant $\hat{\mu}_{MMV}$, de résoudre l'équation 3.39 sous forme d'un système implicite pour \hat{L}_{MMV} :

$$\log \hat{L}_{MMV} - \Psi(\hat{L}_{MMV}) = 2 \left(\log \hat{\mu}_{MMV} - \frac{\sum_{i=1}^N \log x_i}{N} \right) \quad (3.41)$$

Si l'on compare aux expressions obtenues dans le cas de la loi Gamma Généralisée (formules 3.18 et 3.19), on obtient explicitement le même problème à résoudre dès lors que l'on transforme les données initiales par leur carré (on passe donc de données en amplitude à des données en intensité).

Comme dans le cas de la loi Gamma Généralisée, on peut retenir un développement au premier ordre $\frac{1}{\log L - \Psi(L)} \simeq 1.98278 L - 0.2668$ permettant d'écrire une expression explicite de \hat{L}_{MMV} :

$$\hat{L}_{MMV} = 0.1346 + \frac{0.504}{\log \hat{\mu}^2 - \frac{\sum_{i=1}^N \log x_i^2}{N}}$$

Notons au passage que

$$\begin{aligned} \int_{u=0}^{\infty} \mathcal{RN} \log(\mathcal{RN}) du &= \log 2 - \log(\Gamma(L)) + L \log L - 2L \log \mu + (2L - 1) \tilde{\kappa}_1 - \frac{L}{\mu^2} m_2 \\ &= \log 2 - \log(\Gamma(L)) + (L - \frac{1}{2})\Psi(L) + \frac{1}{2} \log L - L - \log \mu \end{aligned}$$

Méthode des Moments

Les moments de la loi de Nakagami sont donnés par la relation 2.38 :

$$\begin{cases} m_1 &= \frac{\Gamma(L + \frac{1}{2})}{\sqrt{L} \Gamma(L)} \mu \\ m_2 &= \mu^2. \end{cases}$$

Les estimées $(\hat{\mu}_{MM}, \hat{L}_{MM})$ se déduisent alors par les relations suivantes :

$$\hat{\mu}_{MM} = \sqrt{\hat{m}_2} \quad (3.42)$$

$$\frac{\sqrt{\hat{L}_{MM}} \Gamma(\hat{L}_{MM})}{\Gamma(\hat{L}_{MM} + \frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{\hat{m}_2}}{\hat{m}_1} \quad (3.43)$$

\hat{L}_{MM} est obtenu analytiquement, mais sous une forme implicite mettant en œuvre la fonction de Pochhammer ¹ $\text{Poch}(x, \nu)$ (voir l'annexe A) définie par la relation :

$$\text{Poch}(x, \nu) = \frac{\Gamma(x + \nu)}{\Gamma(x)}.$$

On peut, grâce l'approximation A.8, obtenir alors une forme explicite de l'estimée de L :

$$\hat{L}_{MM} = \frac{1}{8} \frac{1}{\frac{\sqrt{\hat{m}_2}}{\hat{m}_1} - 1}, \quad (3.44)$$

expression assez similaire (à un facteur multiplicatif près) à la relation 3.25.

La même approximation permet alors d'écrire :

$$\hat{\mu}_{MM} \simeq \hat{m}_1 \left(1 + \frac{1}{8\sqrt{\hat{L}_{MM}}} \right)$$

Le tableau suivant donne pour différentes valeurs de L la valeur estimée \hat{L}_{MM} à l'aide de cette approximation.

L	\hat{L}	$\frac{\hat{L}}{L}$
.5	.493	.986
1.0	.973	.973
2.0	1.957	.978
3.0	2.951	.983
5.0	4.946	.989
8.0	7.942	.992

¹Cette fonction totalement méconnue est cependant une des fonctions mathématiques de base reconnue par Maple.

On peut aussi montrer que le coefficient de variation γ peut se mettre sous la forme :

$$\gamma \simeq \frac{1}{2\sqrt{L}} + \frac{1}{32L^{\frac{3}{2}}}$$

ce qui donne une approximation facilement utilisable

$$\hat{L}_{MM} \simeq \frac{1}{4\hat{\gamma}^2} = \frac{m_1^2}{m_2 - m_1^2} \quad (3.45)$$

identique, au facteur multiplicatif près, à l'expression obtenue pour la loi Gamma Généralisée (expression 3.26).

La variance de l'estimateur de μ_A s'exprime par la relation suivante :

$$Var\{\hat{\mu}\}_{MM} = \frac{1}{N} \frac{\mu^2}{4L}$$

Pour L , la mise en œuvre de la méthode de Kendall et Stuart est plus délicate puisque \hat{L} s'exprime sous forme implicite (équation 3.43). Ce calcul peut néanmoins être mené à bien et on obtient alors, toujours grâce à Maple, la relation :

$$Var\{\hat{L}\}_{MM} = \frac{1}{N} \frac{L(4\Gamma(L+1)^2 - 4L\Gamma(L+\frac{1}{2})^2 - \Gamma(L+\frac{1}{2})^2)}{(1+2L\Psi(L) - 2L\Psi(L+\frac{1}{2}))^2 \Gamma(L+\frac{1}{2})^2} \quad (3.46)$$

Cette expression est peu parlante et on préférera en général l'approximation suivante

$$Var\{\hat{L}\}_{MM} = \frac{2L(L-0.15)}{N}. \quad (3.47)$$

Méthode des Moments d'ordre inférieur

L'expression de la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi de Nakagami (relation 2.36) permet d'écrire l'expression de 3 moments d'ordre inférieur consécutifs :

$$\begin{aligned} m_\nu &= \left(\frac{\mu}{\sqrt{L}}\right)^\nu \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2} + L)}{\Gamma(L)} \\ m_{\nu+1} &= \left(\frac{\mu}{\sqrt{L}}\right) \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2} + L)}{\Gamma(\frac{\nu}{2} + L)} m_\nu \\ m_{\nu+2} &= \left(\frac{\mu}{\sqrt{L}}\right)^2 \left(\frac{\nu}{2} + L\right) m_\nu \end{aligned}$$

On en déduit alors des estimées de L et μ :

$$\hat{\mu}_{MMOI} = \sqrt{\frac{\hat{L}_{MMOI}}{\hat{L}_{MMOI} + \frac{\nu}{2}}} \frac{\sqrt{\hat{m}_{\nu+2}}}{\sqrt{\hat{m}_\nu}} \quad (3.48)$$

$$\frac{\sqrt{\hat{L}_{MMOI} + \frac{\nu}{2}} \Gamma(\hat{L}_{MMOI} + \frac{\nu}{2})}{\Gamma(\hat{L}_{MMOI} + \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2})} = \sqrt{\hat{m}_\nu} \frac{\sqrt{\hat{m}_{\nu+2}}}{\hat{m}_{\nu+1}} \quad (3.49)$$

Grâce à l'approximation A.7 (voir l'annexe A), on obtient alors explicitement la valeur de \hat{L} :

$$\hat{L}_{MMOI} = \frac{1}{8 \left(\sqrt{\hat{m}_\nu} \frac{\sqrt{\hat{m}_{\nu+2}}}{\hat{m}_{\nu+1}} - 1 \right)} - \frac{\nu}{2} \quad (3.50)$$

Il est important de noter que pour $\nu = 0$, on retrouve les équations 3.42 et 3.44.

Même en utilisant l'expression simplifiée pour \hat{L}_{MMOI} (équation 3.50), on ne peut obtenir une expression simple de la variance (la formule explicite tient en plusieurs lignes Latex). On peut néanmoins utiliser Maple pour évaluer le minimum de cette variance, et on peut observer que la valeur optimale de ν est aux alentours de $\nu = -0.35$ pour $L \in [1, 5]$.

En utilisant un code C généré à partir de cette formule par Maple, on peut néanmoins calculer numériquement les valeurs des variances et les "Gains" (rapport de la variance calculée avec la méthode des moments et de la variance calculée par la méthode des moments fractionnaires). Etant donné l'aspect plus symétrique de la d.d.p., l'intérêt d'utiliser la méthode des moments fractionnaires est moins évident.

L	Gain
1	1.17
2	1.07
3	1.04

On peut noter que pour $L = 1$ on peut se contenter, à variance d'estimateurs égale, de 85% des points requis par la simple méthode des moments.

Méthode des Log-Moments

Les log-cumulants de la loi de Nakagami s'écrivent (relation 2.40) :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_1 &= \log(\mu) + \frac{1}{2}(\Psi(L) - \log(L)) \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{1}{4}\Psi(1, L)\end{aligned}$$

Comme pour la loi Gamma, l'estimation de L s'effectue numériquement à partir de l'estimée du log-cumulant d'ordre 2 (qui ne dépend que de L), et ce sans problème majeur puisque les fonctions Gamma, Digamma et Polygamma sont monotones pour $L > 0$ (voir les illustrations de l'annexe A). On utilise cette estimée pour estimer le paramètre μ .

La variance de ces estimateurs est celle du cas de la loi Gamma : en effet, le passage de données en amplitude aux données en intensité est une transformation parfaitement adaptée aux échelles logarithmiques. Pour s'en convaincre, on peut aussi mener le calcul de la variance de l'estimateur de L , qui, exprimé en fonction de $(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2)$, et, malgré la lourdeur intrinsèque des relations initiales, conduit à la relation :

$$Var\{\hat{L}\}_{MLM} = \frac{1}{N} \frac{\Psi(3, L) + 2\Psi(1, L)^2}{\Psi(2, L)^2}$$

qui est exactement la même relation que celle pour les images en intensité (relation 3.5).

Méthode mixte

Considérons la transformée de Mellin $\Phi_X(s)$ de la fonction $u \mathcal{RN}(u)$. Elle s'écrit :

$$\Phi_X(s) = \mu^s \frac{\Gamma(\frac{s}{2} + L)}{L^{\frac{s}{2}} \Gamma(L)}$$

Les deux premiers log-moment mixtes \tilde{w}_1 et \tilde{w}_2 s'écrivent :

$$\begin{aligned}\tilde{w}_1 &= \frac{\mu \Gamma(L + \frac{1}{2})}{\sqrt{L} \Gamma(L)} \left(\log \mu + \frac{1}{2} \left(\Psi\left(L + \frac{1}{2}\right) - \log L \right) \right) \\ \tilde{w}_2 &= \mu^2 \left(\log \mu + \frac{1}{2} (\Psi(L + 1) - \log L) \right)\end{aligned}$$

Considérons aussi les trois grandeurs suivantes :

– les moments m_1 et m_2 , qui dans le cas de la loi de Nakagami sont donnés par

$$m_1 = \mu \frac{\Gamma(L + \frac{1}{2})}{\sqrt{L} \Gamma(L)} \quad m_2 = \mu^2$$

– le log-moment \tilde{m}_1 qui dans le cas de la loi de Nakagami est donné par

$$\tilde{m}_1 = \log \mu + \frac{1}{2} (\Psi(L) - \log L)$$

On peut alors obtenir deux expressions intéressantes :

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{w}_1}{m_1} - \tilde{m}_1 &= \frac{1}{2} \left(\Psi\left(L + \frac{1}{2}\right) - \Psi(L) \right) \\ \frac{\tilde{w}_2}{m_2} - \tilde{m}_1 &= \frac{1}{2} (\Psi(L + 1) - \Psi(L))\end{aligned}$$

Si la première expression requiert un schéma numérique pour obtenir L , la seconde se simplifie grâce aux propriétés de la fonction Digamma (équation A.12) et on obtient :

$$\frac{\tilde{w}_2}{m_2} - \tilde{m}_1 = \frac{1}{2L}$$

On a donc trouvé une méthode originale permettant de calculer un estimateur du facteur de forme L par une relation simple explicite :

$$\hat{L}_{AM} = \frac{1}{2} \left(\frac{m_2}{\tilde{w}_2 - \tilde{m}_1 m_2} \right) \quad (3.51)$$

Cette expression évite l'inversion de la fonction Polygamma rencontrée dans la Méthode des Log-Moments, mais requiert le calcul de quatre grandeurs au lieu de deux, dont le moment d'ordre 2.

Variances des estimateurs des log-cumulants

Enfin notons le résultat du calcul des variances des estimateurs des log-cumulants 2 et 3, que l'on déduit des expressions théoriques 3.7 et 3.8 :

$$\begin{aligned} \text{Var} \left\{ \hat{\kappa}_2 \right\} &= \frac{1}{N} \frac{1}{16} \left(\Psi(3, L) + 2 (\Psi(1, L))^2 \right) \\ \text{Var} \left\{ \hat{\kappa}_3 \right\} &= \frac{1}{N} \frac{1}{64} \left(6 (\Psi(1, L))^3 + 9 (\Psi(2, L))^2 + 9 \Psi(3, L) \Psi(1, L) + \Psi(5, L) \right) \end{aligned}$$

3.5.5 Loi Gamma Inverse

A partir du formalisme de l'équation 2.45 :

$$\mathcal{GI}[\mu, L](u) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{1}{L\mu} \left(\frac{L\mu}{u} \right)^{L+1} e^{-\frac{L\mu}{u}} \quad L \geq 0 \quad \mu > 0$$

la matrice de Fisher de la loi Gamma Inverse s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \frac{L}{\mu^2} & 0 \\ 0 & \Psi(1, L) - \frac{1}{L} \end{pmatrix}.$$

Elle est donc identique à celle de la loi Gamma.

Méthode du Maximum de Vraisemblance

Le logarithme de la loi Gamma Généralisée s'exprime comme :

$$\log \mathcal{GI} = L \log L - \log(\Gamma(L)) + (L+1) \log \left(\frac{\mu}{u} \right) - \frac{L\mu}{u} - \log \mu \quad (3.52)$$

Calculée sur N échantillons, la log-vraisemblance s'écrit :

$$\mathcal{LV}_{\mathcal{GI}} = N(L \log L - \log(\Gamma(L))) + (L+1) \sum_{i=1}^N \log \left(\frac{\mu}{x_i} \right) - L \sum_{i=1}^N \frac{\mu}{x_i} - N \log \mu \quad (3.53)$$

Les estimées $(\hat{\mu}, \hat{L})$ se déduisent du calcul des dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial \log \mathcal{GI}}{\partial \mu} = -\frac{L \left(\frac{\mu}{u} - 1 \right)}{\mu} \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial \log \mathcal{GI}}{\partial L} = 1 - \frac{\mu}{u} + \log L - \Psi(L) + \log \mu - \log u \quad (3.55)$$

La résolution de l'équation 3.54 donne la valeur explicite de $\hat{\mu}$:

$$\frac{1}{\hat{\mu}_{MLV}} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{1}{x_i}}{N}. \quad (3.56)$$

Cette expression est parfaitement en accord avec l'estimateur de μ pour la loi Gamma Généralisée (expression 3.18) et avec notre définition de la loi Gamma Inverse (si une variable x suit une loi Gamma

Généralisée, alors la variable $\frac{1}{x}$ suit une loi Gamma Inverse). Connaissant $\hat{\mu}_{MLV}$, on résoud alors l'équation 3.55 sous forme d'un système implicite pour \hat{L}_{MLV} :

$$\log \hat{L}_{MLV} - \Psi(\hat{L}_{MLV}) = - \left(\log \hat{\mu}_{MLV} - \frac{\sum_{i=1}^N \log x_i}{N} \right) \quad (3.57)$$

avec Ψ la fonction Digamma. C'est, au signe près, la même expression que dans le cas de la loi Gamma Généralisée (expression 3.19).

Si l'on considère ces estimées, on peut alors réécrire l'expression 3.53 de la log-vraisemblance sous la forme :

$$\mathcal{LV}_{\mathcal{G}} = N(-\log(\Gamma(L)) + (L+1)\Psi(L) - \log L - L - \log \mu) \quad (3.58)$$

Notons au passage que

$$\begin{aligned} \int_{u=0}^{\infty} \mathcal{GI} \log(\mathcal{GI}) du &= L \log L - \log(\Gamma(L)) + L \log \mu - (L+1) \tilde{\kappa}_1 - L \mu m_{-1} \\ &= -\log(\Gamma(L)) + (L+1)\Psi(L) - \log L - L - \log \mu \end{aligned}$$

Méthode des Moments

Pour $L > 2$, les moments de la loi Gamma Inverse sont donnés par la relation 2.50 :

$$\begin{cases} m_1 &= \frac{L}{L-1} \mu \\ m_2 &= \frac{L^2}{(L-1)(L-2)} \mu^2 \end{cases}$$

On retrouve très aisément les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{L}_{MM} &= \frac{2m_2 - m_1^2}{m_2 - m_1^2} \\ \hat{\mu}_{MM} &= \frac{m_1 m_2}{2m_2 - m_1^2} \end{aligned}$$

dans la mesure où ces deux premiers moments existent, c'est à dire sous la contrainte $L > 2$.

Dans la mesure où le moment d'ordre 4 est défini ($L > 4$), la démarche de Kendall et Stuart (formule 3.2) peut s'appliquer sur ce système. On obtient :

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{L})_{MM} &= \frac{1}{N} \frac{2(L+2)(L-1)^2(L-2)}{(L-3)(L-4)} \\ \text{Var}(\hat{\mu})_{MM} &= \frac{\mu^2}{N} \frac{(L-1)(L^3 - 8L^2 + 24L - 16)}{L^2(L-2)(L-3)(L-4)} \end{aligned}$$

Remarquons que ces deux expressions tendent vers l'infini lorsque L tend vers 4.

Méthode des Moments d'ordre inférieur

Puisque la loi Gamma inverse est une loi à queue lourde, cette méthode apporte donc une grande amélioration par rapport à la traditionnelle méthode des moments puisque l'on n'est plus limité par la contrainte $L > 2$.

Dans la mesure où l'on peut calculer m_ν , $m_{\nu+1}$ et $m_{\nu+2}$, les paramètres L et μ peuvent être estimés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{L}_{MMOI} &= \frac{2m_{\nu+2} - m_{\nu+1}^2}{m_\nu m_{\nu+2} - m_{\nu+1}^2} + \nu \\ \hat{\mu}_{MMOI} &= \frac{m_{\nu+1} m_{\nu+2}}{2m_{\nu+2} m_\nu - m_{\nu+1}^2 + \nu(m_{\nu+2} m_\nu - m_{\nu+1}^2)} \end{aligned}$$

Dans la mesure où le moment d'ordre $2\nu + 4$ est défini, la méthode de Kendall et Stuart peut alors s'appliquer pour calculer les variances de ces deux estimateurs, ce qui donne :

Variance de μ				Variance de L			
L	Var_{MMOI}	Var_{MM}	gain	L	Var_{MMOI}	Var_{MM}	gain
5	.200	.773	3.85	5	47.428	336.000	7.08
6	.167	.324	1.93	6	68.918	266.666	3.86
7	.143	.210	1.46	7	94.411	270.000	2.85
8	.125	.160	1.28	8	123.906	294.000	2.37
9	.111	.132	1.18	9	157.402	328.533	2.08
10	.100	.113	1.13	10	194.899	370.285	1.89

TAB. 3.1 – Comparaison des variances de la méthode des moments (Var_{MM}) et de la Méthode des Moments d'Ordre Inférieur (Var_{MMOI} avec $\nu = -1.5$) calculées pour la variable μ (à gauche) et la variable L (à droite). Le “gain”, calculé comme le rapport de Var_{MM} sur Var_{MMOI} , correspond au ratio du nombre de points requis par les deux méthodes à variance égale.

$$Var\{\hat{L}\}_{MMOI} = \frac{1}{N} \frac{\Gamma(L-4-2\nu)\Gamma(L)}{(\Gamma(L-2-\nu))^2} (2L^2 + 2L + 4L\nu^2 + 8L\nu + \nu^4 - 8\nu - 4 - 3\nu^2 + 2\nu^3)$$

$$Var\{\hat{\mu}\}_{MMOI} = \frac{1}{N} \frac{\Gamma(L-4-2\nu)\Gamma(L+1)}{(L-1)^4 (\Gamma(L-1-\nu))^2} L\mu^2 (L^3 - 8L^2 - \nu^2L^2 - 6\nu L^2 + 8\nu^3L + 19L + 2L\nu^4 + 28L\nu + 18L\nu^2 - 16\nu^2 + 4\nu^4 + \nu^6 - 22\nu - 4\nu^3 - 12 + 4\nu^5)$$

On peut alors rechercher les valeurs de ν minimisant cette variance. Le calcul des dérivées ne donne que des expressions implicites lourdes. En revanche, on peut simplement tracer pour différentes valeurs de ν ces variances (figure 3.5) et on peut constater que l'optimum est atteint sur un voisinage étendu autour de la valeur -1.5. C'est cette valeur que nous allons choisir pour quantifier le gain qu'apporte la méthode des moments d'ordre inférieurs vis à vis de la méthode des moments. Les résultats sont synthétisés dans le tableau 3.1.

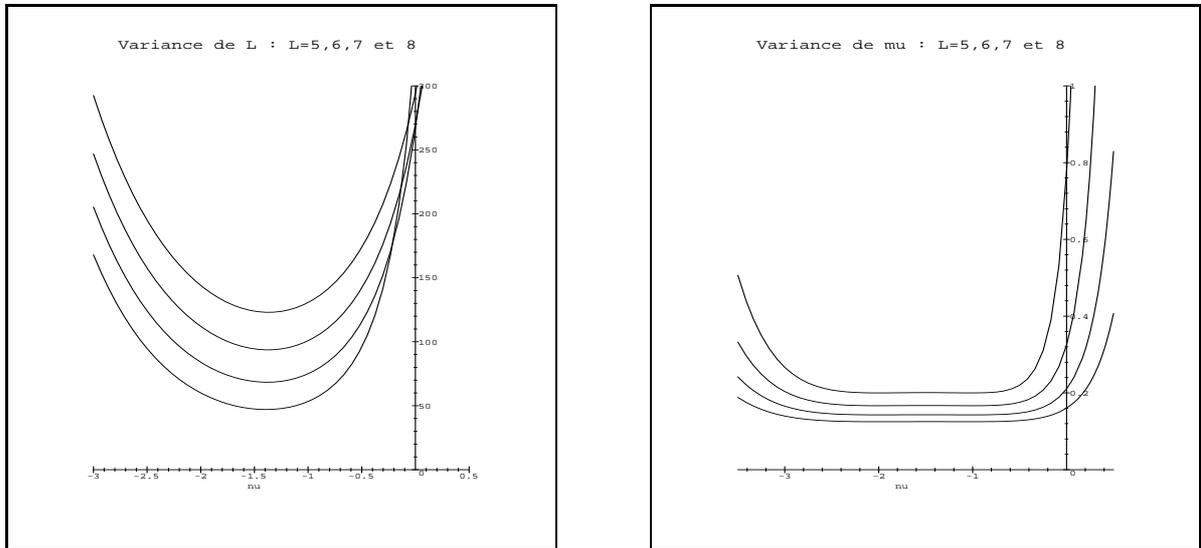


FIG. 3.5 – À gauche Variance de l'estimateur de L en fonction de ν , à droite, variance de l'estimateur de μ en fonction de ν

Méthode des Log-Moments

Les log-cumulants de la loi Gamma Inverse sont donnés par la relation 2.51

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 &= \log(\mu) - (\Psi(L) - \log(L)) \\ \tilde{\kappa}_2 &= \Psi(1, L) \end{cases}$$

On retrouve, à un signe près, le même système à résoudre (numériquement) que dans le cas de la loi Gamma. On déduit en effet aisément le système :

$$\log(\hat{\mu}_{MLM}) + \log(\hat{L}_{MLM}) - \Psi(\hat{L}_{MLM}) = \frac{\sum_{i=1}^N \log x_i}{N} \quad (3.59)$$

$$\Psi(1, \hat{L}_{MLM}) = \frac{\sum_{i=1}^N (\log x_i)^2}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^N \log x_i}{N} \right)^2 \quad (3.60)$$

que l'on résoud en calculant d'abord \hat{L}_{MLM} à partir de la relation implicite 3.60, valeur que l'on porte dans l'expression 3.59 pour en déduire $\hat{\mu}_{MLM}$.

Remarquons que l'estimée de L est strictement identique au cas de la loi Gamma, seule l'étape conduisant à l'estimée de μ diffère (par un signe).

La variance de l'estimateur de L sera donc le même :

$$Var\{\hat{L}\}_{MLM} = \frac{1}{N} \frac{\Psi(3, L) + 2\Psi(1, L)^2}{\Psi(2, L)^2}$$

Méthode mixte

Considérons la transformée de Mellin $\Phi_X(s)$ de la fonction $u \mathcal{GI}(u)$. Elle s'écrit :

$$\Phi_X(s) = \mu^s \frac{\Gamma(L-s)}{L^{-s} \Gamma(L)}$$

Le premier log-moment mixte \tilde{w}_1 s'écrit :

$$\tilde{w}_1 = \mu \frac{L}{L-1} (\log \mu + \log L - \Psi(L-1))$$

Considérons aussi les deux grandeurs suivantes :

– le moment m_1 , qui dans le cas de la loi Gamma Inverse est donné par

$$m_1 = \mu \frac{L}{L-1}$$

– le log-moment \tilde{m}_1 qui dans le cas de la loi Gamma Inverse est donné par

$$\tilde{m}_1 = \log \mu + \log L - \Psi(L)$$

Connaissant les propriétés de la fonction Digamma (équation A.12) il est aisé de vérifier que, pour $L > 1$:

$$\frac{\tilde{w}_1}{m_1} - \tilde{m}_1 = \Psi(L) - \Psi(L-1) = \frac{1}{L-1}$$

On a donc trouvé une méthode originale permettant de calculer un estimateur du facteur de forme L par une relation simple (assez proche de celle trouvée pour la loi Gamma) :

$$\hat{L}_{AM} = 1 + \frac{m_1}{\tilde{w}_1 - \tilde{m}_1 m_1}$$

Cette expression évite l'inversion de la fonction Polygamma rencontrée dans la Méthode des Log-Moments, mais requiert le calcul de trois estimées au lieu de deux, dont le moment d'ordre 1, défini seulement pour $L > 1$.

Variances des estimateurs des log-cumulants

Enfin notons le résultat du calcul des variances des estimateurs des log-cumulants 2 et 3, que l'on déduit des expressions théoriques 3.7 et 3.8 :

$$\begin{aligned} Var\{\hat{\kappa}_2\} &= \frac{1}{N} \left(\Psi(3, L) + 2(\Psi(1, L))^2 \right) \\ Var\{\hat{\kappa}_3\} &= \frac{1}{N} \left(6(\Psi(1, L))^3 + 9(\Psi(2, L))^2 + 9\Psi(3, L)\Psi(1, L) + \Psi(5, L) \right) \end{aligned}$$

Le résultat est identique à celui trouvé pour la loi Gamma.

3.5.6 La loi de Weibull

L'expression de la loi de Weibull est donnée par la relation 2.54 :

$$\mathcal{W}[\mu, \eta](u) = \frac{\eta}{\mu} \left(\frac{u}{\mu}\right)^{\eta-1} e^{-\left(\frac{u}{\mu}\right)^\eta}$$

La matrice de Fisher s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \frac{\eta^2}{\mu^2} & -\frac{\Psi(1)+1}{\eta^2} \\ -\frac{\Psi(1)+1}{\mu} & \frac{1+2\Psi(1)+\Psi(1)^2+\Psi(1,1)}{\eta^2} \end{pmatrix}, \quad (3.61)$$

Méthode du Maximum de Vraisemblance

Les estimées $(\hat{\mu}, \hat{\eta})$ se déduisent du calcul des dérivées partielles suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log \mathcal{W}}{d\mu} &= \frac{\left(\frac{x}{\mu}\right)^\eta - 1}{\frac{\mu}{\eta}} \\ \frac{\partial \log \mathcal{W}}{d\eta} &= -\frac{\eta \log\left(\frac{x}{\mu}\right) \left(\left(\frac{x}{\mu}\right)^\eta - 1\right) - 1}{\eta} \end{aligned}$$

La première relation permet d'écrire :

$$(\hat{\mu})^\eta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i)^\eta. \quad (3.62)$$

Contrairement à la loi Gamma Généralisée ou à la loi de Nakagami, cette relation met en jeu aussi le second paramètre η (on peut vérifier au passage que les deux cas particuliers $\eta = 1$ et $\eta = 2$ donnent bien les estimées obtenues dans le cas de la loi Gamma Généralisée et de la loi de Nakagami). Cependant, elle permet d'écrire la seconde relation sous une forme plus simple :

$$\frac{1}{\hat{\eta}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log x_i \left(\left(\frac{x_i}{\hat{\mu}}\right)^\eta - 1 \right).$$

On constate donc que le système constitué de ces deux équations n'est pas trivial à résoudre, ce qui explique que personne n'utilise en pratique la Méthode du Maximum de Vraisemblance à la loi de Weibull.

Méthode des Moments

Les moments de la loi de Weibull sont donnés par la relation 2.58 :

$$\begin{cases} m_1 &= \Gamma\left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \mu \\ m_2 &= \Gamma\left(1 + \frac{2}{\eta}\right) \mu^2 \end{cases}$$

Ce système n'est pas directement inversible. On peut, par exemple, commencer par estimer η et recherchant numériquement $\hat{\eta}$ tel que :

$$\frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\hat{\eta}}\right)}{\left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\hat{\eta}}\right)\right)^2} = \frac{\hat{m}_2}{\hat{m}_1^2}$$

puis, en utilisant cet estimateur dans la relation du premier moment, en tirer un estimateur de μ (ou bien utiliser cette valeur de η dans la relation 3.62 de la Méthode du Maximum de Vraisemblance).

Cette méthode est très rapidement apparue comme difficilement utilisable : comme dans le cadre de la Méthode du Maximum de Vraisemblance, pratiquement personne n'utilise la Méthode des Moments pour estimer les paramètres de la loi de Weibull. Ces difficultés intrinsèques ont conduit Menon en 1963 [48] à proposer une méthode originale qui est celle utilisée en pratique et qui tire en fait ses fondements théoriques dans le formalisme des log-moments.

Méthode des Log-Moments

Les deux premiers log-cumulants de la loi de Weibull s'écrivent (relation 2.61) :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_1 &= \log \mu - \frac{\gamma_E}{\eta} = \log \mu + \frac{\Psi(1)}{\eta} \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{\Psi(1,1)}{\eta^2}\end{aligned}$$

Ce système s'inverse comme suit :

$$\begin{aligned}\eta_{MLM} &= \sqrt{\frac{\Psi(1,1)}{\tilde{\kappa}_2}} \\ \mu_{MLM} &= e^{-\frac{\Psi(1)}{\eta}} e^{\tilde{\kappa}_1}\end{aligned}$$

On retrouve exactement le système proposé par Menon ([48]), qui de manière assez empirique avait proposé ces deux expressions en passant en échelle logarithmique.

Méthode Mixte

Considérons la transformée de Mellin $\Phi_X(s)$ de la fonction $u \mathcal{W}(u)$. Elle s'écrit :

$$\Phi_X(s) = \mu^s \Gamma\left(\frac{s}{\eta} + 1\right)$$

Le premier log-moment mixte \tilde{w}_1 s'écrit :

$$\tilde{w}_1 = \mu \Gamma\left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \left(\log \mu + \frac{\Psi\left(\frac{1}{\eta} + 1\right)}{\eta}\right)$$

et connaissant le premier moment m_1 et le premier log-moment \tilde{m}_1 , on en déduit :

$$\frac{\tilde{w}_1}{m_1} - \tilde{m}_1 = \frac{\Psi\left(1 + \frac{1}{\eta}\right) - \Psi(1)}{\eta}$$

Le paramètre η n'est obtenu uniquement que de manière implicite et requiert une solution numérique aisée à mettre en œuvre étant donné les propriétés de la fonction Digamma. Mais la Méthode mixte ne présente plus alors aucun intérêt vis à vis de la méthode de Menon.

Variances des estimateurs des log-cumulants

Enfin notons le résultat du calcul des variances des estimateurs des log-cumulants 2 et 3, que l'on déduit des expressions théoriques 3.7 et 3.8 :

$$\begin{aligned}Var\left\{\hat{\kappa}_2\right\} &= \frac{1}{N} \frac{1}{\eta^4} \left(\Psi(3,1) + 2(\Psi(1,1))^2\right) \\ Var\left\{\hat{\kappa}_3\right\} &= \frac{1}{N} \frac{1}{\eta^6} \left(6(\Psi(1,1))^3 + 9(\Psi(2,1))^2 + 9\Psi(3,1)\Psi(1,1) + \Psi(5,1)\right)\end{aligned}$$

On retrouve pour $\eta = 1$ les expressions trouvées pour la loi Gamma et pour $\eta = 2$ celles trouvées pour la loi de Rayleigh.

3.5.7 La loi gaussienne généralisée sur \mathbb{R}^+

L'expression de la loi gaussienne généralisée est donnée par la relation 2.63 :

$$\mathcal{GG}[\mu, \eta](u) = \frac{1}{\mu} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\eta+1}{\eta}\right)} e^{-\left(\frac{u}{\mu}\right)^\eta} \quad u \in \mathbb{R}^+$$

La matrice de Fisher s'exprime :

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{\eta}{\mu^2} & -\frac{1+\eta+\Psi\left(\frac{1}{\eta}\right)}{\mu \eta} \\ -\frac{1+\eta+\Psi\left(\frac{1}{\eta}\right)}{\mu \eta} & \frac{1}{\eta^4} \left(\eta^2 + \Psi\left(1, \frac{1}{\eta}\right) (1+\eta) + \Psi\left(\frac{1}{\eta}\right) \left(2(\eta + \eta^2) + \eta \Psi\left(\frac{1}{\eta}\right) \right) \right) \end{array} \right).$$

Le paramètre η de la loi gaussienne généralisée peut être estimé de plusieurs manières :

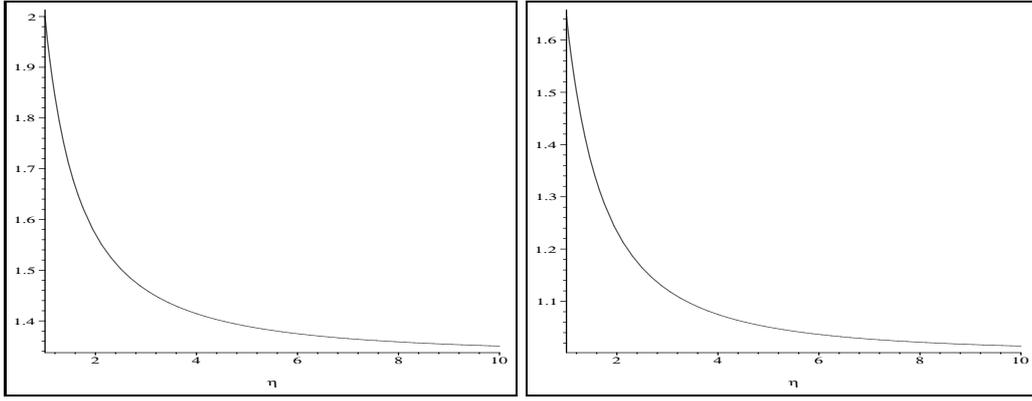


FIG. 3.6 – A gauche, allure de la courbe $\frac{\Gamma(\frac{3}{\eta})\Gamma(\frac{1}{\eta})}{(\Gamma(\frac{2}{\eta}))^2}$ (équation 3.63). A droite, allure de la courbe $\frac{\Psi(1, \frac{1}{\eta})}{\eta^2}$ (équation 3.64). On observe dans les deux cas le caractère monotone des fonctions, ce qui permet d'envisager un schéma numérique pour leur inversion.

– par la méthode des moments. En effet on montre aisément que

$$\frac{m_2}{m_1^2} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{\eta}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\eta}\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{2}{\eta}\right)\right)^2} \quad (3.63)$$

η est donc exprimé de manière implicite, mais peut s'obtenir facilement de manière numérique (voir l'allure de l'expression 3.63 en fonction de η , figure 3.6. On montre aussi la convergence vers la valeur $\frac{4}{3}$ pour $\eta \rightarrow \infty$).

– par la méthode des log-moments puisque

$$\tilde{\kappa}_2 = \tilde{m}_2 - \tilde{m}_1^2 = \frac{\Psi(1, \frac{1}{\eta})}{\eta^2} \quad (3.64)$$

Ici aussi, η est exprimé de manière implicite mais se résout numériquement sans problème (voir l'allure de l'expression 3.64 en fonction de η , figure 3.6. On montre aussi la convergence vers la valeur 1 pour $\eta \rightarrow \infty$).

Il est possible de calculer analytiquement les variances de l'estimateur de η pour ces deux méthodes. cependant, leurs expressions analytiques, obtenues avec Maple, sont démesurées et peu compréhensibles. Une interprétation graphique s'impose alors. On a tracé sur le même graphique (figure 3.7) l'écart type de la méthode des moments et celui de la méthode des Log-Moments (en gras). On voit que pour $\eta < 0.6$ il est préférable d'utiliser la méthode des Log-Moments et que pour $\eta > 0.6$ il est préférable d'utiliser la méthode des moments.

3.6 Lois à 3 paramètres

3.6.1 La loi de Weibull Généralisée

Elle est donnée par l'expression 2.66 :

$$\mathcal{WG}[\mu, L, \eta](u) = \frac{|\eta|}{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{\Gamma(L)} \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} u}{\mu}\right)^{\eta L - 1} e^{-\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} u}{\mu}\right)^\eta}.$$

Le calcul de la matrice de Fisher ne présente aucune difficulté et s'écrit :

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{L\eta^2}{\mu^2} & 0 & -\frac{\Psi(L) + \frac{1}{L} - \log L}{L\eta} \\ 0 & \Psi(1, L) - \frac{1}{L} & \frac{1}{L\eta} \\ -\frac{\Psi(L) + \frac{1}{L} - \log L}{\mu} & \frac{1}{L\eta} & \frac{1 + 2(L-1)\log L + 2\Psi(L)(1 - 2L\log L) + L\Psi(L)^2 + L\Psi(1, L)}{\eta^2} \end{array} \right) \quad (3.65)$$

Si l'on compare avec la matrice de Fisher de la loi de Weibull (équation 3.61), on constate que les termes communs de ces deux matrices correspondent au cas limite $L = 1$.

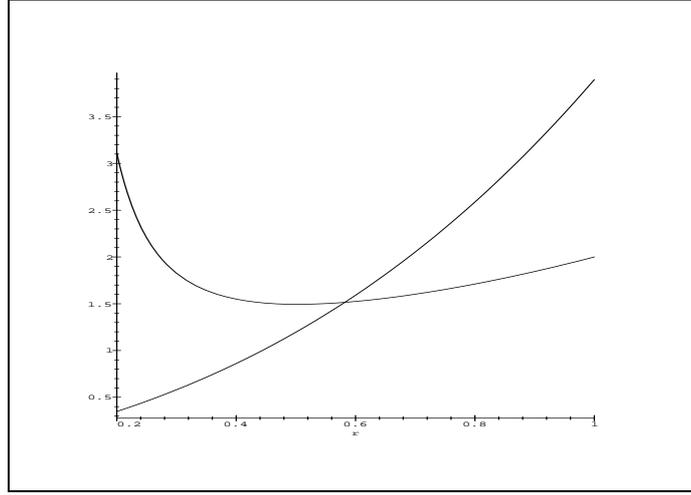


FIG. 3.7 – Loi gaussienne généralisée : écart type de l'estimateur de η pour la méthode des log-cumulants (en gras) et celle des moments.

De même, si l'on compare avec la matrice de Fisher de la loi Gamma Généralisée (équation 3.12), on constate que les termes communs de ces deux matrices correspondent au cas limite $\eta = 1$.

Méthode du Maximum de Vraisemblance

Les estimées $(\hat{\mu}, \hat{L}, \hat{\eta})$ se déduisent du calcul des dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial \log \mathcal{W}\mathcal{G}}{\partial \mu} = \frac{\left(\frac{u}{\mu}\right)^\eta - 1}{\frac{\mu}{L\eta}} \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial \log \mathcal{W}\mathcal{G}}{d\eta} = - \frac{\eta \log \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} u}{\mu}\right) \left(\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} u}{\mu}\right)^\eta - L\right) + L \log L \left(1 - \left(\frac{u}{\mu}\right)^\eta\right) - 1}{\eta} \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial \log \mathcal{W}\mathcal{G}}{\partial L} = \log L - \Psi(L) + \eta (\log u - \log \mu) + 1 - \left(\frac{u}{\mu}\right)^\eta \quad (3.68)$$

Comme dans le cas de la loi de Weibull, l'équation 3.66 permet d'écrire :

$$(\hat{\mu})^\eta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i)^\eta.$$

Cette relation ne dépend pas de L , mais requiert malheureusement le paramètre η . On peut cependant noter que les cas $\eta = 1$ et $\eta = 2$ donneront les expressions trouvées dans le cas de la loi Gamma Généralisée et celui de la loi de Nakagami : pour ces deux cas, l'expression de \hat{L} obtenue à partir de l'équation 3.68 permet de retrouver l'estimée de L de la loi Gamma Généralisée et de la loi de Nakagami.

Dans le cas général (η inconnu), il semble très difficile de résoudre simplement ce système de trois équations à trois inconnues.

Méthode des Moments

A partir de la relation donnant les moments d'ordre r (équation 2.68), on peut écrire les trois premiers moments (à condition bien évidemment que la relation $3 > -\eta L$ soit vérifiée) :

$$\begin{cases} m_1 &= \mu \frac{\Gamma(L + \frac{1}{\eta})}{L^{\frac{1}{\eta}} \Gamma(L)} \\ m_2 &= \mu^2 \frac{\Gamma(L + \frac{2}{\eta})}{L^{\frac{2}{\eta}} \Gamma(L)} \\ m_3 &= \mu^3 \frac{\Gamma(L + \frac{3}{\eta})}{L^{\frac{3}{\eta}} \Gamma(L)} \end{cases}$$

Là aussi, il semble difficile d'envisager une méthode simple permettant de retrouver les paramètres à partir de ces trois relations.

La Méthode des Moments d'Ordre Inférieur ne permet aucune simplification de ce système.

Méthode des Log-Moments

C'est uniquement dans ce cadre que l'on peut facilement estimer les paramètres de la loi de Weibull Généralisée. En effet, les trois premiers log-moments s'écrivent :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 &= \log(\mu) + \frac{\Psi(L) - \log(L)}{\eta} \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{\Psi(1, L)}{\eta^2} \\ \tilde{\kappa}_3 &= \frac{\Psi(2, L)}{\eta^3} \end{cases}$$

Un estimateur de L vérifie alors la relation :

$$\frac{\tilde{\kappa}_2^3}{\tilde{\kappa}_3^2} = \frac{\Psi(1, \hat{L})^3}{\Psi(2, \hat{L})^2} \quad (3.69)$$

Si cette relation n'a pas d'inverse analytique, il est néanmoins facile de l'inverser numériquement : une simple observation du comportement monotone de cette fonction (figure 3.8) permet de s'en convaincre. Il est aussi intéressant de remarquer que

$$\lim_{L=0} \frac{\Psi(1, \hat{L})^3}{\Psi(2, \hat{L})^2} = \frac{1}{4},$$

ainsi que

$$\lim_{L=\infty} \frac{1}{L} \frac{\Psi(1, \hat{L})^3}{\Psi(2, \hat{L})^2} = 1$$

ce qui permet de fixer un critère permettant de décider si une loi empirique peut être modélisée par une loi de Weibull Généralisée.

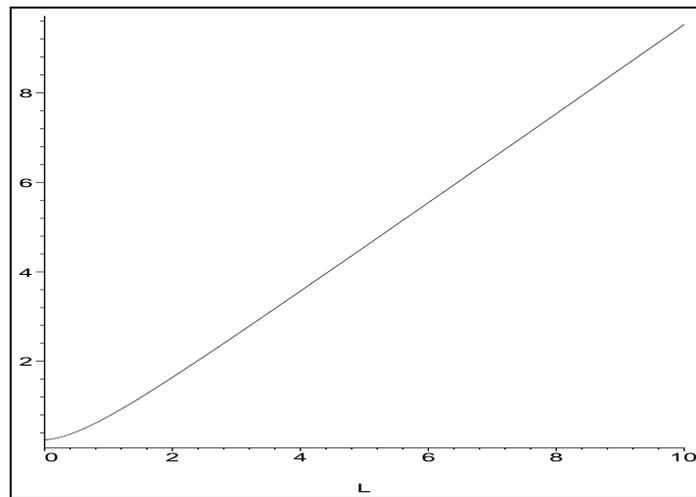


FIG. 3.8 – Loi de Weibull généralisée : allure de la courbe $\frac{\Psi(1, \hat{L})^3}{\Psi(2, \hat{L})^2}$.

Une fois connu l'estimateur de L , il est alors aisé de déduire un estimateur de η puis de μ en utilisant les log-cumulants d'ordre 1 et 2.

Comme dans le cadre de la loi de Weibull, la méthode mixte ne permet pas d'obtenir un système explicite.

Variances des estimateurs des log-cumulants

Enfin notons le résultat du calcul des variances des estimateurs des log-cumulants 2 et 3, que l'on déduit des expressions théoriques 3.7 et 3.8 :

$$\begin{aligned} \text{Var} \left\{ \hat{\kappa}_2 \right\} &= \frac{1}{N} \frac{1}{\eta^4} \left(\Psi(3, L) + 2 (\Psi(1, L))^2 \right) \\ \text{Var} \left\{ \hat{\kappa}_3 \right\} &= \frac{1}{N} \frac{1}{\eta^6} \left(6 (\Psi(1, L))^3 + 9 (\Psi(2, L))^2 + 9 \Psi(3, L) \Psi(1, L) + \Psi(5, L) \right) \end{aligned}$$

3.6.2 La loi \mathcal{K}

La loi \mathcal{K} est donc une loi à 3 paramètres μ, L, M définie par l'expression 2.75 :

$$\mathcal{K}_{\mathcal{I}}[\mu, L, M](u) = \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{2LM}{\mu} \left(\frac{LMu}{\mu} \right)^{\frac{M+L}{2}-1} K_{M-L} \left[2 \left(\frac{LMu}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

avec K fonction de Bessel modifiée de seconde espèce.

L'estimation des paramètres de cette loi se trouve principalement dans la littérature dédiée au radar, qui privilégie souvent le cas $M = 1$ (cas d'un radar monovue) que nous noterons ici $\mathcal{K}1$ [6] :

$$\mathcal{K}1[\mu, L](u) = \frac{2}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{Lu}{\mu} \right)^{\frac{L-1}{2}} K_{L-1} \left[2 \left(\frac{Lu}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (3.70)$$

Il n'est pas possible de calculer la matrice d'information de Fisher. En effet, la loi \mathcal{K} fait intervenir une fonction de Bessel d'indice $M - L$: K_{M-L} et on ne connaît pas la forme analytique de la dérivée d'une fonction de Bessel par rapport à son indice.

Méthode du Maximum de Vraisemblance

Puisqu'il n'est pas possible d'obtenir la dérivée logarithmique de la loi \mathcal{K} vis à vis des variables L et M , la méthode du maximum de vraisemblance ne pourra donc être appliquée pour l'estimation de ces deux paramètres.

La dérivée par rapport au paramètre μ s'écrit :

$$\frac{\partial \log \mathcal{K}}{\partial \mu} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{K_{M-L+1} \left[2 \left(\frac{LMu}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \right]}{K_{M-L} \left[2 \left(\frac{LMu}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \right]} \left(\frac{LMu}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \quad (3.71)$$

Si l'on connaît L et M , il est alors possible d'estimer μ grâce à cette équation : cependant, la méthode itérative à mettre en œuvre sera très lourde et coûteuse en temps calcul.

$\mathcal{K}1[\mu, L]$: Méthode des Moments

Dans le cas particulier de la loi $\mathcal{K}1[\mu, L]$, le système constitué des deux premiers moments est aisé à résoudre :

$$\begin{aligned} m_1 &= \mu \\ m_2 &= \frac{L+1}{L} 2\mu^2 \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\hat{L}_{MM} = \frac{2m_1^2}{m_2 - 2m_1^2}$$

$\mathcal{K}[\mu, L, M]$: Méthode des Moments

Les trois premiers moments (entiers) de la loi \mathcal{K} se déduisent de sa fonction caractéristique de deuxième espèce (relation 2.74) et s'écrivent :

$$\begin{cases} m_1 = & \mu \\ m_2 = & \frac{L+1}{L} \frac{M+1}{M} \mu^2 \\ m_3 = & \frac{(L+1)(L+2)}{L^2} \frac{(M+1)(M+2)}{M^2} \mu^3 \end{cases}$$

Ce système peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} m_1 &= \mu \\ R_1 &= \frac{1}{m_1} \frac{m_2}{m_1} = \frac{(L+1)(M+1)}{L M} \\ R_2 &= \frac{1}{m_1} \frac{m_3}{m_2} = \frac{(L+2)(M+2)}{L M} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Si l'on connaît des estimées des trois premiers moments \hat{m}_1 , \hat{m}_2 et \hat{m}_3 , on obtient directement les estimées $\hat{\mu}$, \hat{L} et \hat{M} en résolvant le système 3.72. Pour cela, connaissant les estimées \hat{R}_1 et \hat{R}_2 , en posant $\hat{R}'_1 = \hat{R}_1 - 1$ et $\hat{R}'_2 = \frac{\hat{R}_2 - 1}{2}$, on montre que \hat{M} et \hat{L} sont alors les solutions du polynôme du second degré en x suivant :

$$\Pi(x) = x^2 (R'_2 - R'_1) + x (R'_2 - 2R'_1) + 1 = 0$$

Il est aisé d'obtenir les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{MM} &= \hat{m}_1 \\ \hat{L}_{MM} &= \frac{2\hat{R}'_1 - \hat{R}'_2 + \sqrt{(2\hat{R}'_1 - \hat{R}'_2)^2 + 4(\hat{R}'_1 - \hat{R}'_2)}}{2(\hat{R}'_2 - \hat{R}'_1)} \\ \hat{M}_{MM} &= \frac{2\hat{R}'_1 - \hat{R}'_2 - \sqrt{(2\hat{R}'_1 - \hat{R}'_2)^2 + 4(\hat{R}'_1 - \hat{R}'_2)}}{2(\hat{R}'_2 - \hat{R}'_1)} \end{aligned}$$

Notons qu'il n'est pas possible de séparer \hat{L} et \hat{M} , qui sont les deux solutions d'une équation du second degré : ceci se déduit directement de la forme analytique de la loi \mathcal{K} , sachant par ailleurs que $K_{L-M}(x) = K_{M-L}(x)$.

 $\mathcal{K}[\mu, L, M]$: Méthode des Moments fractionnaires

En prenant des moments fractionnaires, on peut écrire les relations suivantes suivantes :

$$\begin{aligned} m_{\nu+1} &= \frac{\mu}{L M} (M + \nu) (L + \nu) m_{\nu} \\ m_{\nu+2} &= \frac{\mu}{L M} (M + \nu + 1) (L + \nu + 1) m_{\nu+1} \\ m_{\nu+3} &= \frac{\mu}{L M} (M + \nu + 2) (L + \nu + 2) m_{\nu+2} \end{aligned}$$

ce qui peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{m_{\nu+1}}{m_{\nu}} = \mu \frac{(L + \nu) (M + \nu)}{L M} \\ R_1 &= \frac{m_{\nu+2}}{m_{\nu+1}} = \mu \frac{(L + \nu + 1) (M + \nu + 1)}{L M} \\ R_2 &= \frac{m_{\nu+3}}{m_{\nu+2}} = \mu \frac{(L + \nu + 2) (M + \nu + 2)}{L M} \end{aligned} \quad (3.73)$$

Si l'on connaît des estimées des quatre moments \hat{m}_{ν} , $\hat{m}_{\nu+1}$, $\hat{m}_{\nu+2}$, $\hat{m}_{\nu+3}$, on obtient directement les estimées $\hat{\mu}$, \hat{L} et \hat{M} en résolvant le système 3.73. Pour cela, connaissant les estimées \hat{R}_1 et \hat{R}_2 , en posant $\hat{R}'_1 = \hat{R}_1 - 1$ et $\hat{R}'_2 = \frac{\hat{R}_2 - 1}{2}$, il est aisé de montrer que \hat{M} et \hat{L} sont alors les solutions du polynôme du second degré en x suivant :

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= x^2 (2R'_2 - 2R'_1 + R_0 - 1) + x (-4R'_1 - 3 - 4\nu R'_1 + 2R'_2 + 4\nu R'_2 + 3R_0 - 2\nu + 2\nu R_0) \\ &\quad + \nu^2 R_0 - 4\nu R'_1 - 3\nu + 2\nu^2 R'_2 + 2\nu R'_2 + 3\nu R_0 - \nu^2 + 2R_0 - 2\nu^2 R'_1 = 0 \end{aligned} \quad (3.74)$$

\hat{L} et \hat{M} sont alors les deux racines de ce polynôme : leurs expressions analytiques sont il est vrai assez peu limpides, mais aisées à implémenter. $\hat{\mu}$ peut s'obtenir par la relation

$$\hat{\mu}_{MM} = \frac{\hat{L} \hat{M}}{(\hat{L} + \nu)(\hat{M} + \nu)} R_0$$

ou bien en calculant m_1 puisque :

$$m_1 = \mu$$

$\mathcal{K}[\mu, L, M]$: Méthode des Log-Moments

Les trois premiers log-cumulants de la loi \mathcal{K} sont donnés par les relations 2.77 et 2.78 :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 &= \log(\mu) + \Psi(L) - \log(L) + \Psi(M) - \log(M) \\ \tilde{\kappa}_2 &= \Psi(1, L) + \Psi(1, M) \\ \tilde{\kappa}_3 &= \Psi(2, L) + \Psi(2, M) \end{cases}$$

Connaissant alors les estimées $\hat{\kappa}_2$ et $\hat{\kappa}_3$ des log-cumulants 2 et 3, on voit qu'il est possible d'obtenir des estimées de L et M en résolvant le système :

$$\begin{cases} \Psi(1, \hat{L}_{MLM}) + \Psi(1, \hat{M}_{MLM}) &= \hat{\kappa}_2 \\ \Psi(2, \hat{L}_{MLM}) + \Psi(2, \hat{M}_{MLM}) &= \hat{\kappa}_3 \end{cases}$$

Ce système implicite nécessite néanmoins l'utilisation de méthodes de résolution numérique spécifiques (les fonctions Polygamma ne s'inversant pas analytiquement) faciles à mettre en œuvre eu égard aux propriétés de convexité de ce type de fonction. Sur la figure 3.9, on peut observer l'allure théorique des cumulants 2 et 3 qui vérifient les conditions de convexité nécessaire pour une résolution numérique.

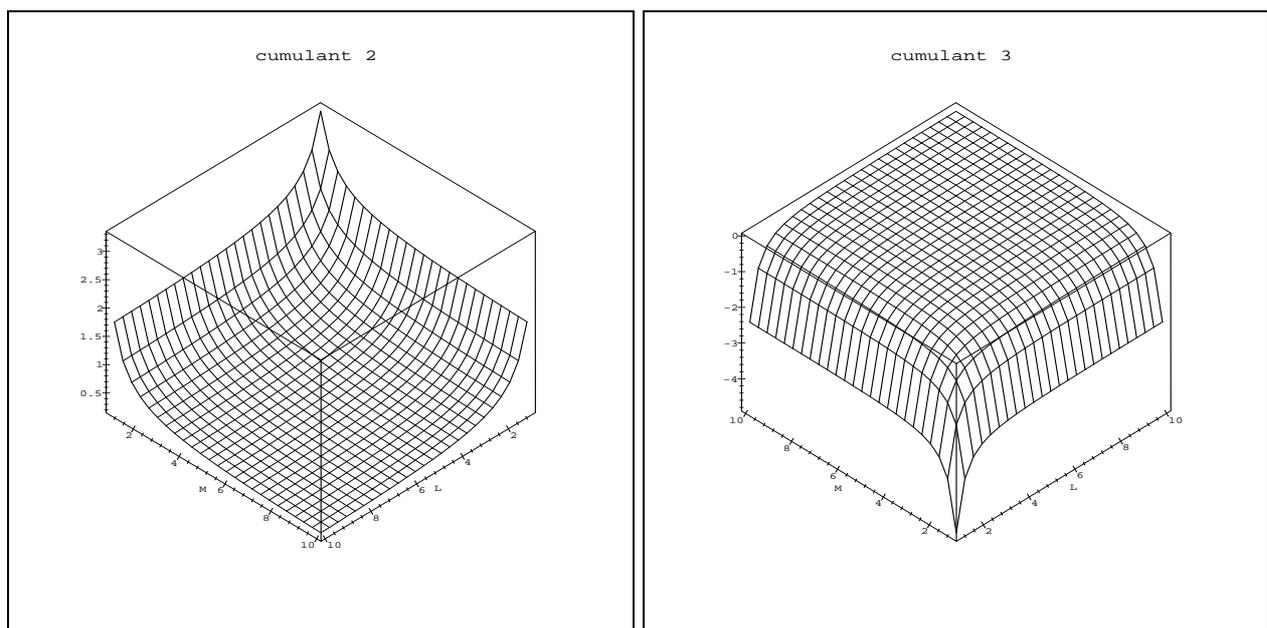


FIG. 3.9 – Cumulants 2 et 3 de la loi \mathcal{K} en fonction des paramètres L et M .

Une méthode très simple pour résoudre numériquement ce système connaissant les estimées des log-cumulants $\hat{\kappa}_2$ et $\hat{\kappa}_3$ consiste

- à initialiser les valeurs de L_0 et M_0

$$\begin{aligned} \Psi(1, L_0) &= \frac{\hat{\kappa}_2}{2} \\ \Psi(1, M_0) &= \frac{\hat{\kappa}_2}{2} \end{aligned}$$

- à prendre l'option $L < M$
- à choisir un pas incrémental pour les valeurs de M

- à effectuer itérativement les étapes suivantes jusqu'à convergence (ou arrêt de l'algorithme sur test) :
 - calculer $\Psi(2, L_i) + \Psi(2, M_i)$
 - incrémenter M_i selon le gradient de $\hat{\kappa}_3$: ce qui donne M_{i+1}
 - calculer L_{i+1} vérifiant $\Psi(1, L_{i+1}) + \Psi(1, M_{i+1}) = \hat{\kappa}_2$

Sur ce schéma très simplifié, on appliquera bien évidemment des raffinements classiques (pas variable, ...) permettant une convergence plus rapide et efficace (il faut noter que, de toutes façons, cet algorithme est très rapide).

Le code numérique des fonctions Polygamma $\Psi(1, x)$ et $\Psi(2, x)$ a été construit selon le schéma décrit au paragraphe A.2.2 de l'annexe A dédié à la fonction Gamma et ses dérivées.

$\mathcal{K}1[\mu, L]$ une Méthode mixte (Blacknell)

C'est dans le cadre de la loi $\mathcal{K}1$ que Blacknell a introduit une méthode originale associant, sans le préciser ainsi, la méthode des moments et celle des log-moments [7] et que nous avons décrite au paragraphe 1.6.2 sous le nom de modélisation mixte.

Pour estimer la variable $u \log u$, nous avons vu qu'il suffit d'étudier la fonction $\log(u) \mathcal{K}1(u)$, dont la transformée de Mellin s'écrit simplement (relation 1.67) :

$$\phi_L(s) = \frac{d\phi(s)}{ds} = \mu^{s-1} (\log \mu + \Psi(L + s - 1) - \log L + \Psi(s)) \frac{\Gamma(L + s - 1)}{\Gamma(L)} \Gamma(s)$$

avec $\phi(s)$ fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi \mathcal{K} . On en déduit alors directement les deux moments mixtes w_0 et w_1 :

$$\begin{aligned} w_0 &= E(\log u) = \phi_L(s)|_{s=1} = \tilde{m}_1 \\ w_1 &= E(u \log u) = \phi_L(s)|_{s=2} \end{aligned}$$

En posant $m_{1,K}$ le moment d'ordre 1 de la loi \mathcal{K} , il est alors aisé de montrer, grâce aux propriétés de la fonction Digamma (relation A.12) que :

$$\begin{aligned} m_{1,K} &= \mu \\ \frac{w_1}{m_{1,K}} - \tilde{m}_1 &= 1 + \Psi(L + 1) - \Psi(L) = 1 + \frac{1}{L} \end{aligned}$$

On a donc exhibé un système de deux équations à deux inconnues donc l'inversion est très aisée puisque l'on a :

$$\begin{aligned} \mu &= m_{1,K} \\ L &= \frac{1}{\frac{w_1}{m_{1,K}} - \tilde{m}_1 - 1} \end{aligned}$$

$\mathcal{K}[\mu, L, M]$ une Méthode mixte

Cette démarche peut se généraliser à la loi $\mathcal{K}[\mu, L, M]$. On a alors

$$\phi_L(s) = \frac{d\phi(s)}{ds} = \mu^{s-1} (\log \mu + \Psi(L + s - 1) - \log L + \Psi(M + s - 1) - \log M) \frac{\Gamma(L + s - 1)\Gamma(M + s - 1)}{L^{s-1}\Gamma(L) M^{s-1}\Gamma(M)}$$

Pour cela, il faut introduire $m_{2,K}$ le moment d'ordre 2 de la loi \mathcal{K} , ainsi que le moment mixte w_2 :

$$w_2 = E(u^2 \log u) = \phi_L(s)|_{s=3}$$

On peut alors montrer que :

$$\begin{aligned} m_{1,K} &= \mu \\ \frac{w_1}{m_{1,K}} - \tilde{m}_1 &= \Psi(L + 1) - \Psi(L) + \Psi(M + 1) - \Psi(M) = \frac{1}{L} + \frac{1}{M} \\ \frac{w_2}{m_{2,K}} - \frac{w_1}{m_{1,K}} &= \Psi(L + 2) - \Psi(L + 1) + \Psi(M + 2) - \Psi(M + 1) = \frac{1}{L + 1} + \frac{1}{M + 1} \end{aligned}$$

Ce système conduit à résoudre un polynôme du second degré pour déduire les estimées de L et de M , ce qui ne pose aucun problème de réalisation numérique.

Variance des estimateurs des Log-Cumulants

Enfin notons le résultat du calcul des variances des estimateurs des log-cumulants 2 et 3, que l'on déduit des expressions théoriques 3.7 et 3.7 :

$$\begin{aligned} \text{Var} \left\{ \hat{\kappa}_2 \right\} &= \frac{1}{N} \left(\Psi(3, L) + 2 (\Psi(1, L))^2 + \Psi(3, M) + 2 (\Psi(1, M))^2 + 4 \Psi(1, L) \Psi(1, M) \right) \\ \text{Var} \left\{ \hat{\kappa}_3 \right\} &= \frac{1}{N} \left(6 (\Psi(1, L))^3 + 9 (\Psi(2, L))^2 + 9 \Psi(3, L) \Psi(1, L) + \Psi(5, L) \right. \\ &\quad + 6 (\Psi(1, M))^3 + 9 (\Psi(2, M))^2 + 9 \Psi(3, M) \Psi(1, M) + \Psi(5, M) \\ &\quad + 9 (\Psi(1, L) \Psi(3, M) + \Psi(1, M) \Psi(3, L)) \\ &\quad \left. + 18 \Psi(2, L) \Psi(2, M) + 18 \Psi(1, L) \Psi(1, M) (\Psi(1, L) + \Psi(1, M)) \right) \end{aligned}$$

Globalement, on reconnaît dans les deux cas une somme de variances des lois de bases (deux lois Gamma) à laquelle s'ajoute des termes croisés.

3.6.3 La loi de Fisher (loi Beta de seconde espèce ou loi Pearson type VI)

L'expression de la loi de Fisher est donnée par la relation 2.90 :

$$\mathcal{F}[\mu, L, M] = \frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{\left(\frac{Lu}{M\mu}\right)^{L-1}}{\left(1 + \frac{Lu}{M\mu}\right)^{L+M}}$$

Le calcul de la matrice de Fisher ne pose aucun problème avec un logiciel de calcul formel comme Maple©. Cependant les expressions analytiques sont très lourdes. Aussi nous proposons des exemples numériques pour en deviner les subtilités.

	$L = 1$	$L = 4$	$L = 7$	$L = 10$
$M = 1$	6.45 -3.45 3.45 -3.45 4.86 -2.04 3.45 -2.04 4.86	3.51 -33.22 1.77 -33.22 572.22 -23.05 1.77 -23.05 3.09	3.13 -92.36 1.55 -92.36 4704.3 -66.79 1.55 -66.79 2.84	2.98 -180.9 1.46 -180.9 18564 -133.3 1.46 -133.3 2.75
$M = 4$	3.51 -1.77 33.22 -1.77 3.09 -23.05 33.22 -23.05 572.22	1.32 -12.15 12.15 -12.15 222.8 -165.8 12.15 -165.8 222.8	1.02 -29.48 9.33 -29.48 1550.3 -411.34 9.33 -411.34 175.34	0.91 -53.7 8.21 -53.7 5622 -758.7 8.21 -758.7 156.5
$M = 7$	3.13 -1.55 92.36 -1.55 2.85 -66.79 92.36 -66.79 4704	1.02 -9.33 29.48 -9.33 175.35 -411.33 29.48 -411.33 1550.3	0.736 -21.08 21.08 -21.08 1125.04 -942.0 21.08 -942.0 1125.0	0.622 -36.7 17.76 -36.7 3880 -1653 17.76 -1653 955.4
$M = 10$	2.98 -1.46 180.9 -1.46 2.75 -133.3 180.9 -133.3 18564	0.91 -8.21 53.71 -8.21 156.5 -758.7 53.71 -758.7 5622.5	0.623 -17.75 36.72 -17.75 955.4 1653.4 36.72 1653.4 3880.4	0.511 -30.1 30.1 -30.1 3189 -2809 30.1 -2809 3189

On observe donc que les matrices ne sont plus diagonales, ce qui signifie que la qualité de l'estimation d'un paramètre dépend de la valeur des autres paramètres. Notons en particulier l'importance des termes croisés dès lors que $L \simeq M$.

Méthode du Maximum de Vraisemblance

Le logarithme de la loi de Fisher s'exprime par la relation suivante :

$$\log \mathcal{F} = \log(\mathcal{F}) = \log \left(\frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \right) + L \log \frac{L}{M} + (L-1) \log \left(\frac{u}{\mu} \right) + (L+M) \log \left(\frac{M\mu}{Lu + M\mu} \right) - \log \mu$$

Il faut remarquer les cas limites suivants :

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \log \left(\frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \right) + L \log \frac{L}{M} &= L \log L - \log \Gamma(L) \\ \lim_{M \rightarrow \infty} (L+M) \log \left(\frac{M\mu}{Lu + M\mu} \right) &= \frac{Lu}{\mu} \end{aligned}$$

ce qui permet de retrouver l'expression obtenue pour la loi Gamma (équation 3.14).

Calculée sur N échantillons, la log-vraisemblance a l'expression –abordable– suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{LV}_{\mathcal{F}} &= N \left(\log \left(\frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \right) + L \log \frac{L}{M} \right) + (L-1) \sum_{i=1}^N \log \left(\frac{x_i}{\mu} \right) \\ &\quad + (L+M) \sum_{i=1}^N \log \left(\frac{M\mu}{Lx_i + M\mu} \right) - N \log \mu \end{aligned} \quad (3.75)$$

Les estimées $(\hat{\mu}, \hat{L}, \hat{M})$ se déduisent du calcul des dérivées partielles du logarithme de la loi de Fisher :

$$\frac{\partial \log \mathcal{F}}{\partial \mu} = \frac{LM(u - \mu)}{\mu(Lu + M\mu)} \quad (3.76)$$

$$\frac{\partial \log \mathcal{F}}{\partial L} = \Psi(L+M) - \Psi(L) + \log \left(\frac{Lu}{Lu + M\mu} \right) - \frac{M(u - \mu)}{Lu + M\mu} \quad (3.77)$$

$$\frac{\partial \log \mathcal{F}}{\partial M} = \Psi(L+M) - \Psi(M) + \log \left(\frac{M\mu}{Lu + M\mu} \right) + \frac{L(u - \mu)}{Lu + M\mu} \quad (3.78)$$

L'existence de ces relations montre que la Méthode du Maximum de Vraisemblance est théoriquement applicable dans le cas de la loi de Fisher. Cependant, contrairement au cas de la loi Gamma, aucun des termes ne se simplifient (hormis les cas $M \rightarrow \infty$ et $L \rightarrow \infty$) et nous allons montrer que l'on ne peut obtenir qu'un système implicite.

Pour les estimées $(\hat{\mu}, \hat{L}, \hat{M})$ au sens du maximum de vraisemblance, on peut écrire les relations suivantes :

$$\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \hat{\mu})}{(\hat{L}x_i + \hat{M}\hat{\mu})} = 0 \quad (3.79)$$

$$\sum_{i=1}^N \left(\Psi(\hat{L} + \hat{M}) - \Psi(\hat{L}) + \log \left(\frac{\hat{L}x_i}{\hat{L}x_i + \hat{M}\hat{\mu}} \right) \right) - \sum_{i=1}^N \frac{\hat{M}(x_i - \hat{\mu})}{\hat{L}x_i + \hat{M}\hat{\mu}} = 0 \quad (3.80)$$

$$\sum_{i=1}^N \left(\Psi(\hat{L} + \hat{M}) - \Psi(\hat{M}) + \log \left(\frac{\hat{M}\hat{\mu}}{\hat{L}x_i + \hat{M}\hat{\mu}} \right) \right) + \sum_{i=1}^N \frac{\hat{L}(x_i - \hat{\mu})}{\hat{L}x_i + \hat{M}\hat{\mu}} = 0 \quad (3.81)$$

et en utilisant, dans les relations 3.80 et 3.81, la relation 3.79, on obtient alors :

$$\sum_{i=1}^N \left(\Psi(\hat{L} + \hat{M}) - \Psi(\hat{L}) + \log \left(\frac{\hat{L}x_i}{\hat{L}x_i + \hat{M}\hat{\mu}} \right) \right) = 0 \quad (3.82)$$

$$\sum_{i=1}^N \left(\Psi(\hat{L} + \hat{M}) - \Psi(\hat{M}) + \log \left(\frac{\hat{M}\hat{\mu}}{\hat{L}x_i + \hat{M}\hat{\mu}} \right) \right) = 0 \quad (3.83)$$

En soustrayant ces deux dernières relations, on obtient :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log x_i = \log \hat{\mu} + \left(\Psi(\hat{L}) - \log \hat{L} \right) - \left(\Psi(\hat{M}) - \log \hat{M} \right) \quad (3.84)$$

et on reconnaît dans le terme de droite l'expression du premier log-cumulant de la loi de Fisher.

La relation 3.83 permet d'écrire directement :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log \left(1 + \frac{\hat{L}x_i}{\hat{M}\hat{\mu}} \right) = \Psi(\hat{L} + \hat{M}) - \Psi(\hat{M}) \quad (3.85)$$

Cette dernière relation peut s'avérer utile dans des méthodes utilisant la log-vraisemblance.

Enfin une troisième relation, directement tirée de 3.79, permet d'écrire :

$$\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \hat{\mu})}{(\hat{M}\hat{\mu} + \hat{L}x_i)} = 0$$

qui permet la formulation suivante pour $\hat{\mu}$:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{1 + \frac{L x_i}{M \hat{\mu}}}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{1 + \frac{L x_i}{M \hat{\mu}}}} = \frac{\sum_{i=1}^N \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^N \alpha_i} \quad \text{avec} \quad \alpha_i = 1 + \frac{L x_i}{M \hat{\mu}}$$

et qui correspond à une moyenne pondérée des échantillons (ce qui est satisfaisant intuitivement, mais qui ne permet pas une résolution directe puisque les coefficients de pondération α_i dépendent eux aussi des échantillons). Si $M \rightarrow \infty$, on retrouve l'expression correspondant à la loi Gamma Généralisée (formule 3.18). Si $L \rightarrow \infty$, on retrouve l'expression correspondant à la loi Gamma Généralisée Inverse (formule 3.56).

Ce système implicite est bien évidemment difficile à résoudre, ce qui fait que la Méthode du Maximum de Vraisemblance n'est jamais utilisée en pratique pour la loi de Fisher.

En introduisant les expressions 3.84 et 3.85 dans la formule de la log-vraisemblance (expression 3.75), on obtient [43] :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{V}_{\mathcal{F}}} &= N(-\log \mu + \log(\Gamma(L+M)) - (L+M)\Psi(L+M)) \\ &\quad - (\log \Gamma(L) - L\Psi(L)) + (\log L - \Psi(L)) \\ &\quad - (\log \Gamma(M) - M\Psi(M)) - (\log M - \Psi(M)) \end{aligned}$$

Cette curieuse expression présente la propriété *-attendue-* de converger vers la log-vraisemblance de la loi Gamma Généralisée pour $M \rightarrow \infty$ et vers celle de la loi Gamma Généralisée Inverse pour $L \rightarrow \infty$ (propriétés vérifiées avec Maple).

Méthode des Moments

Les trois premiers moments (entiers) de cette loi, s'ils existent (*i.e.* $M > 3$) se déduisent de la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi de Fisher 2.89 et s'écrivent :

$$\begin{cases} m_1 &= \frac{M}{M-1} \mu \\ m_2 &= \frac{L+1}{L} \frac{M^2}{(M-1)(M-2)} \mu^2 \\ m_3 &= \frac{(L+1)(L+2)}{L^2} \frac{M^3}{(M-1)(M-2)(M-3)} \mu^3 \end{cases}$$

De manière similaire à la loi \mathcal{K} , ce système peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} m_1 &= \mu \frac{M}{M-1} \\ R_1 &= \frac{1}{m_1} \frac{m_2}{m_1} = \frac{(L+1)(M-1)}{L(M-2)} \\ R_2 &= \frac{1}{m_1} \frac{m_3}{m_2} = \frac{(L+2)(M-1)}{L(M-3)} \end{aligned} \quad (3.86)$$

Ce système se résout simplement et permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \mu &= m_1 \frac{2(R_1 - R_2)}{4R_1 - 3R_2 - 1} = m_1 \frac{2(m_1 m_3 - m_2^2)}{m_1^2 m_2 + 3m_1 m_3 - 4m_2^2} \\ L &= \frac{2(R_1 - R_2)}{-R_1 + 2R_2 - R_1 R_2} \\ M &= \frac{4R_1 - 3R_2 - 1}{2R_1 - R_2 - 1} \end{aligned} \quad (3.87)$$

Contrairement au système de la loi \mathcal{K} , on peut toujours trouver (au moins formellement) une solution (L, M) dès lors que les dénominateurs du système 3.87 sont non nuls (la condition sur le déterminant pour la loi \mathcal{K} était tout autrement restrictive). Les cas d'annulation des dénominateurs correspondent à une des lois Gamma (normale ou inverse), composantes de la corrélation de Mellin générant la loi de Fisher, dégénérée en loi homothétique. On obtient en effet les cas suivants :

- $2R_1 - R_2 - 1 = 0$: le cas limite où $M \rightarrow \infty$, *i.e.* la loi de Fisher est une loi Gamma,
- $-R_1 + 2R_2 - R_1 R_2 = 0$: le cas limite où $L \rightarrow \infty$, *i.e.* la loi de Fisher est une loi Gamma inverse,

	$M = 7$	$M = 10$	$M = 13$	$M = 16$
$L = 1$	24.72	8.58	6.05	5.07
$L = 3$	95.60	31.33	21.30	17.44
$L = 7$	358.7	111.4	72.79	57.93
$L = 10$	663.2	201.8	129.7	101.9

TAB. 3.2 – Ecart type de l'estimateur de L

	$M = 7$	$M = 10$	$M = 13$	$M = 16$
$L = 1$	403.8	371.4	492.7	661.5
$L = 3$	257.4	220.2	280.0	366.0
$L = 7$	205.2	164.3	199.9	253.3
$L = 10$	192.5	150.4	179.6	224.4

TAB. 3.3 – Ecart type de l'estimateur de M

– le cas où ces deux relations sont vérifiées, ce qui donne :

$$R_1 = R_2 = 1$$

ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} m_2 &= m_1^2 \\ m_3 &= m_1^3 \end{aligned}$$

On reconnaît les relations définissant les moments 2 et 3 de la distribution homothétique.

La limitation intrinsèque de cette méthode est dans l'existence nécessaire du moment d'ordre 3, ce qui conduit à restreindre l'espace des distributions de Fisher ainsi accessibles à $\{L \in \mathbb{N}, M \in]3, +\infty[\}$

Variance des estimateurs de la méthode des moments

Le système 3.87 peut se réécrire en fonction des trois premiers moments :

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{3m_3m_1 - 4m_2^2 + m_1^2m_2}{m_1^2m_2 + m_1m_3 - 2m_2^2} \\ L &= \frac{2m_1(m_2^2 - m_1m_3)}{2m_3m_1^2 - m_2m_3 - m_1m_2^2} \\ M &= \frac{2m_1(m_2^2 - m_1m_3)}{4m_2^2 - 3m_1m_3 - m_1^2m_2} \end{aligned} \quad (3.88)$$

Dans la mesure où le moment d'ordre 6 est défini, la démarche de Kendall et Stuart (formule 3.2) peut s'appliquer. Le calcul, fastidieux, gagne à être effectué sous un logiciel de calcul formel. Les expressions analytiques, qui ne présentent aucun intérêt spécifique, ne seront donc pas fournies dans ce document. Notons que les variances des estimateurs de L et de M ne dépendent pas de μ , tandis que la variance de l'estimateur de μ est proportionnel au carré de cette grandeur.

Les tableaux 3.2, 3.3 et 3.4 donnent les écarts types (racine carrée de la variance) calculés pour différentes valeurs de L et de μ .

	$M = 7$	$M = 10$	$M = 13$	$M = 16$
$L = 1$	9.61	4.19	3.27	2.90
$L = 3$	6.12	2.49	1.87	1.62
$L = 7$	4.88	1.85	1.33	1.12
$L = 10$	4.57	1.69	1.20	0.99

TAB. 3.4 – Ecart type de l'estimateur de μ avec $\mu = 1$

Méthode des Log-Moments

Les log-cumulants 2 et 3 s'expriment par les équations (relations 2.94) :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_2 &= \Psi(1, L) + \Psi(1, M) \\ \tilde{\kappa}_3 &= \Psi(2, L) - \Psi(2, M)\end{aligned}$$

On peut en déduire par un schéma numérique des estimées de L et de M . Ensuite, en considérant le premier log-cumulant (relations 2.94) :

$$\tilde{\kappa}_1 = \log(\mu) + (\Psi(L) - \log(L)) - (\Psi(M) - \log(M))$$

on peut estimer le paramètre μ .

Une méthode numérique pour obtenir des estimées de L et de M , connaissant les valeurs des cumulants $\tilde{\kappa}_2$ et $\tilde{\kappa}_3$, consiste

– à initialiser les valeurs de L_0 et M_0

$$\begin{aligned}\Psi(1, L_0) &= \frac{\tilde{\kappa}_2}{2} \\ \Psi(1, M_0) &= \frac{\tilde{\kappa}_2}{2}\end{aligned}$$

– à prendre l'option $L < M$

– à choisir un pas incrémental pour les valeurs de M

– à effectuer itérativement les étapes suivantes jusqu'à convergence (ou arrêt de l'algorithme sur test) :

– calculer $\Psi(2, L_i) - \Psi(2, M_i)$

– incrémenter M_i selon le gradient de $\tilde{\kappa}_3$: ce qui donne M_{i+1}

– calculer L_{i+1} vérifiant $\Psi(1, L_{i+1}) + \Psi(1, M_{i+1}) = \tilde{\kappa}_2$

Sur ce schéma très simplifié, on appliquera bien évidemment des raffinements classiques (pas variable, ...) permettant une convergence plus rapide et efficace (il faut noter que, de toutes façons, cet algorithme est très rapide).

Méthode mixte

Toujours en nous inspirant de l'approche proposée par Blacknell, nous avons vu que pour estimer la variable $u \log u$ il suffit d'étudier la fonction $\log(u) \mathcal{F}(u)$, dont la transformée de Mellin s'écrit simplement (relation 1.67) :

$$\phi_L(s) = \frac{d\phi(s)}{ds} = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)\Gamma(M-s+1)}{L^{s-1}\Gamma(L) M^{1-s}\Gamma(M)} (\log \mu + \Psi(L+s-1) - \log L - \Psi(M-s+1) + \log M)$$

avec $\phi(s)$ fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi \mathcal{F} . On en déduit alors directement les trois moments mixtes w_0 , w_1 et w_2 :

$$w_0 = E(\log u) = \phi_L(s)|_{s=1} = \log \mu + \Psi(L) - \log L - (\Psi(M) - \log M)$$

$$w_1 = E(u \log u) = \phi_L(s)|_{s=2} = \frac{M}{M-1} \mu (\log \mu + \Psi(L+1) - \log L - (\Psi(M-1) - \log M))$$

$$w_2 = E(u^2 \log u) = \phi_L(s)|_{s=3} = \frac{M^2(L+1)}{(M-1)(M-2)L} (\log \mu + \Psi(L+2) - \log L - (\Psi(M-2) - \log M))$$

avec bien évidemment $w_0 = \tilde{m}_1$.

En posant m_1 et m_2 les moments d'ordre 1 et 2 de la loi de Fisher, il est alors aisé de montrer que :

$$\begin{aligned}m_1 &= \frac{M \mu}{M-1} \\ \frac{w_1}{m_1} - \tilde{m}_1 &= \Psi(L+1) - \Psi(L) + \Psi(M) - \Psi(M-1) = \frac{1}{L} + \frac{1}{M-1} \\ \frac{w_2}{m_2} - \frac{w_1}{m_1} &= \Psi(L+2) - \Psi(L+1) + \Psi(M-1) - \Psi(M-2) = \frac{1}{L+1} + \frac{1}{M-2}\end{aligned}$$

On a donc exhibé un système de trois équations à trois inconnues donc l'inversion est très aisée puisque L et M sont solution d'un polynôme du second degré.

L'écueil de cette méthode originale est qu'elle ne peut s'appliquer que pour les lois de Fisher telles que $M > 2$ (en effet, le système requiert le calcul des moments d'ordre 1 et 2).

Variance des estimateurs de la méthode des Log-Moments

Le calcul ne peut être mené pour des raisons identiques à celles invoquées pour la loi \mathcal{K} : en effet, on ne sait dériver les fonctions de Bessel par rapport à l'indice.

Variance des estimateurs des Log-Cumulants

Enfin notons le résultat du calcul des variances des estimateurs des log-cumulants 2 et 3, que l'on déduit des expressions théoriques 3.7 et 3.7 :

$$\begin{aligned} \text{Var} \left\{ \hat{\kappa}_2 \right\} &= \frac{1}{N} \left(\Psi(3, L) + 2 (\Psi(1, L))^2 + \Psi(3, M) + 2 (\Psi(1, M))^2 + 4 \Psi(1, L) \Psi(1, M) \right) \quad (3.89) \\ \text{Var} \left\{ \hat{\kappa}_3 \right\} &= \frac{1}{N} \left(6 (\Psi(1, L))^3 + 9 (\Psi(2, L))^2 + 9 \Psi(3, L) \Psi(1, L) + \Psi(5, L) \right. \\ &\quad + 6 (\Psi(1, M))^3 + 9 (\Psi(2, M))^2 + 9 \Psi(3, M) \Psi(1, M) + \Psi(5, M) \\ &\quad + 9 (\Psi(1, L) \Psi(3, M) + \Psi(1, M) \Psi(3, L)) \\ &\quad \left. - 18 \Psi(2, L) \Psi(2, M) + 18 \Psi(1, L) \Psi(1, M) (\Psi(1, L) + \Psi(1, M)) \right) \quad (3.90) \end{aligned}$$

Ces expressions sont très semblables à celles trouvées pour la loi \mathcal{K} : seul change le signe du terme en $\Psi(2, L) \Psi(2, M)$.

3.6.4 La loi Beta de première espèce (Pearson type I)

L'expression de la loi Beta de première espèce (Pearson type I) est donnée par la relation 2.99 :

$$\mathcal{B}[\mu, L, M](u) = \frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \left(\frac{Lu}{M\mu} \right)^{L-1} \left(1 - \frac{Lu}{M\mu} \right)^{M-L-1} \quad u \in \left[0; \frac{M\mu}{L} \right]$$

La matrice de Fisher est techniquement calculable, mais offre peu de possibilité d'interprétation limpide ; c'est pourquoi son expression analytique n'est pas proposée dans ce document.

Méthode du Maximum de Vraisemblance

Les estimées $(\hat{\mu}, \hat{L}, \hat{M})$ se déduisent du calcul des dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial \log \mathcal{B}}{\partial \mu} = \frac{L(M\mu - (M-1)u)}{\mu(Lu - M\mu)} \quad (3.91)$$

$$\frac{\partial \log \mathcal{B}}{\partial L} = \Psi(M-L) - \Psi(L) + \log \left(\frac{Lu}{M\mu - Lu} \right) + \frac{(M-1)u - M\mu}{Lu - M\mu} \quad (3.92)$$

$$\frac{\partial \log \mathcal{B}}{\partial M} = -\Psi(M-L) + \Psi(M) - \log \left(\frac{M\mu}{M\mu - Lu} \right) + \frac{L(M\mu - (M-1)u)}{M(Lu - M\mu)} \quad (3.93)$$

Ce système ressemble beaucoup à celui de la loi de Fisher et présente donc les mêmes difficultés. Rien d'étonnant à ce que personne semble-t-il n'ait tenté d'estimer les paramètres de cette loi par la Méthode du Maximum de Vraisemblance.

Méthode des Moments

Les trois premiers moments (entiers) de cette loi se déduisent de la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi 2.98 et s'écrivent :

$$\begin{cases} m_1 = & \mu \\ m_2 = & \frac{L+1}{L} \frac{\mu}{M+1} \mu^2 \\ m_3 = & \frac{(L+1)(L+2)}{L^2} \frac{\mu^2}{(M+1)(M+2)} \mu^3 \end{cases}$$

De manière similaire à la loi \mathcal{K} , ce système peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} m_1 &= \mu \\ R_1 &= \frac{1}{m_1} \frac{m_2}{m_1} = \frac{(L+1)M}{L(M+1)} \\ R_2 &= \frac{1}{m_1} \frac{m_3}{m_2} = \frac{(L+2)M}{L(M+2)} \end{aligned} \quad (3.94)$$

Ce système se résout simplement et permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\mu &= m_1 \\ L &= \frac{2(R_1 - R_2)}{-R_1 + 2R_2 - R_1R_2} \\ M &= \frac{2(R_2 - R_1)}{2R_1 - R_2 - 1}\end{aligned}\tag{3.95}$$

Contrairement au système de la loi \mathcal{K} , on peut toujours trouver (au moins formellement) une solution (L, M) dès lors que les dénominateurs du système 3.95 sont non nuls (la condition sur le déterminant pour la loi \mathcal{K} était tout autrement restrictive).

Méthode des Log-Moments

Les log-cumulants 2 et 3 s'expriment par les relations (voir relations 2.102) :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_2 &= \Psi(1, L) - \Psi(1, M) \\ \tilde{\kappa}_3 &= \Psi(2, L) - \Psi(2, M)\end{aligned}$$

Ce système est malheureusement implicite et requiert une solution numérique aisée à mettre en œuvre.

Une méthode très simple pour résoudre numériquement ce système connaissant les valeurs des cumulants $\tilde{\kappa}_2$ et $\tilde{\kappa}_3$ consiste

– à initialiser les valeurs de L_0 et M_0

$$\begin{aligned}\Psi(1, L_0) &= \tilde{\kappa}_2 \\ \Psi(1, M_0) &= 0\end{aligned}$$

– à prendre donc l'option $L < M$

– à choisir un pas incrémental pour les valeurs de L

– à effectuer itérativement les étapes suivantes jusqu'à convergence (ou arrêt de l'algorithme sur test) :

– calculer $\Psi(2, L_i) + \Psi(2, M_i)$

– incrémenter L_i : ce qui donne L_{i+1}

– calculer M_{i+1} vérifiant $\Psi(1, L_{i+1}) + \Psi(1, M_{i+1}) = \tilde{\kappa}_2$

Sur ce schéma très simplifié, on appliquera bien évidemment des raffinements classiques (pas variable, ...) permettant une convergence plus rapide et efficace (il faut noter que, de toutes façons, cet algorithme est très rapide).

Une fois déterminés les estimées de L et M , le premier log-cumulant (relations 2.102) :

$$\tilde{\kappa}_1 = \log(\mu) + (\Psi(L) - \log(L)) - (\Psi(M) - \log(M))$$

permet d'estimer le paramètre μ .

Méthode mixte

Toujours en nous inspirant de l'approche proposée par Blacknell, nous avons vu que pour estimer la variable $u \log u$ il suffit d'étudier la fonction $\log(u) \mathcal{B}(u)$, dont la transformée de Mellin s'écrit simplement (relation 1.67) :

$$\phi_L(s) = \frac{d\phi(s)}{ds} = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \frac{M^{1-s} \Gamma(M)}{\Gamma(M-s+1)} (\log \mu + \Psi(L+s-1) - \log L - \Psi(M+s-1) + \log M)$$

avec $\phi(s)$ fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi \mathcal{B} . On en déduit alors directement les trois moments mixtes $m_{LL,0}$ et $m_{LL,1}$:

$$w_0 = E(\log u) = \phi_L(s)|_{s=1} = \log \mu + \Psi(L) - \log L - (\Psi(M) - \log M)$$

$$w_1 = E(u \log u) = \phi_L(s)|_{s=2} = \mu (\log \mu + \Psi(L+1) - \log L - (\Psi(M+1) - \log M))$$

$$w_2 = E(u^2 \log u) = \phi_L(s)|_{s=3} = \frac{M}{M+1} \frac{L+1}{L} \mu^2 (\log \mu + \Psi(L+2) - \log L - (\Psi(M+2) - \log M))$$

avec bien évidemment $w_0 = \tilde{m}_1$.

En posant m_1 et m_2 les moments d'ordre 1 et 2 de la loi Beta, il est alors aisé de montrer que :

$$\begin{aligned} m_1 &= \mu \\ \frac{w_1}{m_1} - \tilde{m}_1 &= \Psi(L+1) - \Psi(L) + \Psi(M) - \Psi(M+1) = \frac{1}{L} - \frac{1}{M} \\ \frac{w_2}{m_2} - \frac{w_1}{m_1} &= \Psi(L+2) - \Psi(L+1) + \Psi(M+1) - \Psi(M+2) = \frac{1}{L+1} - \frac{1}{M+1} \end{aligned}$$

On a donc exhibé un système de trois équations à trois inconnues donc l'inversion est très aisée puisque L et M sont solution d'un polynôme du second degré.

Variance des estimateurs des Log-Cumulants

Enfin notons le résultat du calcul des variances des estimateurs des log-cumulants 2 et 3, que l'on déduit des expressions théoriques 3.7 et 3.7 :

$$\begin{aligned} Var \left\{ \hat{\kappa}_2 \right\} &= \frac{1}{N} (\Psi(3, L) + 2(\Psi(1, L))^2 - \Psi(3, M) + 2(\Psi(1, M))^2 - 4\Psi(1, L)\Psi(1, M)) \\ Var \left\{ \hat{\kappa}_3 \right\} &= \frac{1}{N} \left(6(\Psi(1, L))^3 + 9(\Psi(2, L))^2 + 9\Psi(3, L)\Psi(1, L) + \Psi(5, L) \right. \\ &\quad - 6(\Psi(1, M))^3 + 9(\Psi(2, M))^2 + 9\Psi(3, M)\Psi(1, M) - \Psi(5, M) \\ &\quad - 9(\Psi(1, L)\Psi(3, M) + \Psi(1, M)\Psi(3, L)) \\ &\quad \left. - 18\Psi(2, L)\Psi(2, M) + 18\Psi(1, L)\Psi(1, M)(-\Psi(1, L) + \Psi(1, M)) \right) \end{aligned}$$

3.7 Autres lois utilisées en imagerie RSO (lois à 4 paramètres)

Nous avons vu qu'il était aisé de concevoir des lois à 4 paramètres en utilisant comme lois de base la loi Gamma et la loi Gamma Inverse, et en opérant celles-ci avec la convolution de Mellin. En pratique, vu les difficultés déjà rencontrées dans les lois à 3 paramètres, il est peu probable que les méthodes classiques (maximum de vraisemblance, méthode des moments) puissent être appliquées.

En revanche, la méthode des log-moments doit permettre des solutions numériques à partir des log-cumulants d'ordre 2, 3 et 4. En effet, ceux-ci s'expriment sous une forme générique (voir l'annexe E) donnant un système de trois équations à trois inconnues :

$$\tilde{\kappa}_p = \Psi(p-1, L) + \Psi(p-1, M) + \Psi(p-1, N) \quad \text{avec } p \in [2, 4]$$

Le schéma numérique sera plus compliqué que ceux utilisés pour les lois \mathcal{K} , Fisher et Beta puisque dans ces trois cas on avait un système de deux équations à deux inconnues ;

$$\tilde{\kappa}_p = \Psi(p-1, L) + \Psi(p-1, M) \quad \text{avec } p \in [2, 3]$$

Mais, si besoin était, il semble possible de résoudre ce système de trois équations numériquement, les fonctions Polygamma ayant d'excellentes propriétés de monotonie.

Quant au paramètre μ , une fois connu les facteurs de forme L , M et N , on peut l'obtenir de diverses manières (utilisation du moment d'ordre 1, du log-moment d'ordre 1,...).

3.8 Les lois à queue lourde

C'est probablement dans ce contexte que l'approche des statistiques de deuxième espèce apportent une vraie révolution dans l'estimation des paramètres. En effet, ce type de lois ne possède le plus souvent que très peu de moments entiers, voire même aucun. De plus, leur définition n'est en général pas fournie par le biais d'une expression analytique de la d.d.p. permettant par exemple de calculer les dérivées requises par la Méthode du Maximum de Vraisemblance.

Cependant, nous avons rencontrés deux exemples de ce type de lois pour lesquels il était possible d'exprimer une forme analytique des log-moments et donc de proposer des méthodes innovantes pour ces types de lois.

3.8.1 Distributions α -Stables positives

Ces lois sont définies par leurs fonctions caractéristiques (équation 2.123) :

$$\Phi = e^{-\gamma|\nu|^\alpha(1+j\operatorname{sgn}(\nu)\tan(\frac{\alpha\pi}{2}))}$$

et nous avons vu qu'il était possible d'exprimer leurs deux premiers log-cumulants par les relations :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_1 &= \frac{(1-\alpha)\Psi(1)}{\alpha} + \frac{-\log\left(\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)}{\alpha} + \frac{\log\gamma}{\alpha} \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{(1-\alpha^2)}{\alpha^2}\Psi(1,1)\end{aligned}$$

Si l'on connaît un estimé de $\tilde{\kappa}_2$, il est alors possible d'en déduire α :

$$\hat{\alpha} = \sqrt{\frac{\Psi(1,1)}{\tilde{\kappa}_2 + \Psi(1,1)}}$$

et γ s'en déduit facilement puisque, grâce à la première expression, on peut écrire :

$$\log\hat{\gamma} = \hat{\alpha}\tilde{\kappa}_1 - \left((1-\hat{\alpha})\Psi(1) - \log\left(\cos\left(\frac{\pi\hat{\alpha}}{2}\right)\right) \right)$$

3.8.2 Le modèle de Rayleigh généralisé

Dans ce cas où la d.d.p. est définie par une relation intégrale (équation 2.126) :

$$p(u) = u \int_0^\infty v e^{-\gamma v^\alpha} J_0(uv) dv$$

les log-cumulants s'expriment comme (relations 2.127 et 2.128) :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_1 &= -\Psi(1)\frac{1-\alpha}{\alpha} + \log\left(2\gamma^{\frac{1}{\alpha}}\right) \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{\Psi(1,1)}{\alpha^2}\end{aligned}$$

Si l'on connaît un estimé de $\tilde{\kappa}_2$, il est alors possible d'en déduire α [54] :

$$\hat{\alpha} = \sqrt{\frac{\Psi(1,1)}{\tilde{\kappa}_2}}$$

et γ s'en déduit facilement puisque, grâce à la première expression, on peut écrire :

$$\log\hat{\gamma} = \hat{\alpha}(\tilde{\kappa}_1 - \log 2) + (1-\hat{\alpha})\Psi(1)$$

3.9 Tableau récapitulatif

Ce tableau donne pour les lois que nous avons abordées un récapitulatif des diverses méthodes décrites. Dans certains cas, l'ordre dans lequel les estimations sont effectuées est précisé.

Lois	Méthodes				
	Maximum de Vraisemblance	Moments	Moments d'Ordre Inférieurs	Log-Moments	Mixte
Gamma	1) μ : explicite 2) L : implicite	μ : explicite L : explicite	μ : explicite L : explicite	1) L : implicite 2) μ : explicite	μ : explicite L : explicite
Nakagami	1) μ : explicite 2) L : implicite	μ : explicite L : implicite	μ : explicite L : implicite	1) L : implicite 2) μ : explicite	μ : explicite L : explicite
Gamma Inverse	1) μ : explicite 2) L : implicite	μ : explicite L : explicite si $L > 2$	μ : explicite L : explicite	1) L : implicite 2) μ : explicite	μ : explicite L : explicite
Weibull	Système	1) η : implicite 2) μ : explicite		η : explicite μ : explicite	1) η : implicite 2) μ : explicite
Weibull Généralisé	Système	Système		1) L : implicite 2) η : explicite 3) μ : explicite	
Loi \mathcal{K}	Impossible	μ explicite L explicite M explicite (pol deg 3)	1) L, M explicites (pol deg 2) 2) μ explicite	1) L, M implicites (système) 2) μ : explicite	μ : explicite L, M explicites (pol deg 2)
Fisher	Système	μ explicite L explicite M explicite si $M > 3$		1) L, M implicites (système) 2) μ : explicite	μ : explicite L, M explicites (pol deg 2)
Beta	Système	μ explicite L explicite M explicite		1) L, M implicites (système) 2) μ : explicite	1) L, M explicites (pol deg 2) 2) μ : explicite

Chapitre 4

Les diagrammes β_1 - β_2 et $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$

Nous avons donc vu qu'il existe un certain nombre de lois de probabilités dotées de deux ou trois paramètres. Outre les grandeurs objectives (formes analytiques des lois, expressions des moments et des log-moments), il peut s'avérer souhaitable de pouvoir les comparer sur des grandeurs spécifiques permettant une caractérisation aisée.

Une première caractérisation, proposée depuis de longues années, s'appuie sur les coefficients β_1 et β_2 : en particulier, il apparaît que les lois suivant le système de Pearson occupent des régions séparées dans le diagramme β_1 - β_2 et que leur localisation ne dépend que des facteurs de forme (L , M). C'est ce diagramme que Delignon a utilisé pour caractériser des textures en imagerie RSO [16]. Nous verrons dans le paragraphe 4.1 comment se positionnent les lois à trois paramètres vues dans le chapitre 2. Cependant certaines limitations existent puisque, pour être représentables dans ce diagramme, les lois doivent posséder leurs moments jusqu'à l'ordre 4, ce qui exclut les lois "à queue lourde" et donc certaines lois Gamma Inverse et certaines lois de Fisher.

Aussi nous proposons une représentation originale à l'aide des log-cumulants d'ordre 2 et 3 qui conduit au diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$. Nous verrons dans le paragraphe 4.2 comment se positionnent, dans ce nouveau diagramme, les lois à trois paramètres vues dans le chapitre 2 et comment, effectivement, toutes ces lois sont représentables dans ce type de diagramme puisque l'existence de tous leurs log-cumulants est vérifiée par le théorème d'existence du paragraphe 1.3.6.

Pour permettre une comparaison effective de ces diagrammes, des tests seront effectués dans le dernier paragraphe : pour cela, des images synthétiques simulant des textures homogènes vérifiant des lois Gamma, Gamma Inverse, Fisher et \mathcal{K} seront générées et, sur ces images, une analyse par fenêtre glissante permettra de construire les deux diagrammes expérimentaux. Il sera alors possible de calculer les variances expérimentales et de les comparer avec les variances théoriques. Ceci permettra de voir que, pour une même qualité de localisation, le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ requiert beaucoup moins de points que le diagramme β_1 - β_2 .

4.1 Le diagramme β_1 - β_2

La caractérisation d'une d.d.p. est donc traditionnellement effectuée à l'aide du diagramme β_1 - β_2 . Rappelons que ces deux coefficients s'écrivent en fonction des moments centrés d'ordre 2, 3 et 4 (équations 1.21 et 1.22) :

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{M_3^2}{M_2^3} \quad (\text{asymétrie}) \\ \beta_2 &= \frac{M_4}{M_2^2} \quad (\text{aplatissement}).\end{aligned}$$

Pour le système de Pearson, les courbes ainsi obtenues, telles qu'elles sont représentées classiquement [35, 65], sont reprises figure 4.1. Nous allons dans les prochains paragraphes expliciter la localisation des lois classiques, comme les lois Gamma (directe et Inverse), les solutions du système de Pearson de type VI (loi de Fisher) et de type I (Loi Beta), ainsi que la loi log-normale, la loi \mathcal{K} et la loi de Weibull.

Cependant, il est important de souligner que ce diagramme est utilisé pour les lois définies sur \mathbb{R} : en particulier, la loi normale y joue un rôle essentiel et y est représenté par un point ($\beta_1 = 0, \beta_2 = 3$). De plus, comme le coefficient d'asymétrie est proportionnel au carré du moment centré d'ordre 3, on ne peut séparer une loi de sa symétrique. Nous verrons donc que cette représentation est finalement mal adaptée

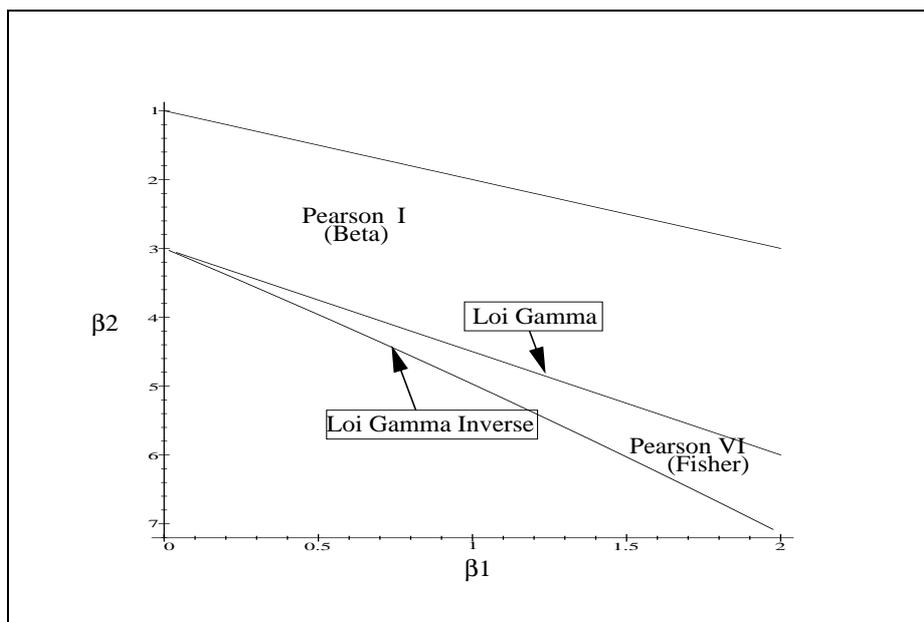


FIG. 4.1 – Diagramme β_1 et β_2 pour le système de Pearson. Ce diagramme est analogue à celui de Kendall & Stuart ([65], p211) pour lequel les abscisses sont comprises entre 0 et 1,8 et les ordonnées entre 1 et 8 (1 en haut, 8 en bas). La loi normale se trouve au point $(\beta_1 = 0, \beta_2 = 3)$.

aux lois définies sur \mathbb{R}^+ : de plus, elle requiert le calcul des moments jusqu'à l'ordre 4, ce qui exclut un certain nombre de lois à queue lourde, comme certaines lois Gamma inverse ($M \leq 4$) et certaines lois de Fisher ($M \leq 4$). Enfin nous verrons ultérieurement que la variance des estimateurs de β_1 et de β_2 fait intervenir des moments jusqu'à l'ordre 8, ce qui conduira à des valeurs d'écart-type très élevées.

Le diagramme β_1 - β_2 possède des branches caractéristiques. en particulier celles relatives aux lois Gamma et Gamma Inverse.

- Nous verrons que la loi Gamma (solution du système de Pearson de type III) est représentée par une droite de pente $\frac{3}{2}$, son origine étant le point caractéristique de la loi normale ($\beta_1 = 0, \beta_2 = 3$).
- De même nous verrons que la loi Gamma Inverse (solution du système de Pearson de type V) est représentée par une quadrique, de pente à l'origine $\frac{15}{8}$, son origine étant le point caractéristique de la loi normale ($\beta_1 = 0, \beta_2 = 3$).
- On montre enfin (voir par exemple [65]) qu'aucune loi ne peut appartenir au demi-plan limité par la demi droite passant par le point $(\beta_1 = 0, \beta_2 = 1)$ et de pente 1.

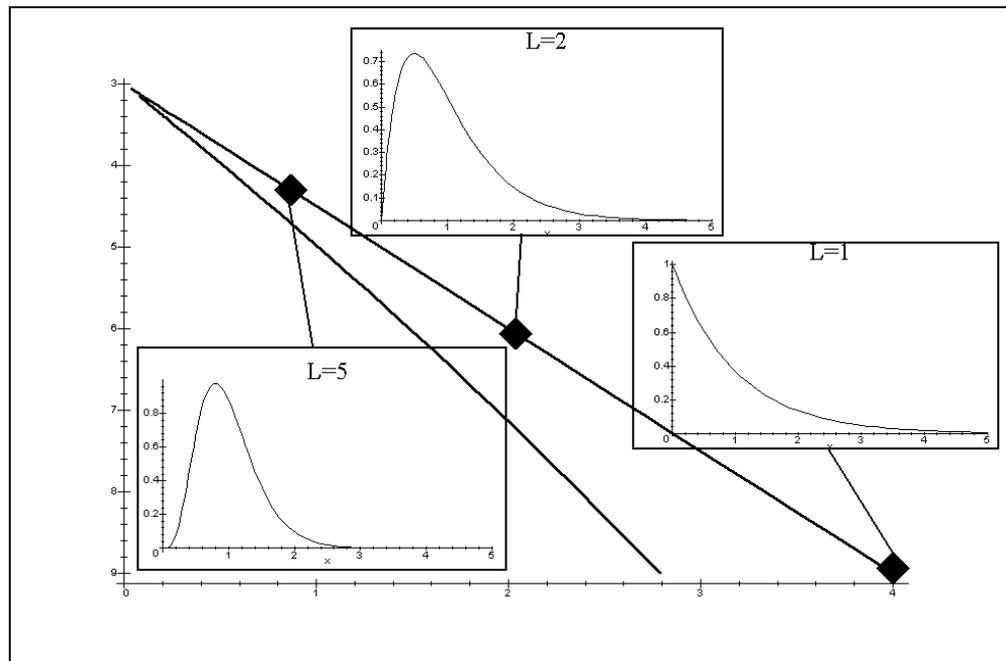
Entre ces branches sont localisées certaines solution du système de Pearson :

- Entre la demi droite d'origine $(\beta_1 = 0, \beta_2 = 1)$ et de pente 1 et la branche des lois Gamma sont localisées les lois Beta (solution de type I du système de Pearson).
- Entre la branche des lois Gamma et celle des lois Gamma Inverse sont localisées les lois de Fisher (solution de type VI du système de Pearson).
- Enfin, pour mémoire, au delà de la branche des lois Gamma Inverse sont localisées les solutions de type IV du système de Pearson, qui ne sont pas des lois définies sur \mathbb{R}^+ (voir annexe C).

Enfin une tradition bien ancrée retourne l'axe des ordonnées : la figure 4.1 est analogue à celle de l'ouvrage [65] et ses ordonnées sont comprises entre 1 et 8 (1 en haut, 8 en bas). Néanmoins, dans ce document, la "pente" sera le vrai rapport $\lim_{y \rightarrow x} \frac{\beta_{2,y} - \beta_{2,x}}{\beta_{1,y} - \beta_{1,x}}$ et non la pente observée sur le diagramme (ces deux valeurs étant égales au signe près).

4.1.1 Lois à deux paramètres

Loi Gamma

FIG. 4.2 – Diagramme β_1 - β_2 de la loi Gamma : trois exemples de lois avec $L= 1,2$ et 5 .

L'expression de la loi Gamma est donnée par l'équation 2.20 :

$$\mathcal{G}[\mu, L](u) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{Lu}{\mu} \right)^{L-1} e^{-\frac{Lu}{\mu}}$$

Le calcul des divers moments centrés de la loi Gamma s'effectue sans difficultés majeures et on obtient :

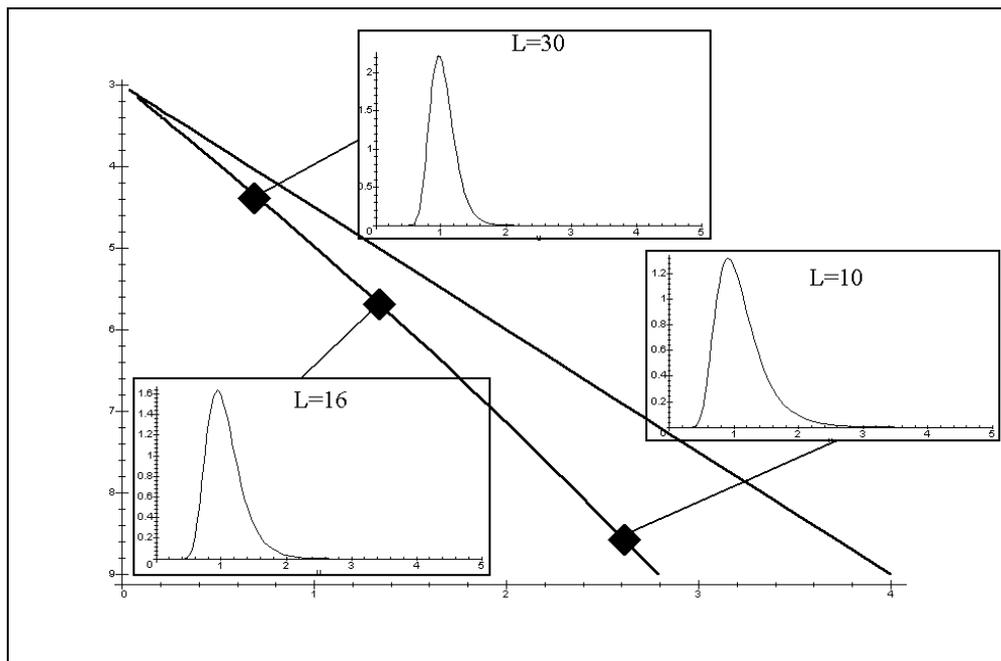
$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{4}{L} \\ \beta_2 &= 3 + \frac{6}{L} \end{aligned}$$

Il est important de noter que β_2 s'exprime linéairement en fonction de β_1 :

$$\beta_2 = 3 + \frac{3}{2}\beta_1$$

La courbe représentant la loi Gamma dans le diagramme est donc une droite, de pente : $\frac{3}{2}$ ($\frac{108}{72}$). Pour $L \rightarrow \infty$, l'origine de la courbe est le point lié à la loi normale : $\beta_1 = 0, \beta_2 = 3$.

Loi Gamma Inverse

FIG. 4.3 – Diagramme β_1 - β_2 de la loi Gamma inverse : trois exemples de lois avec $L= 10, 16$ et 30 .

L'expression de la loi Gamma Inverse est donnée par l'équation 2.45 :

$$\mathcal{GI}[\mu, L](u) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{1}{L\mu} \left(\frac{L\mu}{u}\right)^{L+1} e^{-\frac{L\mu}{u}} \quad L \geq 0 \quad \mu > 0$$

Là aussi, sans difficultés majeures, on obtient les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 16 \frac{L-2}{(L-3)^2} \\ \beta_2 &= 3 \frac{(L+5)(L-2)}{(L-3)(L-4)} \end{aligned}$$

Il n'est plus possible de trouver une relation linéaire entre β_2 et β_1 . On peut simplement noter qu'en réécrivant β_2 sous la forme

$$\beta_2 = 3 + \frac{6(5L-11)}{(L-3)(L-4)}$$

on peut en déduire la relation

$$\beta_2 = 3 + \beta_1 \frac{3(L-3)(5L-11)}{8(L-2)(L-4)}$$

de sorte que pour de fortes valeurs de L (i.e. de faibles valeurs de β_1), β_2 tend linéairement vers la valeur 3 avec, en ce point, une pente égale à $\frac{15}{8} = \frac{135}{72}$.

Ce diagramme ne peut donc représenter qu'une partie des lois Gamma Inverse, puisque β_2 n'est défini que pour $L > 4$. Pour $L \rightarrow 4$, on peut montrer que la pente tend vers l' ∞ . Plus précisément, on trouve :

$$\lim_{L \rightarrow 4} \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{27}{16} \frac{1}{L-4}.$$

En comparant les diagrammes propres à la loi Gamma et à la loi Gamma Inverse, il faut noter que la métrique sous jacente est difficile à deviner. En effet, considérons une loi Gamma de paramètre L et de coefficients β_1 et β_2 .

- Si l'on cherche la loi Gamma inverse ayant le même coefficient β_2 (ce qui revient à tracer une horizontale sur le diagramme en partant de la branche de la loi Gamma et à trouver l'intersection

sur la branche de la loi Gamma Inverse), on peut montrer que le facteur de forme de la loi Gamma Inverse M vérifie la relation :

$$M = \frac{7}{2} + \frac{5}{2}L + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 26L + 25L^2}$$

ce qui donne numériquement :

L	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M	9,6	14,7	19,7	24,7	29,7	34,8	39,8	44,8	49,8	54,8

On comprend mieux pourquoi les exemples pris pour la loi Gamma (figure 4.2) étaient choisis pour les valeurs $L = 1, 2$ et 5 , alors que ceux de la loi Gamma Inverse débutaient à $M = 10$ (figure 4.3) : en effet, le choix des valeurs limites sur les axes correspondait à une optimisation du diagramme pour la loi Gamma qui couvrirait ainsi tout le rectangle de la figure.

- Si l'on cherche la loi Gamma inverse ayant le même coefficient β_1 (ce qui revient à tracer une verticale sur le diagramme en partant de la branche de la loi Gamma et à trouver l'intersection avec la branche de la loi Gamma Inverse), on peut montrer que le facteur de forme de la loi Gamma Inverse M vérifie la relation :

$$M = 3 + 2L + 2\sqrt{L^2 + L}$$

ce qui donne numériquement :

L	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M	7,8	11,9	15,9	19,9	24,0	28,0	32,0	36,0	40,0	44,0

Dans les deux cas, on voit qu'il sera possible de choisir les axes du diagramme pour des lois Gamma plus ou moins localisées (*i.e.* pour des valeurs de L éventuellement faibles). En revanche, sur ce diagramme, on ne pourra caractériser que des lois Gamma Inverse dont le facteur de forme correspond à une localisation plus forte (*i.e.* pour des valeurs de M plutôt élevées) : on se rend ainsi compte que le diagramme β_1 - β_2 est mal adapté aux lois "à queue lourde", constatation assez logique puisque ces coefficients font intervenir des moments jusqu'à l'ordre 4.

Loi Log-normale

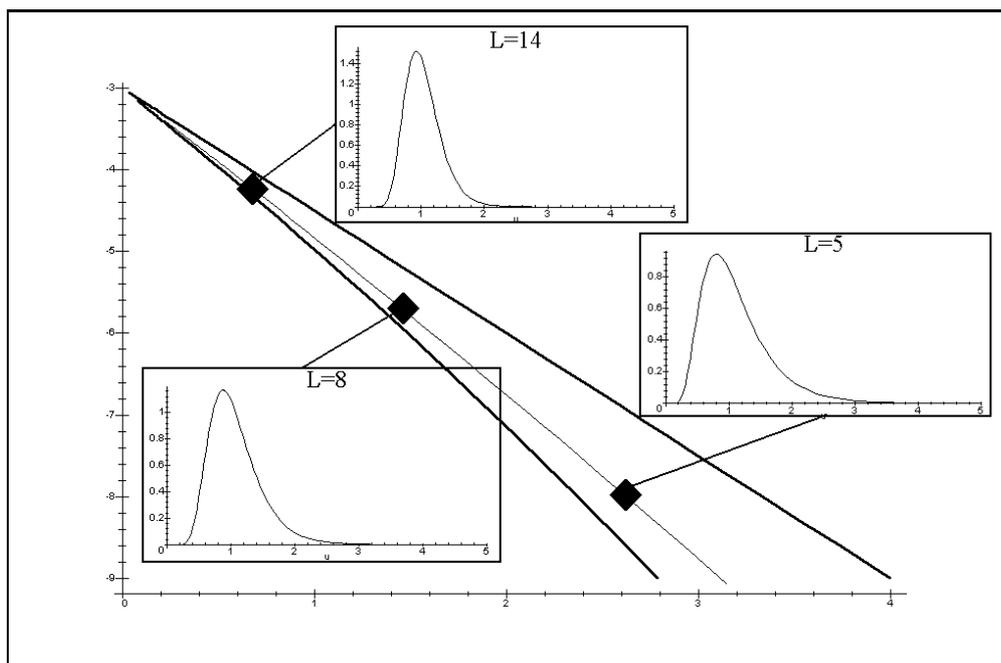


FIG. 4.4 – Diagramme β_1 - β_2 de la loi Log-normale : trois exemples de lois avec $L= 5, 8$ et 14 (avec $\sigma = \sqrt{\Psi(1, L)}$).

L'expression de la loi Log-normale est donnée par l'équation 2.18 :

$$\mathcal{L}[\mu', L](u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Psi(1, L) u} e^{\left(-\frac{(\log u - \log \mu')^2}{2\Psi(1, L)}\right)} \quad u > 0$$

Toujours sans difficultés majeures, on obtient les expressions de β_1 et β_2 :

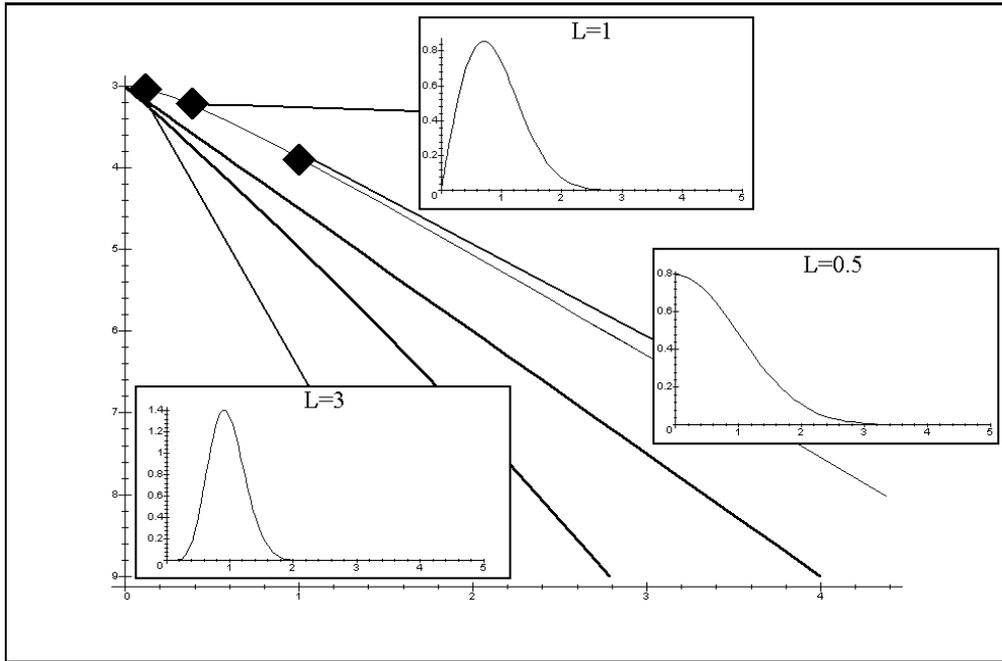
$$\beta_1 = -\frac{\left(-e^{9/2\sigma^2} + 3e^{5/2\sigma^2} - 2e^{3/2\sigma^2}\right)^2}{\left(-e^{2\sigma^2} + e^{\sigma^2}\right)^3}$$

$$\beta_2 = -\frac{-e^{8\sigma^2} + 4e^{5\sigma^2} - 6e^{3\sigma^2} + 3e^{2\sigma^2}}{\left(-e^{2\sigma^2} + e^{\sigma^2}\right)^2}$$

avec $\sigma = \sqrt{\Psi(1, L)}$.

La loi Log-normale est ainsi localisée entre les branches des lois Gamma et Gamma inverse, c'est à dire dans la région dévolue aux lois de Fisher. Pour $L \rightarrow \infty$ (*i.e.* $\sigma \rightarrow 0$), cette loi converge vers le point caractéristique de la loi gaussienne ($\beta_1 = 0, \beta_2 = 3$), avec une pente égale à $\frac{16}{9} = \frac{128}{72}$, donc inférieure à la pente à l'origine de la branche des lois Gamma Inverse ($\frac{135}{72}$), mais supérieure à celle de la loi Gamma ($\frac{108}{72}$).

Loi de Nakagami

FIG. 4.5 – Diagramme β_1 - β_2 de la loi de Nakagami : trois exemples de lois avec $L=0,5, 1$ et 3 .

L'expression de la loi de Rayleigh-Nakagami est donnée par l'équation 2.34 :

$$\mathcal{RN}[\mu, L](u) = \frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{L}}{\Gamma(L)} \left(\frac{\sqrt{L}u}{\mu} \right)^{2L-1} e^{-\left(\frac{\sqrt{L}u}{\mu}\right)^2}.$$

Contrairement à la loi Gamma généralisée, les expressions de β_1 et β_2 sont particulièrement lourdes.

$$\beta_1 = \frac{1}{4} \frac{(\Gamma(\frac{1}{2} + L))^2}{(L(\Gamma(L))^2 - (\Gamma(\frac{1}{2} + L))^2)^3}$$

$$\left((\Gamma(L))^4 - 8(\Gamma(L))^4 L + 16(\Gamma(L))^4 L^2 + 8\left(\Gamma(\frac{1}{2} + L)\right)^2 (\Gamma(L))^2 - 32\left(\Gamma(\frac{1}{2} + L)\right)^2 (\Gamma(L))^2 L + 16\left(\Gamma(\frac{1}{2} + L)\right)^4 \right)$$

$$\beta_2 = \frac{(\Gamma(L))^4 L + (\Gamma(L))^4 L^2 + 2(\Gamma(\frac{1}{2} + L))^2 (\Gamma(L))^2 L - 2(\Gamma(\frac{1}{2} + L))^2 (\Gamma(L))^2 - 3(\Gamma(\frac{1}{2} + L))^4}{(L(\Gamma(L))^2 - (\Gamma(\frac{1}{2} + L))^2)^2}$$

Les d.d.p. suivant une loi de Nakagami se situent, dans le diagramme β_1 - β_2 , au dessus de la loi Gamma, c'est à dire dans la zone traditionnellement attribuée aux lois Beta (solution du système de Pearson de type I, voir figure 4.1).

La courbe représentative des lois de Nakagami convergent vers le point représentatif de la gaussienne pour $L \rightarrow \infty$ avec une pente nulle. Pour les faibles valeurs de L on peut montrer que la pente tend asymptotiquement vers la valeur $\frac{4}{\pi}$. Comme on a la relation $\frac{4}{\pi} < \frac{3}{2}$, on peut constater que la courbe relative à la loi de Nakagami n'est pas parallèle à la branche de la loi Gamma pour $L \rightarrow 0$. Cependant, comme $1 < \frac{4}{\pi}$, ces lois demeurent asymptotiquement dans la région des lois Beta.

Loi de Weibull

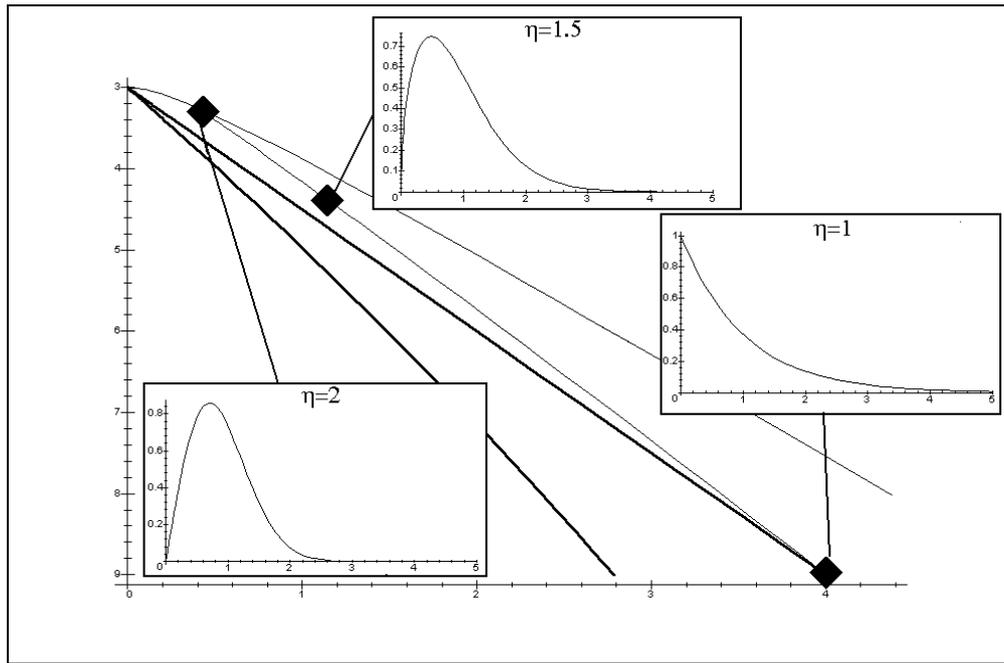


FIG. 4.6 – Diagramme β_1 - β_2 de la loi de Weibull : trois exemples de lois avec $\eta= 1, 1,5$ et 2 . Outre les branches des lois Gamma et Gamma Inverse, on a tracé sur ce même diagramme les lois de Nakagami.

L'expression de la loi de Weibull est donnée par l'équation 2.54 :

$$\mathcal{W}[\mu, \eta](u) = \frac{\eta}{\mu} \left(\frac{u}{\mu}\right)^{\eta-1} e^{-\left(\frac{u}{\mu}\right)^\eta}$$

Malgré la simplicité apparente de l'expression de la loi, le calcul des coefficients d'asymétrie (skewness) et d'aplatissement (kurtosis) s'avère une tâche ingrate : les expressions obtenues ne sont, sauf exception, absolument pas simplifiables et demeurent longues et fastidieuses.

$$\begin{aligned} \beta_1 &= - \left(\left(\Gamma\left(\frac{\eta+3}{\eta}\right) \right)^2 - 6 \Gamma\left(\frac{\eta+1}{\eta}\right) \Gamma\left(\frac{\eta+3}{\eta}\right) \Gamma\left(\frac{\eta+2}{\eta}\right) + 4 \left(\Gamma\left(\frac{\eta+1}{\eta}\right) \right)^3 \Gamma\left(\frac{\eta+3}{\eta}\right) \right. \\ &\quad \left. + 4 \left(\Gamma\left(\frac{\eta+1}{\eta}\right) \right)^6 - 12 \left(\Gamma\left(\frac{\eta+1}{\eta}\right) \right)^4 \Gamma\left(\frac{\eta+2}{\eta}\right) + 9 \left(\Gamma\left(\frac{\eta+1}{\eta}\right) \right)^2 \left(\Gamma\left(\frac{\eta+2}{\eta}\right) \right)^2 \right) \\ &\quad \left(-\Gamma\left(\frac{\eta+2}{\eta}\right) + \left(\Gamma\left(\frac{\eta+1}{\eta}\right) \right)^2 \right)^{-3} \\ \beta_2 &= - \left(4 \Gamma\left(\frac{\eta+1}{\eta}\right) \Gamma\left(\frac{\eta+3}{\eta}\right) - \Gamma\left(\frac{\eta+4}{\eta}\right) - 6 \left(\Gamma\left(\frac{\eta+1}{\eta}\right) \right)^2 \Gamma\left(\frac{\eta+2}{\eta}\right) + 3 \left(\Gamma\left(\frac{\eta+1}{\eta}\right) \right)^4 \right) \\ &\quad \left(-\Gamma\left(\frac{\eta+2}{\eta}\right) + \left(\Gamma\left(\frac{\eta+1}{\eta}\right) \right)^2 \right)^{-2} \end{aligned}$$

La loi de Weibull permet donc de passer continuellement de la loi de Rayleigh (cas $\eta = 2$) à la loi Gamma (cas $\eta = 1$) en passant par des lois intermédiaires apparentées à des lois Beta : c'est l'interprétation que l'on peut donc donner de la figure 4.6.

Pour les valeurs de η inférieures à 1, la loi de Weibull se trouve dans la région dévolue aux lois de Fisher.

Pour des valeurs de η supérieures à 2, il faut noter que β_1 s'annule pour la valeur $\eta = 3.60234$; pour cette même valeur, on trouve $\beta_2 = 2.71686$: pour ces valeurs, la loi de Weibull s'apparente donc à une loi de Pearson de type I.

Pour $\eta = \eta_G = 11, 5913461$, on montre que la courbe intersecte à nouveau la branche de la loi Gamma. Pour cette valeur, la loi de Weibull a mêmes coefficients β_1 - β_2 que la loi Gamma de facteur de forme $L = 8, 219$.

Pour des valeurs de $\eta > \eta_G$, le comportement de la loi de Weibull tendrait à l'apparenter à une loi de Fisher puisque dans le diagramme β_1 - β_2 , elle se trouve entre les branches des lois Gamma et Gamma Inverse.

La figure 4.7 illustre le comportement des lois de Weibull pour η variant entre 1 et l'infini.

Pour la valeur $\eta = \infty$, les valeurs de β_1 et β_2 tendent vers des limites parfaitement calculables mais peu explicites (remarquons que la première relation est une égalité stricte) :

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \beta_2 = \frac{3\Psi(1,1)^2 + \Psi(3,1)}{\Psi(1,1)^2} = 5,4 \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \beta_1 = \frac{\Psi(2,1)^2}{\Psi(1,1)^3} \simeq 1,29875$$

En ce point, la pente est donnée par l'expression suivante (ζ est la fonction Zeta, voir en annexe le paragraphe A.1.6) :

$$-6 \frac{\pi^4 (\zeta(3)\pi^2 + 20 \zeta(5))}{\zeta(3) (2160 (\zeta(3))^2 - 11 \pi^6)} \simeq 2,1265$$

Il faut remarquer que ce point limite n'est donc pas le point origine (0,3) lié à la loi normale et à la loi homothétique : or nous avons vu que la loi de Weibull converge (convergence forte, en loi) vers la loi homothétique quand η tend vers l'infini (relation 2.56). C'est tout ce qui fait la différence entre une convergence "forte" (en loi) et une convergence faible, qui peut mener à des erreurs comme ici (puisque β_1 et β_2 ne convergent pas vers (0,3), on pourrait conclure hâtivement que la loi de Weibull ne converge pas vers la loi homothétique).

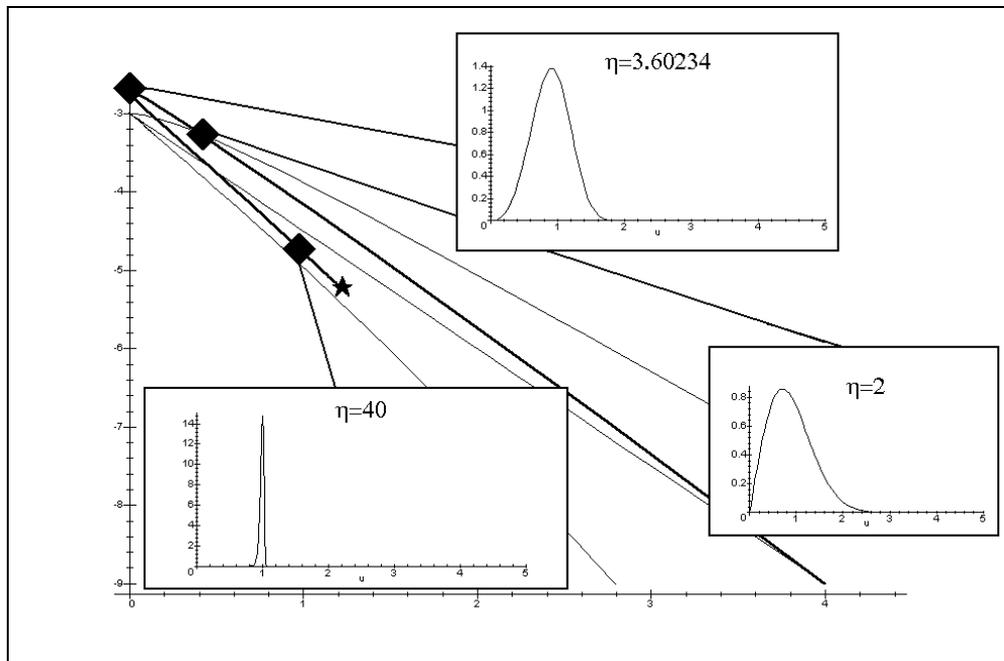
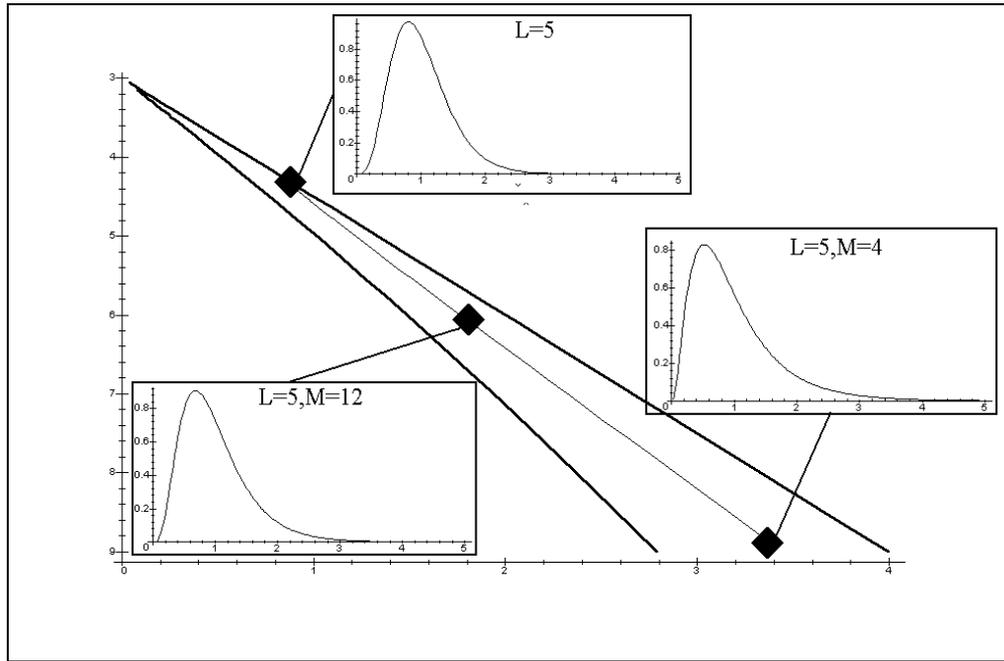


FIG. 4.7 – Diagramme β_1 - β_2 de la loi de Weibull : trois exemples de lois avec $\eta = 2, 3,60234$ (annulation de β_1) et 40. La valeur limite ($\eta = \infty$) est positionné sur ce diagramme par un astérisque . Outre les branches des lois Gamma et Gamma Inverse, on a tracé sur ce même diagramme les lois de Nakagami.

En conclusion, les lois de Weibull sont localisées en partie dans la région spécifique aux lois Beta, en partie dans la région spécifique aux lois de Fisher

4.1.2 Lois à trois paramètres

Loi \mathcal{K} FIG. 4.8 – Diagramme β_1 - β_2 de la loi \mathcal{K} : trois exemples de lois avec $L=5$ et $M = 4, 12, \infty$.

La loi \mathcal{K} vérifie l'équation 2.75 :

$$\mathcal{K}[\mu, L, M] = \mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{G}[1, M] = \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{2LM}{\mu} \left(\frac{LMu}{\mu}\right)^{\frac{M+L}{2}-1} K_{M-L} \left[2 \left(\frac{LMu}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

Les grandeurs β_1 et β_2 s'obtiennent sans difficultés majeures et s'écrivent :

$$\beta_1 = 4 \frac{(2 + 3M + M^2 + 3L + 3LM + L^2)^2}{LM(1 + M + L)^3}$$

$$\beta_2 = 3 \frac{12 + ((L + M)^2 + 6(L + M) + 11)(2L + 2M + LM) + 2LM(L + M)}{LM(1 + M + L)^2}$$

La loi \mathcal{K} se situe donc dans le diagramme β_1 - β_2 dans la région située entre la loi Gamma et la loi Gamma inverse, et qui est celle traditionnellement dédiée aux lois de Fisher (voir figure 4.1).

Pour une valeur de L donnée, on peut montrer que :

- pour $M \rightarrow \infty$, la pente tend vers 2 (et est donc supérieure à $\frac{3}{2}$), et le point correspondant sur le diagramme est positionné sur la branche de la loi Gamma en $(\frac{4}{L}, 3 + \frac{6}{L})$.
- pour $M \rightarrow 0$, la pente s'écrit $\frac{3}{2} \frac{3+L}{2+L}$ ce qui donne des valeurs comprises entre $\frac{3}{2}$ (cas $L \rightarrow \infty$) et $\frac{9}{4}$ (cas $L \rightarrow 0$).

On montre ainsi que, dans tous les cas, la courbe est placée entre la branche de la loi Gamma (de pente $\frac{3}{2}$ pour $L \rightarrow \infty$), et la branche de la loi Gamma Inverse (dont la pente est infinie pour $M \rightarrow \infty$).

Comme les paramètres L et M sont interchangeables, le point caractéristique de la loi $\mathcal{K}[\mu, \hat{L}, \hat{M}]$ peut se construire de deux manières :

- partir du point $(\frac{4}{\hat{L}}, 3 + \frac{6}{\hat{L}})$ et construire la branche caractéristique spécifique aux lois \mathcal{K} telles que $L = \hat{L}$ et $M \in [\hat{M}, \infty]$. La pente pour $M \rightarrow 0$ sera alors $\frac{3}{2} \frac{3+\hat{L}}{2+\hat{L}}$.
- partir du point $(\frac{4}{\hat{M}}, 3 + \frac{6}{\hat{M}})$ et construire la branche caractéristique spécifique aux lois \mathcal{K} telles que $L \in [\hat{L}, \infty]$ et $M = \hat{M}$. La pente pour $L \rightarrow 0$ sera alors $\frac{3}{2} \frac{3+\hat{M}}{2+\hat{M}}$.

Le point du diagramme correspondant à la loi $\mathcal{K}[\mu, \hat{L}, \hat{M}]$ appartient à ces deux courbes qui ont comme propriété de se couper si $\hat{L} \neq \hat{M}$. En effet, soit $\hat{L} > \hat{M}$:

- Puisque $\hat{L} > \hat{M}$, le point d'ancrage sur la branche des lois Gamma sera plus proche de l'axe des ordonnées pour la branche construite à partir du point $\left(\frac{4}{L}, 3 + \frac{6}{L}\right)$ que pour la branche construite à partir du point $\left(\frac{4}{M}, 3 + \frac{6}{M}\right)$.
- Puisque $\hat{L} > \hat{M}$, la pente limite de la branche construite à partir du point $\left(\frac{4}{L}, 3 + \frac{6}{L}\right)$ pour $M \rightarrow 0$ sera plus faible que la pente limite de la branche construite à partir du point $\left(\frac{4}{M}, 3 + \frac{6}{M}\right)$ pour $L \rightarrow 0$.

Donc ces deux courbes ont un point commun qui est celui caractéristique de la loi $\mathcal{K}[\mu, \hat{L}, \hat{M}]$. Le cas $\hat{M} > \hat{L}$ se démontre de manière identique en permutant L et M dans la démonstration.

Le cas $\hat{L} = \hat{M}$ est une caustique et toutes les lois \mathcal{K} sont donc localisées entre la branche de la loi Gamma et cette caustique, donc dans une partie de la région dévolue aux lois de Fisher.

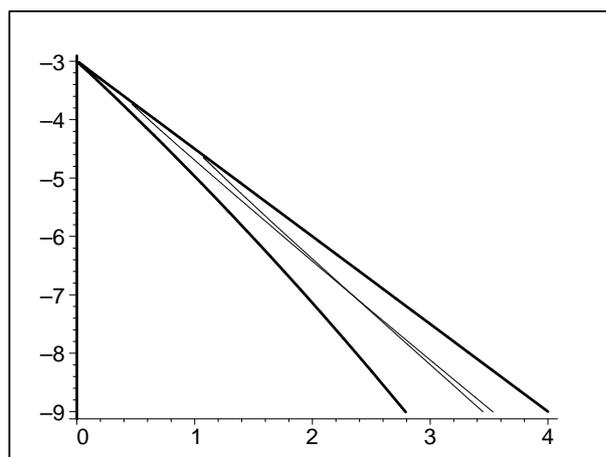
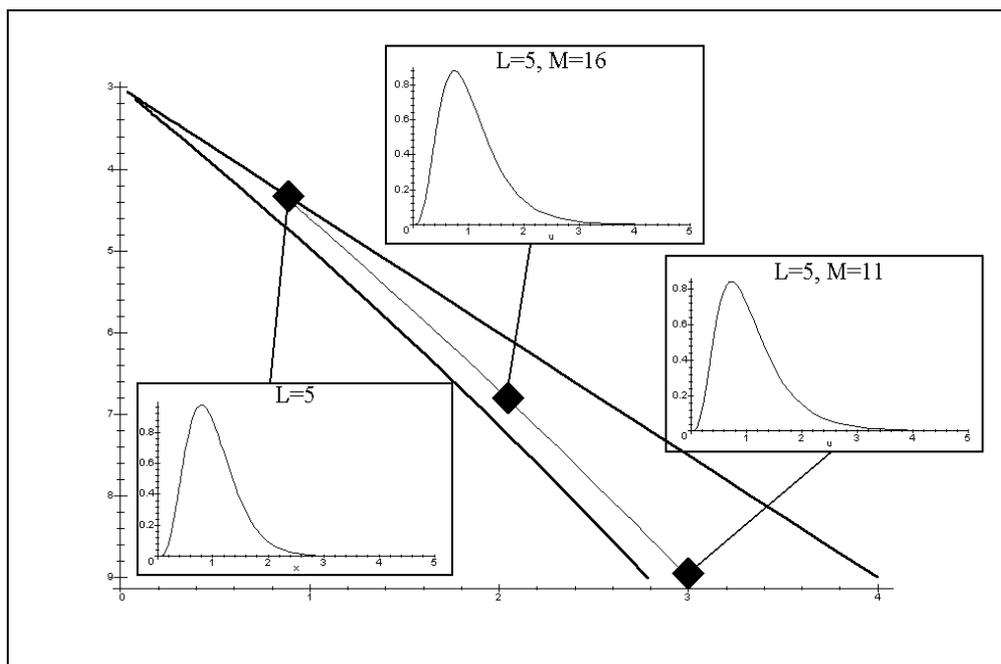


FIG. 4.9 – Construction d'un point correspondant à la loi $\mathcal{K}[\mu = 1, L = 4, M = 9, 87]$

Loi de Fisher (Pearson VI)

FIG. 4.10 – Diagramme β_1 - β_2 de la loi de Fisher : trois exemples de lois avec $L=5$ et $M = 11, 16, \infty$.

L'expression de la loi de Fisher (solution de type VI du système de Pearson) suit l'équation 2.90 :

$$P_{P_{VI}}[\mu, L, M] = \mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, M] = \frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{\left(\frac{Lu}{M\mu}\right)^{L-1}}{\left(1 + \frac{Lu}{M\mu}\right)^{L+M}}$$

Les grandeurs β_1 et β_2 s'obtiennent sans difficultés majeures dans la mesure où $M > 4$ (c'est la même contrainte que celle évoquée pour la loi Gamma Inverse) et s'écrivent :

$$\beta_1 = 4 \frac{(M-2)(M-1+2L)^2}{L(L+M-1)(M-3)^2}$$

$$\beta_2 = 3 \frac{(M-2)(LM^2 + 2M^2 + 4LM + L^2M - 4M + 2 + 5L^2 - 5L)}{L(L+M-1)(M-3)(M-4)}$$

En étudiant les cas limites $L \rightarrow \infty$ et $M \rightarrow \infty$, on montre aisément que la loi de Fisher se situe dans le diagramme β_1 - β_2 dans la région située entre la loi Gamma et la loi Gamma Inverse.

Pour une valeur de L donnée, on peut montrer que :

- Pour $M \rightarrow \infty$, la pente tend vers 2, comme dans le cas de la loi \mathcal{K} (et est donc supérieure à $\frac{3}{2}$, pente de la branche de la loi Gamma). On a alors un point d'ancrage sur la branche de la loi Gamma en $\left(\frac{4}{L}, 3 + \frac{6}{L}\right)$, et la branche démarre bien dans la région des lois de Fisher.
- Pour $M \rightarrow 4$, la pente tend vers $l'infini$. Plus précisément, comme pour la loi Gamma Inverse, on trouve : $\lim_{M \rightarrow 4} \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{27}{16} \frac{1}{M-4}$.

Pour une valeur de M donnée (avec $M > 4$), on peut montrer que :

- pour $L \rightarrow \infty$, la pente tend vers $\frac{3}{2} \frac{M-3}{M-4}$, c'est à dire une valeur à la fois supérieure à la pente de la branche de la loi Gamma (cas $M \rightarrow \infty$) et inférieure à la pente de la branche de la loi Gamma Inverse (cas $M \rightarrow 4$). On a alors un point d'ancrage sur la branche de la loi Gamma Inverse en $\left(16 \frac{M-2}{(M-3)^2}, 3 \frac{(M+5)(M-2)}{(M-3)(M-4)}\right)$, et la branche démarre bien dans la région des lois de Fisher.

Comme dans le cas de la loi \mathcal{K} , un point correspondant aux paramètres (L, M) se trouve à l'intersection de deux branches : l'une issue du point ancré sur la branche de la loi Gamma en $\left(\frac{4}{L}, 3 + \frac{6}{L}\right)$, l'autre issue du point ancré sur la branche de la loi Gamma Inverse en $\left(16 \frac{M-2}{(M-3)^2}, 3 \frac{(M+5)(M-2)}{(M-3)(M-4)}\right)$.

Loi Beta (Pearson I)

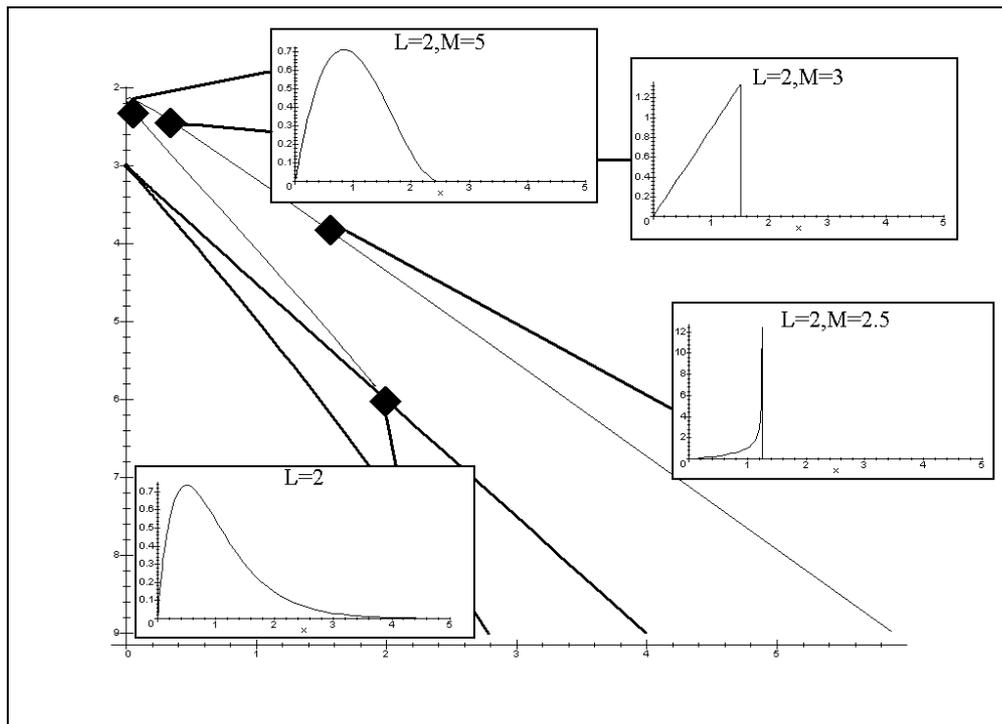


FIG. 4.11 – Diagramme β_1 - β_2 de la loi Beta : quatre exemples de lois avec $L=2$ et $M = 2, 3, 5, \infty$. 1,2 et 5.

La loi Beta suit l'équation 2.99 :

$$P_{P_I} [\mu, L, M] (u) = \frac{L}{M \mu} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \left(\frac{Lu}{M\mu}\right)^{L-1} \left(1 - \frac{Lu}{M\mu}\right)^{M-L-1} \quad u \in \left[0; \frac{M\mu}{L}\right] \quad M > L$$

et ses coefficients β_1 - β_2 s'écrivent :

$$\beta_1 = \frac{4(2L-M)^2(M+1)}{L(M-L)(M+2)^2}$$

$$\beta_2 = -3 \frac{(L^2M - 6L^2 - M^2L + 6LM - 2M^2)(M+1)}{L(M-L)(M+2)(M+3)}$$

On remarque que :

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \beta_1 = \frac{4}{L}$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \beta_2 = 3 + \frac{6}{L}$$

On retrouve bien les caractéristiques de la loi Gamma, qui est le cas limite de la loi Beta pour $M \rightarrow \infty$. En ce point d'ancrage, on montre que la pente est égale à 2.

En revanche :

$$\lim_{M \rightarrow L} \beta_1 = \infty \quad \lim_{M \rightarrow L} \beta_2 = \infty$$

et on ne peut rien déduire de ce cas limite.

Pour $M = 2L$, on montre que $\beta_1 = 0$. Dans ce cas particulier, on montre aussi :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \beta_2 = 3 \quad \lim_{L \rightarrow 0} \beta_2 = 1$$

ce qui explique l'existence de la droite ancrée en $\beta_2 = 1$ de la figure 4.1. De plus on peut montrer que $\lim_{L=0, M=L} \frac{\beta_2}{\beta_1} = 1$, ce qui est la valeur théorique de la pente de cette droite.

On voit que la loi Beta se situe donc dans le diagramme β_1 - β_2 au dessus de la branche de la loi Gamma, et sous la droite d'origine $\beta_2=1$ et de pente 1 (cette droite étant une caustique).

Loi Beta Inverse (Pearson I Inverse)

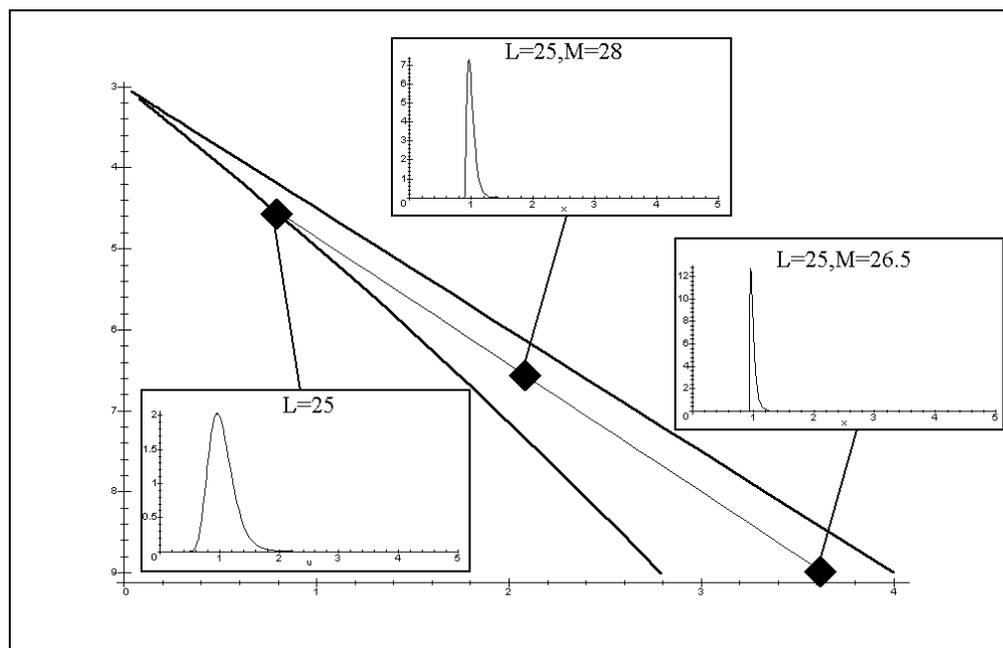


FIG. 4.12 – Diagramme β_1 - β_2 de la loi Beta Inverse : trois exemples de lois avec $L=25$ et $M = 26.5, 28, \infty, 1, 2$ et 5 .

La loi Beta inverse suit l'équation 2.107 :

$$P_{P_{I, inverse}}[\mu, L, M](u) = \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \frac{M}{L\mu} \frac{\left(\frac{Mu}{L\xi} - 1\right)^{M-L-1}}{\left(\frac{Mu}{L\mu}\right)^M} \quad u \geq \frac{L\mu}{M}, \quad M \geq L + 1.$$

Pour $M > L$ et $L > 4$, les coefficients β_1 - β_2 s'écrivent :

$$\beta_1 = \frac{4(L-2M+1)^2(L-2)}{(M-L)(M-1)(L-3)^2}$$

$$\beta_2 = -3 \frac{(L^2M - 3L^2 - L + 6LM - M^2L - 5M^2 - 2 + 5M)(L-2)}{(M-L)(M-1)(L-3)(L-4)}$$

On remarque que :

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \beta_1 = 16 \frac{L-2}{(L-3)^2}$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \beta_2 = 3 \frac{(L+5)(L-2)}{(L-3)(L-4)}$$

On retrouve bien les caractéristiques de la loi Gamma Inverse et on peut montrer qu'en ce point, la pente est égale à $\frac{3}{2} \frac{L-3}{L-4}$.

En revanche :

$$\lim_{M \rightarrow L} \beta_1 = \infty \quad \lim_{M \rightarrow L} \beta_2 = \infty$$

et on ne peut rien déduire de ce cas limite.

On voit que la loi Beta Inverse se situe donc dans le diagramme β_1 - β_2 dans la région située entre la loi Gamma et la loi Gamma inverse, c'est à dire dans la zone de la loi de Fisher.

Loi de Weibull généralisée

La loi de Weibull généralisée suit l'équation 2.66 :

$$\mathcal{WG}[\mu, L, \eta](u) = \frac{\eta}{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{\Gamma(L)} \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} u}{\mu} \right)^{\eta L - 1} e^{-\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} u}{\mu} \right)^{\eta}}.$$

L'expression des coefficients β_1 - β_2 est assez lourde

$$\begin{aligned} \beta_1 &= (\Gamma(L))^4 + 6 (L^5)^{\eta-1} \Gamma\left(\frac{L\eta+1}{\eta}\right) \Gamma\left(\frac{L\eta+2}{\eta}\right) (L^2)^{-\eta-1} \Gamma\left(\frac{L\eta+3}{\eta}\right) (L^3)^{-\eta-1} (\Gamma(L))^3 \\ &\quad - 4 \left(\Gamma\left(\frac{L\eta+1}{\eta}\right) \right)^3 \Gamma\left(\frac{L\eta+3}{\eta}\right) (\Gamma(L))^2 - 9 \left(\Gamma\left(\frac{L\eta+1}{\eta}\right) \right)^2 \left(\Gamma\left(\frac{L\eta+2}{\eta}\right) \right)^2 (\Gamma(L))^2 \\ &\quad + 12 \left(\Gamma\left(\frac{L\eta+1}{\eta}\right) \right)^4 \Gamma\left(\frac{L\eta+2}{\eta}\right) \Gamma(L) \\ &\quad - 4 \left(\Gamma\left(\frac{L\eta+1}{\eta}\right) \right)^6 \left(-\Gamma\left(\frac{L\eta+2}{\eta}\right) \Gamma(L) + \left(\Gamma\left(\frac{L\eta+1}{\eta}\right) \right)^2 \right)^{-3} \\ \beta_2 &= - \left(-\Gamma\left(\frac{L\eta+4}{\eta}\right) (\Gamma(L))^3 + 4 \Gamma\left(\frac{L\eta+1}{\eta}\right) \Gamma\left(\frac{L\eta+3}{\eta}\right) (\Gamma(L))^2 \right. \\ &\quad \left. - 6 \left(\Gamma\left(\frac{L\eta+1}{\eta}\right) \right)^2 \Gamma\left(\frac{L\eta+2}{\eta}\right) \Gamma(L) + 3 \left(\Gamma\left(\frac{L\eta+1}{\eta}\right) \right)^4 \right) \\ &\quad \left(-\Gamma\left(\frac{L\eta+2}{\eta}\right) \Gamma(L) + \left(\Gamma\left(\frac{L\eta+1}{\eta}\right) \right)^2 \right)^{-2} \end{aligned}$$

Pour $\eta = 1$, on retrouve les valeurs de β_1 et β_2 de la loi Gamma Généralisée. Pour $\eta = 2$, on retrouve les valeurs de β_1 et β_2 de la loi de Nakagami. On vérifie aussi que pour $\eta = -1$, on retrouve les valeurs de la loi Gamma Généralisée Inverse, et que pour $\eta = -2$, on retrouve les valeurs de la loi de Nakagami Inverse.

β_1 s'annule pour certaines valeurs de η qui dépendent de L . Le tableau suivant fournit, en fonction de L , les valeurs de β_2 et de η correspondant à une annulation de β_1 :

L	η	β_2
0.05	20.7889	1.850174288
0.1	11.27784	1.944384838
0.5	4.3456	2.481209465
1	3.602348790	2.716861167
4	3.123911377	2.937013304
7	3.067856396	2.965699286
10	3.046558202	2.976507428

On note donc expérimentalement que, pour certaines valeurs de (η, L) , les lois de Weibull Généralisée sont sur un segment de l'axe vertical dont une des extrémités est la valeur (0,3) (point caractéristique de la loi normale). Il semble aussi expérimentalement que l'autre extrémité n'atteigne pas la valeur limite des lois Beta (0,1).

La localisation des lois de Weibull Généralisées n'est pas aisée à préciser.

- Pour $\eta > 1$, on constate que les lois de Weibull Généralisées sont globalement localisées dans la région des lois Beta ("Pearson Γ "). Cependant, pour des valeurs de η suffisamment élevées, la branche correspondant à un L donné recoupe la branche des lois Gamma et se prolonge jusqu'à un point limite situé dans la zone dévolue aux lois de Fisher et dont les coordonnées vérifient les relations suivantes :

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \beta_2 = \frac{3\Psi(1, L)^2 + \Psi(3, L)}{\Psi(1, L)^2} \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \beta_1 = \frac{\Psi(2, L)^2}{\Psi(1, L)^3}$$

Il est alors possible de tracer dans le diagramme β_1 - β_2 cette courbe, ce qui donne, pour des valeurs faibles du facteur de forme L la frontière des lois de Weibull généralisées pour $\eta \rightarrow \infty$ (figure 4.13). On montre en particulier que :

$$\lim_{L=0} \left(\lim_{\eta \rightarrow \infty} \beta_1 \right) = 4 \quad \lim_{L=0} \left(\lim_{\eta \rightarrow \infty} \beta_2 \right) = 9$$

$$\lim_{L=\infty} \left(\lim_{\eta \rightarrow \infty} \beta_1 \right) = 0 \quad \lim_{L=\infty} \left(\lim_{\eta \rightarrow \infty} \beta_2 \right) = 3$$

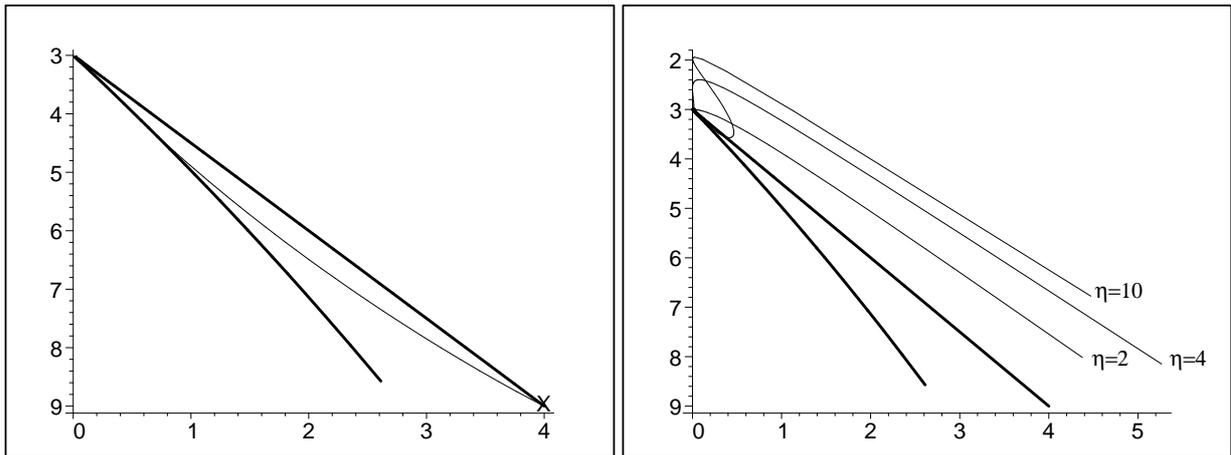


FIG. 4.13 – A gauche : limite de la zone correspondant aux lois de Weibull généralisées pour $\eta \rightarrow \infty$. La zone comprise entre cette courbe et la branche des lois Gamma correspond donc aux fortes valeurs de η et recouvre donc une partie de la région dévolue aux lois de Fisher. On montre que cette courbe limite correspond aussi au cas $\eta \rightarrow -\infty$. La zone comprise entre cette courbe et la branche des lois Gamma Inverse correspond donc aux fortes valeurs de $|\eta|$ (avec $\eta < 0$) et recouvre donc l'autre partie de la région dévolue aux lois de Fisher. A droite : branches de lois de Weibull Généralisée avec, de bas en haut, $\eta = 2$ (loi de Rayleigh Nakagami, allure standard), $\eta = 4$ (cas où la branche tangente l'axe vertical) et $\eta = 10$: ce dernier cas présente une allure complexe avec deux points d'inflexions.

– Pour $\eta < -1$, on peut démontrer de la même manière que :

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} \beta_2 = \frac{3\Psi(1, L)^2 + \Psi(3, L)}{\Psi(1, L)^2}$$

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} \beta_1 = \frac{\Psi(2, L)^2}{\Psi(1, L)^3}$$

ce qui correspond exactement à la même courbe limite de la figure 4.13. Les courbes correspondants aux lois de Weibull Généralisées se retrouvent, en partie, dans la région dévolue aux lois de Fisher, sous la zone correspondant aux grandes valeurs de η vues précédemment, et délimitée par la branche des lois Gamma Généralisées Inverse.

– Pour $-1 < \eta < 1$, l'analyse est plus difficile à mener.

La figure 4.13 montre plusieurs cas de valeurs de η : on remarque qu'aucune allure générale ne peut être attribuée aux branches d'une loi de Weibull Généralisée pour une valeur de η donnée dans le diagramme β_1 - β_2 , vu que l'on y observe certains cas hautement pathologiques.

4.1.3 Premières conclusions

Le diagramme β_1 - β_2 est à première vue parfaitement adapté aux lois du système de Pearson. Grâce aux branches caractéristiques des loi Gamma et loi Gamma Inverse, des zones spécifiques sont ainsi définies pour les lois de Fisher et les lois Beta. Sur ce diagramme, il est alors possible de positionner des lois ne vérifiant pas le système de Pearson, comme la loi \mathcal{K} , la loi de Weibull ou la loi lognormale.

Le point caractéristique de la loi normale joue un rôle important dans ce diagramme, même si on se limite aux lois sur \mathbb{R}^+ . Cependant, il ne faut pas tirer des conclusions hâtives sur le fait que loi Gamma et loi Gamma Inverse soient ancrées sur ce point caractéristique : aucune propriété de convergence forte de lois ne peut être déduit de l'analyse de cet ancrage (qui ne témoigne que de l'existence d'une convergence faible). La pente en ce point est un élément intéressant que l'on peut rappeler –en ordre de pente croissante– dans le tableau suivant :

$\frac{3}{2} = \frac{108}{72}$	Loi Gamma
$\frac{16}{9} = \frac{128}{72}$	Loi log-normale
$\frac{11}{6} = \frac{132}{72}$	Loi de Fisher avec $L = M$
$\frac{15}{8} = \frac{135}{72}$	Loi Gamma Inverse

Cependant, si le système de Pearson, ainsi que la loi normale, semble idéalement représentés dans le diagramme β_1 - β_2 , il faut noter que ce schéma, tel qu'il a été proposé par exemple par Kendall et Stuart, ne permet pas de couvrir la totalité des valeurs des paramètres des lois ainsi représentées. En particulier, il est notable que certaines lois du système de Pearson à queue lourde, comme la loi Gamma Inverse (avec $M \leq 4$) ou la loi de Fisher (avec $M \leq 4$), ne peuvent être traitées dans ce diagramme.

Un point autrement plus délicat est celui de la loi Beta Inverse, ignorée des auteurs classiques, qui est une solution du système de Pearson et qui se retrouve, dans ce diagramme, confondue avec la loi de Fisher. Donc, dans son intégralité, le système de Pearson n'est ni totalement représenté, ni bi-univoquement caractérisé dans le diagramme β_1 - β_2 .

Nous verrons au dernier paragraphe de ce chapitre (4.4) que la caractérisation d'une loi empirique par sa localisation expérimentale dans ce diagramme requiert d'estimer les coefficients β_1 - β_2 sur une fenêtre de taille donnée. Nous verrons alors quelle crédibilité peut on attendre de cette approche. En effet, il est aisé de calculer les variances théoriques des coefficients β_1 - β_2 pour chaque type de loi étudiée, et de voir ainsi la précision de localisation en fonction de la dimension de la fenêtre d'analyse. Cependant, nous verrons qu'en plus de cette variance, les coefficients β_1 - β_2 présentent souvent un biais qui ne devient négligeable que pour de grandes fenêtres d'analyse.

Toujours dans ce même paragraphe, il sera possible d'analyser où apparaissent en pratique les lois à queue lourde qui ne peuvent être théoriquement positionnées dans le diagramme β_1 - β_2 . En effet, dans la mesure où l'on dispose d'un jeu de valeurs bornées sur \mathbb{R}^+ , résultat d'un tirage aléatoire d'une loi donnée, il est toujours possible de calculer tous les moments de ce jeu de données bornées : on en déduit une position empirique dans le diagramme β_1 - β_2 , et nous verrons donc ce qu'il advient de la position des lois de Fisher telles que $M \leq 4$ en particulier.

Enfin notons d'autres diagrammes existent, comme celui de Craig [14], qui remplace β_2 par $\frac{2\beta_2 - 3\beta_1 - 6}{\beta_2 + 3}$: on voit cependant qu'ils sont toujours fortement liés au calcul de β_1 et β_2 , c'est à dire à l'existence des moments d'ordre 3 et 4.

4.2 Le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$

4.2.1 Un nouveau diagramme

Nous avons vu que la modélisation des lois de probabilités permet de définir deux critères (β_1 et β_2) se déduisant des moments classiques.

L'utilisation des statistiques de deuxième espèce requiert donc de définir des critères analogues aux notions traditionnelles que sont l'asymétrie (β_1) et l'aplatissement (β_2). Nous allons voir qu'un choix, tout compte fait très simple, est de retenir les log-cumulants d'ordres 2 ($\tilde{\kappa}_2$) et 3 ($\tilde{\kappa}_3$) et de caractériser ainsi efficacement les différentes lois dans un diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$.

Tout d'abord, remarquons qu'une d.d.p. a un log-cumulant d'ordre 2 positif ou nul. En effet, reprenons l'expression 1.44 :

$$\tilde{\kappa}_2 = \int_0^{+\infty} \left(\log \frac{x}{\tilde{m}} \right)^2 p(x) dx$$

avec (équation 1.36) :

$$\log \tilde{m} = \tilde{m}_1 \Leftrightarrow \tilde{m} = e^{\tilde{m}_1}$$

Puisque $p(x)$ est une d.d.p. donc toujours positif ou nul, $\tilde{\kappa}_2$ ne peut qu'être positif ou nul.

Ensuite, considérons l'expression de $\tilde{\kappa}_3$:

$$\tilde{\kappa}_3 = \int_0^{+\infty} \left(\log \frac{x}{\tilde{m}} \right)^3 p(x) dx$$

Si la loi est à "queue lourde", $\tilde{\kappa}_3$ sera positif puisque les points tels que $x > \tilde{m}$ sont prépondérants. Au contraire, Si la d.d.p. est plus "concentrée" entre l'origine 0 et la log-moyenne, $\tilde{\kappa}_3$ sera négatif : on peut alors parler de "tête lourde".

En choisissant de placer en ordonnée $\tilde{\kappa}_2$ et en abscisse $\tilde{\kappa}_3$, le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ des d.d.p. occupe donc un demi-plan supérieur.

L'origine de ce diagramme –point de coordonnées (0,0)– correspond à la distribution homothétique, et l'axe des ordonnées correspond à une distribution telle que $\tilde{\kappa}_3 = 0$: par exemple, la distribution log-normale est une des lois vérifiant cette propriété.

Etant donné l'importance de la loi Gamma et de la loi Gamma Inverse dans la saga des lois définies sur \mathbb{R}^+ , nous verrons qu'il est utile de commencer à placer ces lois dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ comme référence ainsi qu'il avait déjà été fait dans le cadre du classique diagramme β_1 - β_2 .

4.2.2 Lois à deux paramètres

Loi Log-normale

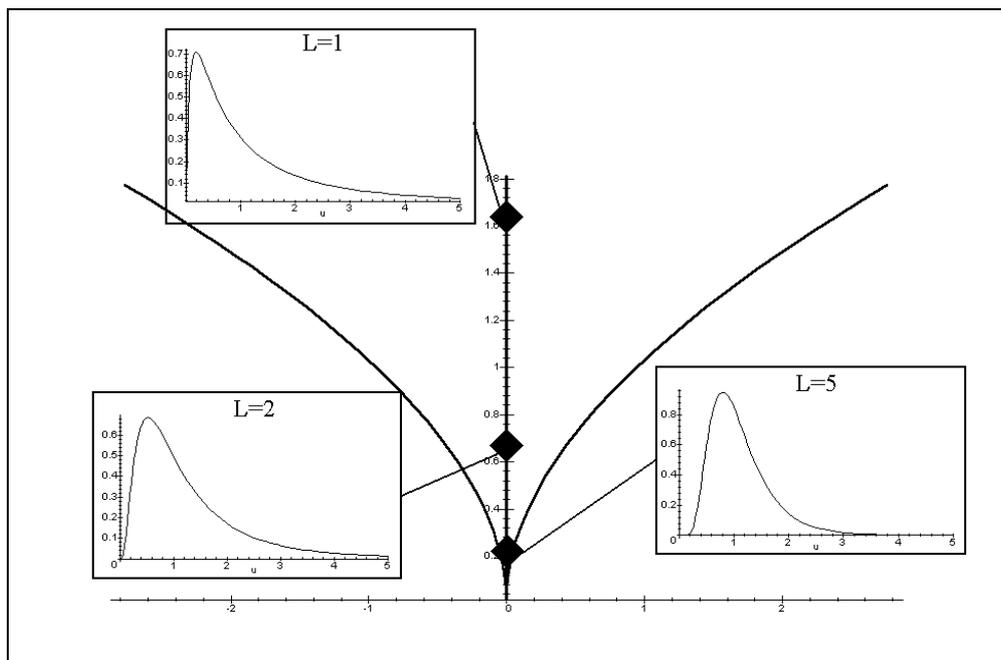


FIG. 4.14 – Diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ de la loi Log-normale : trois exemples de lois avec $L=1, 2$ et 5 . Les branches gauche et droite apparaissant dans ce diagramme correspondent en fait aux lois Gamma et Gamma Inverse, ce que nous précisons dans les paragraphes suivants.

L'expression de la loi Log-normale est donnée par l'équation 2.18 (avec $\sigma = \sqrt{\Psi(1, L)}$) :

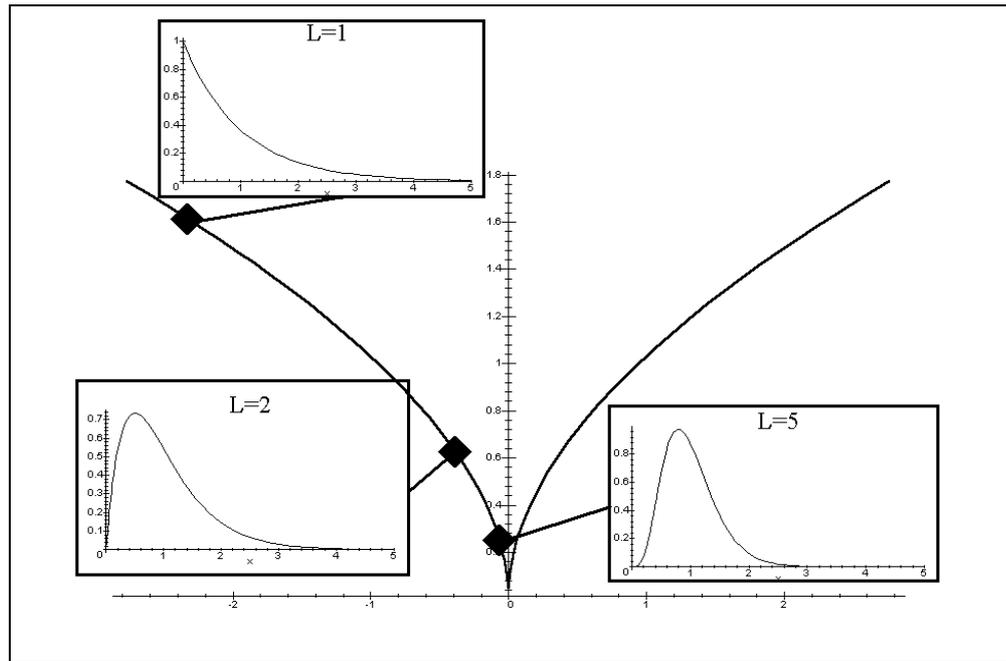
$$\mathcal{L}[\mu', L](u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Psi(1, L) u} e^{\left(-\frac{(\log u - \log \mu')^2}{2 \Psi(1, L)}\right)} \quad u > 0$$

et ses log-cumulants s'écrivent (relations 2.17) :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_2 &= \Psi(1, L) \\ \tilde{\kappa}_3 &= 0 \end{cases}$$

Sur le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$, les lois Log-normales appartiennent donc à l'axe des ordonnées.

Loi Gamma

FIG. 4.15 – Diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ de la loi \mathcal{G} : trois exemples de lois avec $L=1, 2$ et 5 .

L'expression de la loi Gamma est donnée par l'équation 2.20 :

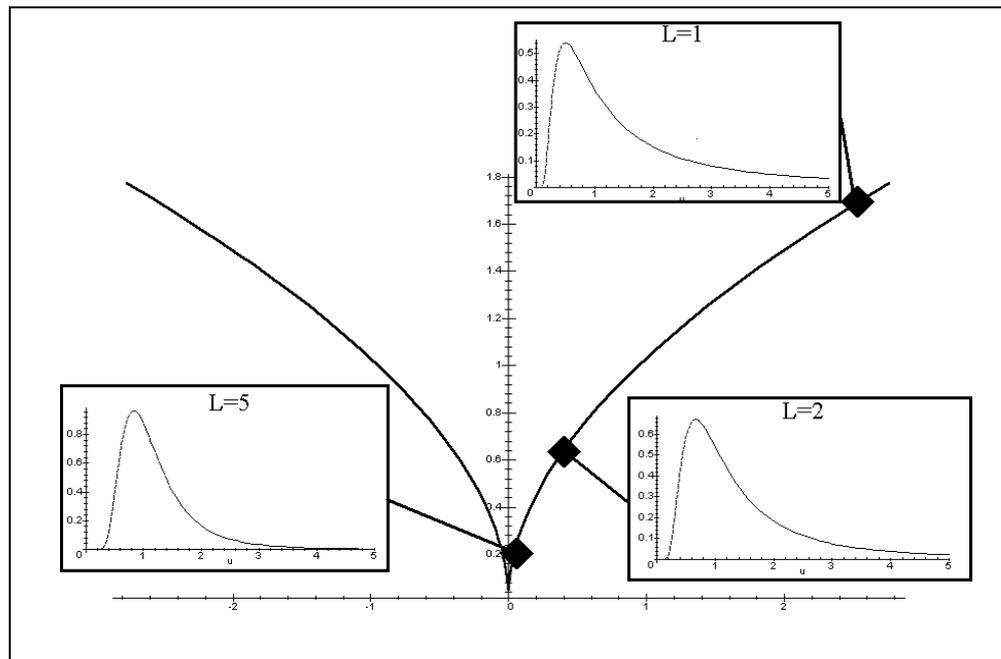
$$\mathcal{G}[\mu, L](u) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{Lu}{\mu} \right)^{L-1} e^{-\frac{Lu}{\mu}}$$

Ses log-cumulants s'écrivent (relations 2.26) :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_2 &= \Psi(1, L) \\ \tilde{\kappa}_3 &= \Psi(2, L) \end{cases}$$

Les lois Gamma décrivent donc une branche très caractéristique dans la partie gauche du diagramme, c'est à dire la partie correspondant aux lois "à tête lourde". Cette branche a pour origine le point $(0,0)$ qui correspond à la distribution homothétique (ce qui est évident dès lors que l'on se souvient que la loi Gamma converge vers la loi homothétique).

Loi Gamma Inverse

FIG. 4.16 – Diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ de la loi \mathcal{GI} : trois exemples de lois avec $L=1,2$ et 5 .

L'expression de la loi Gamma Inverse est donnée par l'équation 2.45 :

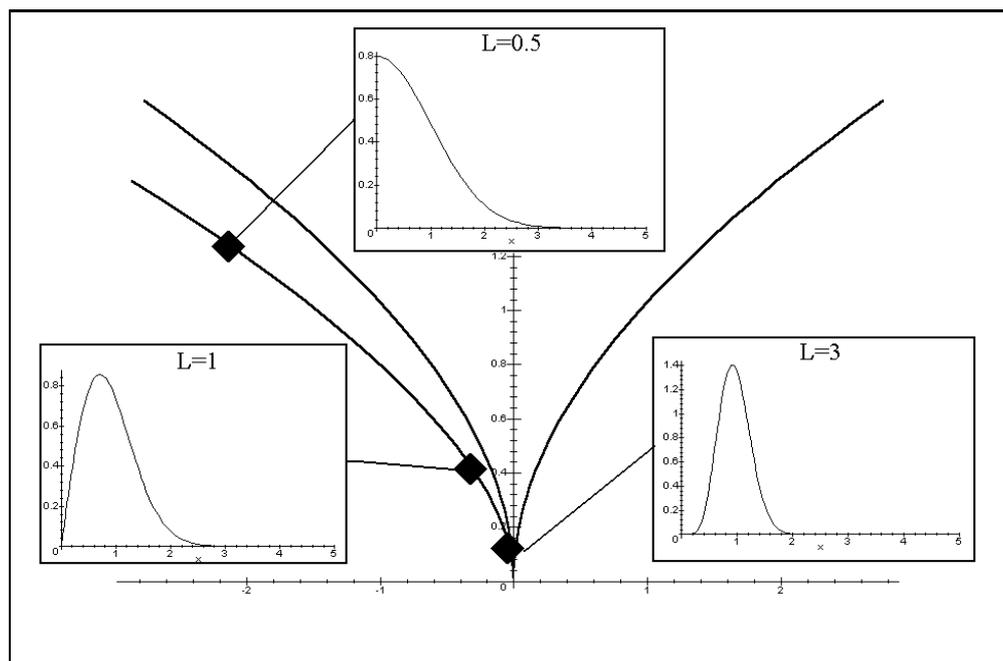
$$\mathcal{GI}[\mu, L](u) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{1}{L\mu} \left(\frac{L\mu}{u} \right)^{L+1} e^{-\frac{L\mu}{u}} \quad L \geq 0 \quad \mu > 0$$

Les log-cumulants s'écrivent :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_2 &= \Psi(1, L) \\ \tilde{\kappa}_3 &= -\Psi(2, L) \end{cases}$$

Les lois Gamma Inverse décrivent donc une branche très caractéristique dans la partie droite du diagramme, c'est à dire la partie correspondant aux lois "à queue lourde". Cette branche a pour origine le point $(0,0)$ qui correspond à la distribution homothétique (ce qui est évident dès lors que l'on se souvient que la loi Gamma Inverse converge vers la loi homothétique). De plus, elles sont parfaitement symétriques des lois Gamma par rapport à l'axe vertical des log-cumulants, ce qui est tout à fait normal eu égard aux propriétés des log-cumulants des lois inverses.

Loi de Nakagami

FIG. 4.17 – Diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ de la loi de Nakagami : trois exemples de lois avec $L=1, 2$ et 5 .

La loi de Nakagami vérifie l'équation 2.34 :

$$\mathcal{RN}[\mu, L](u) = \frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{L}}{\Gamma(L)} \left(\frac{\sqrt{L}u}{\mu} \right)^{2L-1} e^{-\left(\frac{\sqrt{L}u}{\mu}\right)^2}$$

et ses log-cumulants s'expriment (relations 2.42) :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_2 &= \frac{1}{4} \Psi(1, L) \\ \tilde{\kappa}_3 &= \frac{1}{8} \Psi(2, L) \end{cases}$$

Le fait de travailler avec le carré de la variable conduit les lois de Nakagami à se placer en dessous des lois Gamma dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$. Nous verrons bientôt que cette zone correspond aux lois Beta (Pearson type I) : la localisation de la loi de Nakagami est donc la même dans les deux diagrammes puisque nous avons déjà constaté que la loi de Nakagami occupe la zone caractéristique de la loi Beta dans le diagramme β_1 - β_2 .

Notons aussi que, puisque la loi de Nakagami tend vers la loi homothétique pour $L \rightarrow \infty$, la branche de la loi de Nakagami a pour origine le point $(0,0)$.

Loi de Weibull

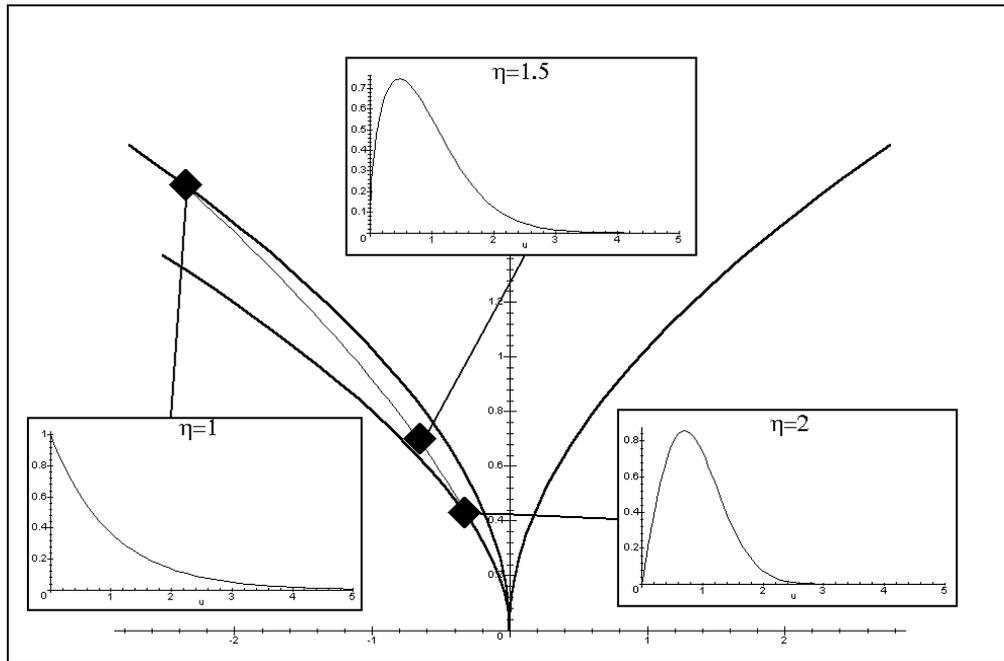


FIG. 4.18 – Diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ de la loi de Weibull : trois exemples de lois avec $\eta=1$ (loi Gamma), 1.5 et 2 (loi de Nakagami). La branche spécifique aux lois de Nakagami a été ajoutée dans le quadrant gauche.

La loi de Weibull vérifie l'équation 2.54 :

$$\mathcal{W}[\mu, \eta](u) = \frac{\eta}{\mu} \left(\frac{u}{\mu}\right)^{\eta-1} e^{-\left(\frac{u}{\mu}\right)^\eta}$$

et ses log-cumulants le système 2.61 :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_2 &= \frac{1}{\eta^2} \Psi(1, 1) \\ \tilde{\kappa}_3 &= \frac{1}{\eta^3} \Psi(2, 1) \end{cases}$$

Puisque pour $\eta = 1$ cette loi est identique à la loi Gamma ($L = 1$), et que pour $\eta = 2$ cette loi est identique à la loi de Nakagami ($L = 2$), la courbe correspondant à la loi de Weibull dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ coupe donc les branches correspondant à la loi Gamma et à la loi de Nakagami en $L = 1$

4.2.3 Lois à 3 paramètres

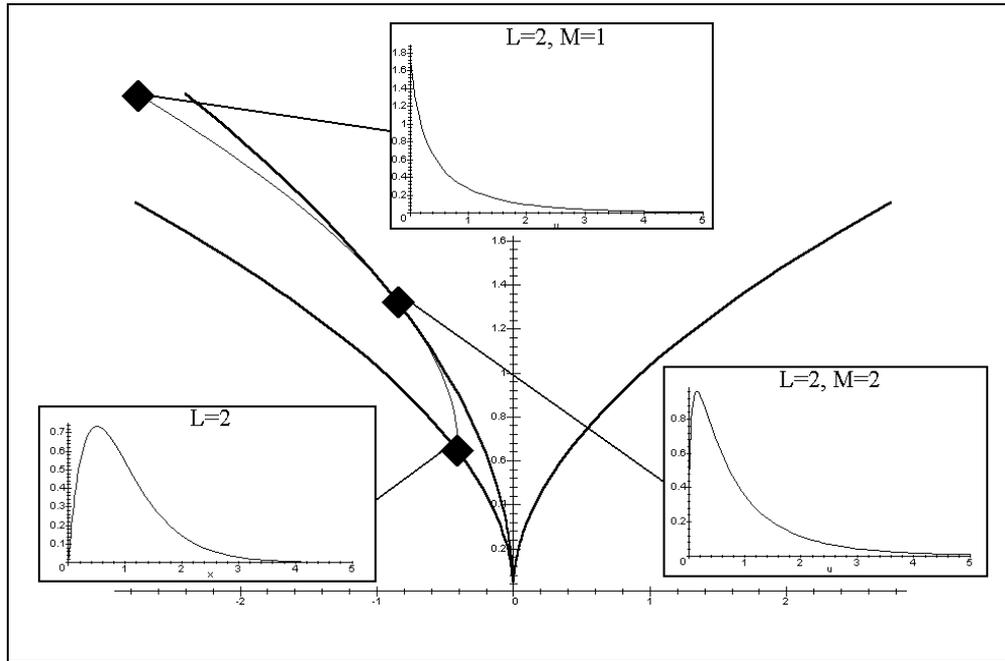
Loi \mathcal{K} 

FIG. 4.19 – Diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ de la loi \mathcal{K} : trois exemples de lois avec $L = 2$ et $M = 1, 2$ et ∞ . La caustique ($\tilde{\kappa}_2 = 2\Psi(1, L)$, $\tilde{\kappa}_3 = 2\Psi(2, L)$) a été tracée dans le quadrant gauche.

La loi \mathcal{K} suit l'équation 2.75 :

$$\mathcal{K}[\mu, L, M] = \mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{G}[1, M] = \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{2LM}{\mu} \left(\frac{LMu}{\mu}\right)^{\frac{M+L}{2}-1} K_{M-L} \left[2 \left(\frac{LMu}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Ses log-cumulants s'écrivent (relations 2.77) :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_2 &= \Psi(1, L) + \Psi(1, M) \\ \tilde{\kappa}_3 &= \Psi(2, L) + \Psi(2, M) \end{cases}$$

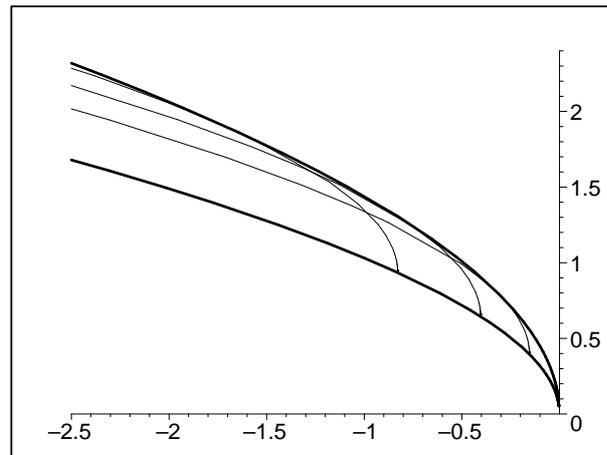


FIG. 4.20 – Diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ de la loi \mathcal{K} : construction de la caustique. Les branches de lois \mathcal{K} tracées correspondent aux valeurs $L = 1$, $L = 2$ et $L = 3$

Les lois \mathcal{K} se placent donc dans le diagramme au dessus des lois Gamma. De plus on montre qu'elles

se situent en dessous d'une caustique d'équation :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_2 &= 2\Psi(1, L) \\ \tilde{\kappa}_3 &= 2\Psi(2, L) \end{cases}$$

En effet, il faut rappeler les propriétés d'additivité des log-cumulants. Aussi, pour une loi $\mathcal{K}[\mu, \hat{L}, \hat{M}]$ donnée, deux manières existent pour trouver sa position dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2\text{-}\tilde{\kappa}_3$:

- positionner sur la branche de la loi Gamma le point correspondant à la loi $\mathcal{G}[\mu, \hat{L}]$ et construire à partir de ce point une première branche de loi Gamma : sur cette branche, le point recherché correspond à la loi $\mathcal{G}[\mu = 1, \hat{M}]$.
- positionner sur la branche de la loi Gamma le point correspondant à la loi $\mathcal{G}[\mu, \hat{M}]$ et construire à partir de ce point une seconde branche de loi Gamma : sur cette branche, le point recherché correspond à la loi $\mathcal{G}[\mu = 1, \hat{L}]$.

On montre aisément que ces deux branches se coupent au point recherché, excepté si $\hat{L} = \hat{M}$. Ce cas limite est donc une caustique et correspond à une frontière pour les lois \mathcal{K} dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2\text{-}\tilde{\kappa}_3$.

Donc la loi \mathcal{K} se positionne dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2\text{-}\tilde{\kappa}_3$ au dessus de la branche des lois Gamma et en dessous de la caustique ($\tilde{\kappa}_2 = 2\Psi(1, L)$, $\tilde{\kappa}_3 = 2\Psi(2, L)$).

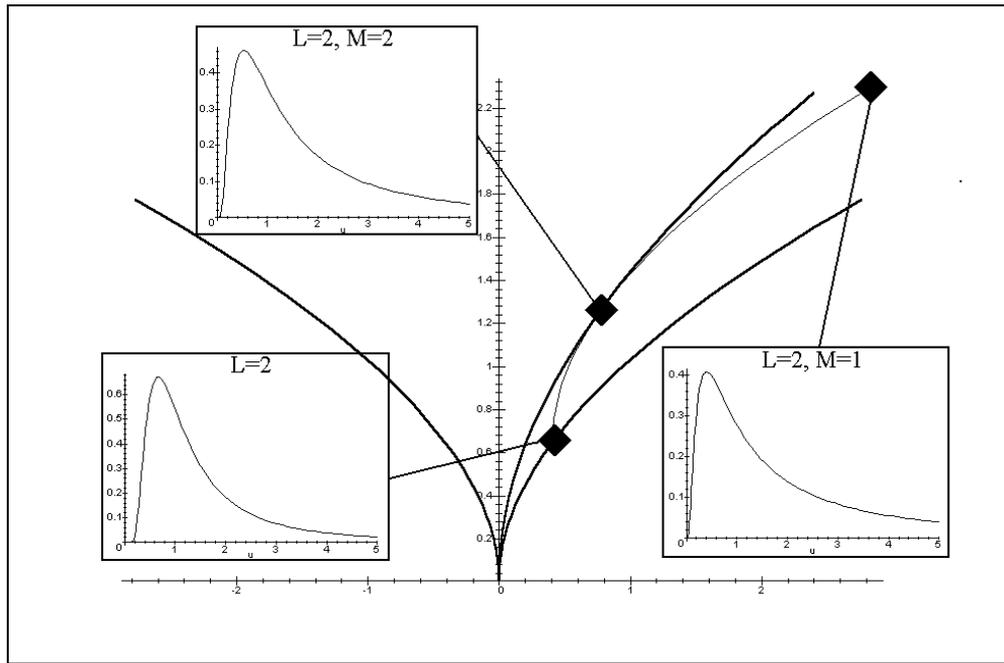
Loi \mathcal{KI} 

FIG. 4.21 – Diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ de la loi \mathcal{KI} : trois exemples de lois avec $L = 2$ et $M = 1, 2$ et ∞ . La caustique ($\tilde{\kappa}_2 = 2\Psi(1, L)$, $\tilde{\kappa}_3 = -2\Psi(2, L)$) a été tracée dans le quadrant droit.

La loi \mathcal{KI} suit l'équation 2.81 :

$$\mathcal{KI}(u) = \mathcal{GI}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, M] = \frac{1}{L\Gamma(L)} \frac{2}{M\Gamma(M)} \frac{1}{\mu} \left(\frac{LM\mu}{u}\right)^{\frac{M+L}{2}+1} K_{M-L} \left[2 \left(\frac{LM\mu}{u}\right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Les log-cumulants s'écrivent (relations 2.85) :

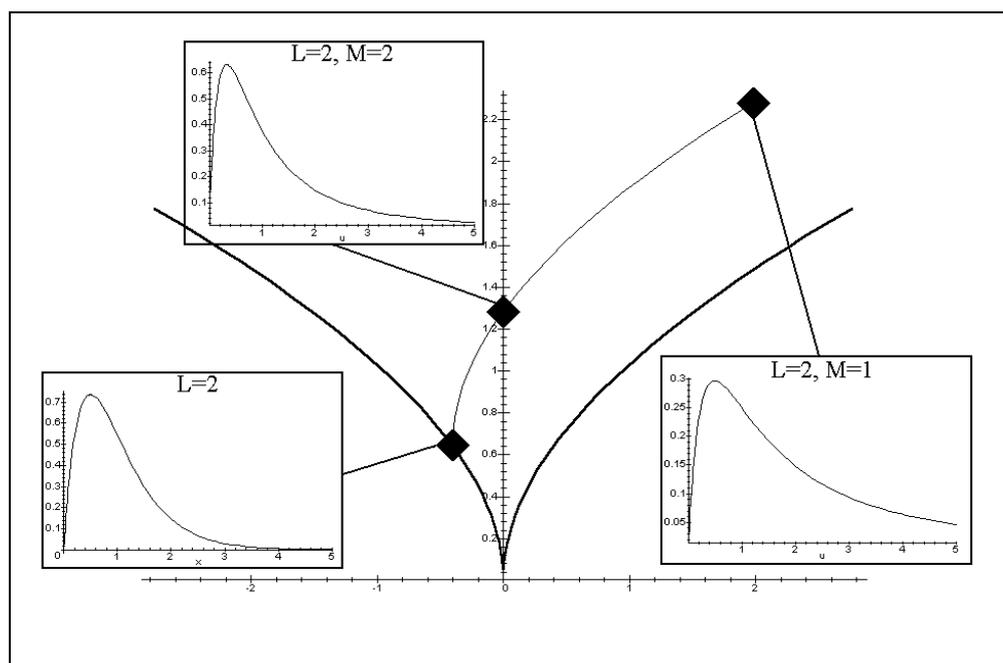
$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_2 &= -\Psi(1, L) - \Psi(1, M) \\ \tilde{\kappa}_3 &= -\Psi(2, L) - \Psi(2, M) \end{cases}$$

A partir d'un raisonnement identique à celui mené pour la loi \mathcal{K} , on montre aisément que les lois \mathcal{KI} se placent dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ au dessus de la branche des lois Gamma Inverse et en dessous d'une caustique d'équation :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_2 &= 2\Psi(1, L) \\ \tilde{\kappa}_3 &= -2\Psi(2, L) \end{cases}$$

Cette zone est bien évidemment la zone symétrique (selon l'axe vertical) de la zone spécifique à la loi \mathcal{K} .

Loi de Fisher (Pearson VI)

FIG. 4.22 – Diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ de la loi de Fisher : trois exemples de lois avec $L = 2$ et $M = 1, 2$ et ∞ .

L'expression de la loi de Fisher (solution de type VI du système de Pearson) suit l'équation 2.90 :

$$\mathcal{F}[\mu, L, M] = \mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, M] = \frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{\left(\frac{Lu}{M\mu}\right)^{L-1}}{\left(1 + \frac{Lu}{M\mu}\right)^{L+M}}$$

Les log-cumulants s'écrivent (relations 2.94) :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_2 &= \Psi(1, L) + \Psi(1, M) \\ \tilde{\kappa}_3 &= \Psi(2, L) - \Psi(2, M) \end{cases}$$

En se fondant sur les propriétés d'additivité des log-cumulants, il est aisé de montrer que deux manières existent pour trouver la position d'une loi de Fisher $\mathcal{F}[\mu, \hat{L}, \hat{M}]$ dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$:

- positionner sur la branche de la loi Gamma le point correspondant à la loi $\mathcal{G}[\mu, \hat{L}]$ et construire à partir de ce point une première branche de loi Gamma Inverse : sur cette branche, le point recherché correspond à la loi $\mathcal{GI}[\mu = 1, \hat{M}]$.
- positionner sur la branche de la loi Gamma Inverse le point correspondant à la loi $\mathcal{GI}[\mu, \hat{M}]$ et construire à partir de ce point une seconde branche de loi Gamma : sur cette branche, le point recherché correspond à la loi $\mathcal{G}[\mu = 1, \hat{L}]$.

Ces deux branches se coupent au point recherché.

Les lois de Fisher se placent donc dans le diagramme entre la branche des lois Gamma et celle des lois Gamma Inverse. Notons que les lois $\mathcal{F}[\mu, L, L]$ sont confondues sur ce diagramme avec les lois Log-normales. Notons aussi que les lois \mathcal{K} et \mathcal{KI} appartiennent au domaine de ces lois.

Remarquons enfin que, puisque une loi de Fisher inverse est aussi une loi de Fisher, il est naturel que la zone couverte par les lois de Fisher soient invariantes par symétrie selon l'axe vertical.

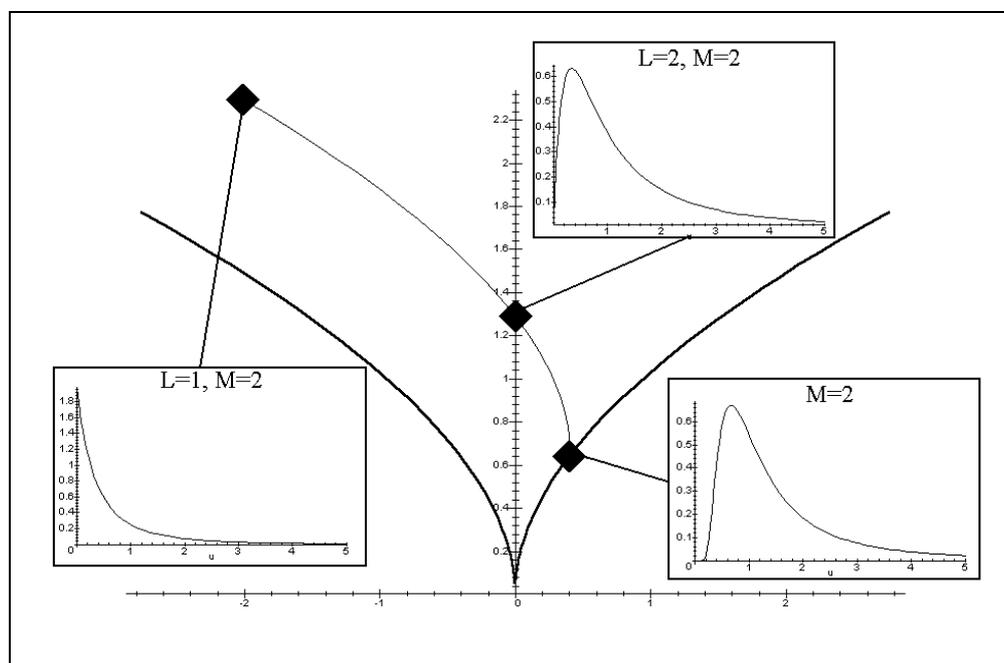


FIG. 4.23 – Diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ de la loi de Fisher : trois exemples de lois avec $M=2$ et L 1,2 et ∞ .

Loi Beta (Pearson I)

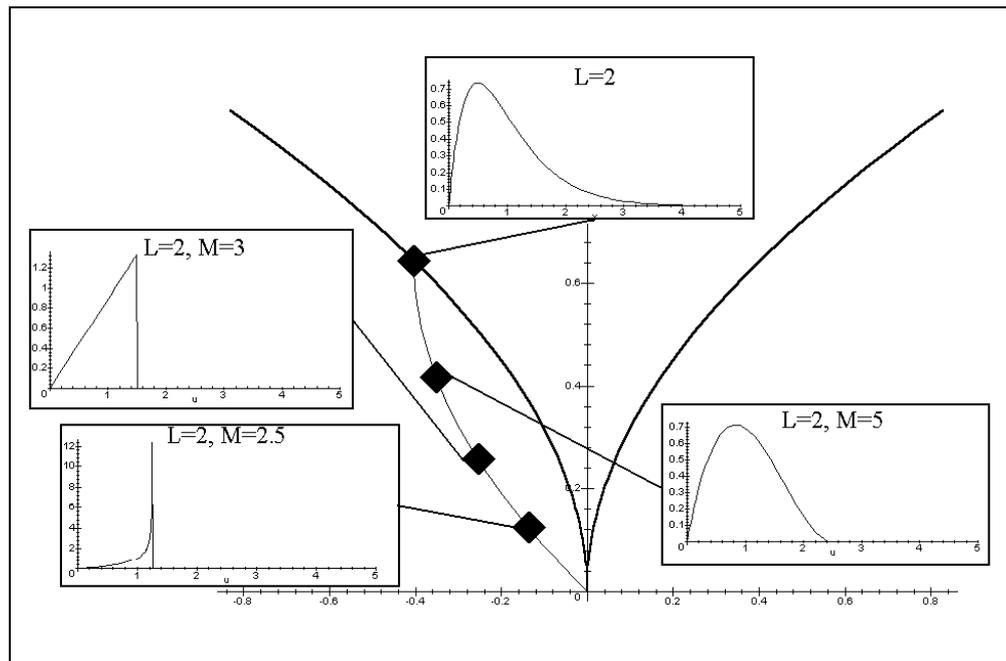


FIG. 4.24 – Diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ de la loi Beta (Pearson I) : quatre exemples de lois avec $L=2$ et $M=2, 2.5, 3, \infty$

Cette loi vérifie l'équation 2.90 :

$$P_{P_I}[\mu, L, M] = \mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star}^{-1} \mathcal{G}[1, M] = \frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \left(\frac{Lu}{M\mu}\right)^{L-1} \left(1 - \frac{Lu}{M\mu}\right)^{M-L-1} \quad u \in \left[0; \frac{M\mu}{L}, M \geq L\right]$$

Les log-cumulants s'écrivent (relations 2.102) :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_2 &= \Psi(1, L) - \Psi(1, M) \\ \tilde{\kappa}_3 &= \Psi(2, L) - \Psi(2, M) \end{cases}$$

Ces expressions, liées aux propriétés d'additivité des log-cumulants, permet de construire aisément la position d'une loi Beta $\mathcal{B}[\mu, \hat{L}, \hat{M}]$ dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$:

- Sur la branche des lois Gamma, positionner le point relatif à la loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, \hat{L}]$.
- A partir de ce point, construire une branche qui est en pratique la symétrique par rapport à l'origine de la branche des lois Gamma. Sur cette branche (qui passe par l'origine), on place le point lié à la loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, \hat{M}]$.

La loi Beta occupe ainsi dans le quadrant de gauche (correspondant aux lois "à tête lourde") toute la zone comprise entre les lois Gamma et l'abscisse.

Loi Beta Inverse (Pearson I Inverse)

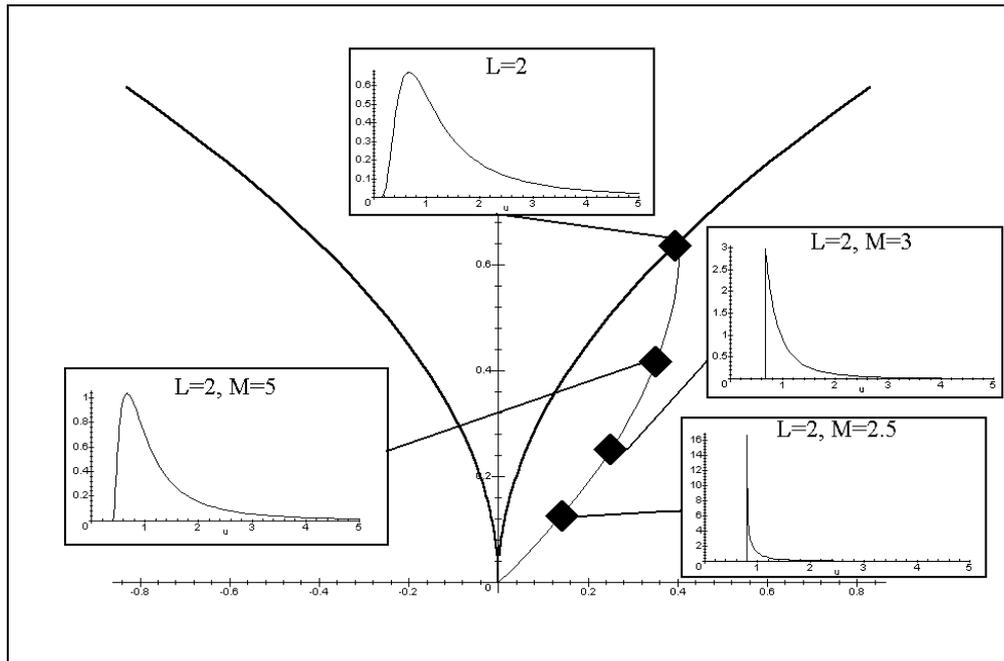


FIG. 4.25 – Diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ de la loi Beta inverse (Pearson I inverse) : quatre exemples de lois avec $L=2$ et $M=2, 2.5, 3, \infty$

Cette loi vérifie l'équation 2.107 :

$$P_{P_{I, inverse}}[\mu, L, M] = \mathcal{GI}[\mu, L] \hat{\star}^{-1} \mathcal{GI}[1, M] = \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \frac{M}{L\xi} \frac{\left(\frac{Mu}{L\xi} - 1\right)^{M-L-1}}{\left(\frac{Mu}{L\xi}\right)^M} \quad u \geq \frac{L\xi}{M}, M \geq L.$$

Ses log-cumulants s'écrivent :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_2 &= \Psi(1, L) - \Psi(1, M) \\ \tilde{\kappa}_3 &= -(\Psi(2, L) - \Psi(2, M)) \end{cases}$$

La loi Beta Inverse occupe ainsi dans le quadrant de droite (correspondant aux lois "à queue lourde") toute la zone comprise entre les lois Gamma Inverse et l'abscisse). C'est en fait la zone symétrique (par rapport à l'axe vertical) de la loi Beta. Cette zone est spécifique à la loi Beta Inverse, contrairement au diagramme β_1 - β_2 où la loi Beta Inverse partagerait une région commune avec les lois de Fisher.

4.2.4 Loi de Weibull Généralisée

La loi de Weibull généralisée suit l'équation 2.66 :

$$\mathcal{WG}[\mu, L, \eta](u) = \frac{|\eta|}{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{\Gamma(L)} \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} u}{\mu} \right)^{\eta L - 1} e^{-\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} u}{\mu} \right)^\eta}.$$

et ses log-cumulants d'ordre 2 et 3 s'écrivent (relations 2.70 et 2.71) :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_2 &= \frac{\Psi(1, 1)}{\eta^2} \\ \tilde{\kappa}_3 &= \frac{\Psi(2, 1)}{\eta^3} \end{aligned}$$

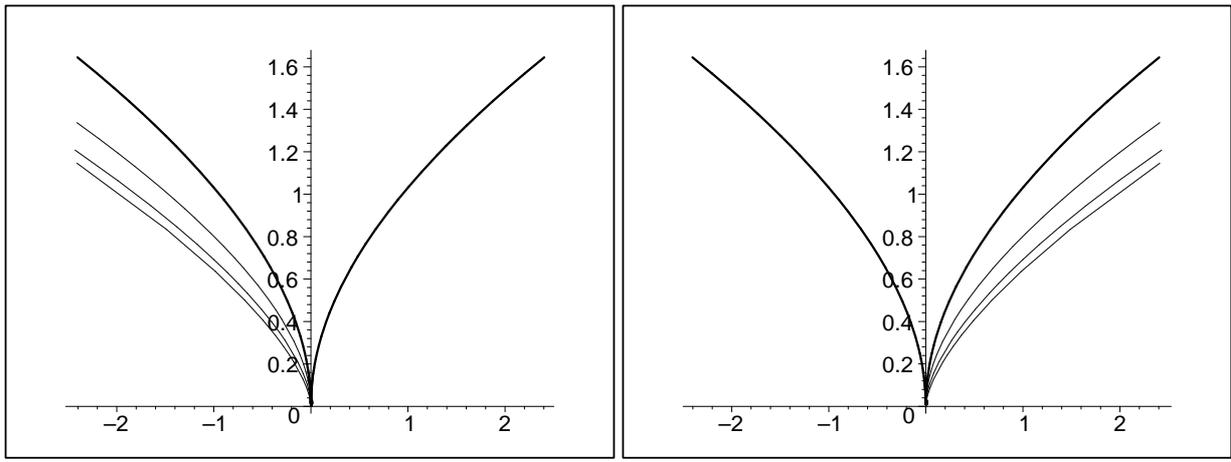


FIG. 4.26 – Cas $|\eta| > 1$. A gauche : branches de lois de Weibull Généralisée avec $\eta = 2$ (loi de Rayleigh Nakagami, allure standard), $\eta = 4$ et $\eta = 10$. Les allures des différentes branches sont comparables (alors que ces allures étaient fortement différentes sur le diagramme β_1 - β_2 , voir figure 4.13). A droite : branches de lois de Weibull Généralisée avec $\eta = -2$ (loi de Rayleigh Nakagami Inverse), $\eta = -4$ et $\eta = -10$.

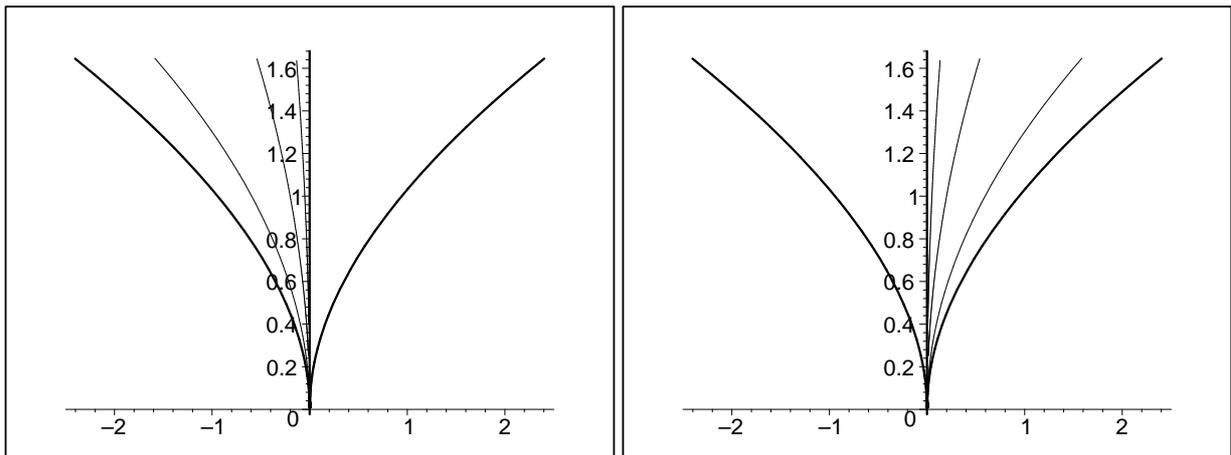


FIG. 4.27 – Cas $|\eta| < 1$. A gauche : branches de lois de Weibull Généralisée avec $\eta = 0.6$, $\eta = 0.2$ et $\eta = 0.05$. Les allures des différentes branches sont comparables à celles des lois Gamma Généralisée. A droite : branches de lois de Weibull Généralisée avec $\eta = -0.6$, $\eta = -0.2$ et $\eta = -0.05$.

Globalement, les branches ont une forte ressemblance avec celles des lois Gamma Généralisée avec comme seule différence notable les pentes à l'origine. Il faut noter aussi que deux branches correspondant à des valeurs de η différentes ne se coupent pas (hormis à l'origine). Enfin, il faut remarquer que :

- Dans le cas $|\eta| < 1$, toute la zone entre la branche des lois Gamma Généralisées et la branche des lois Gamma Généralisées Inverse est couverte par une loi de Weibull Généralisée, hormis l'axe vertical (qui est, rappelons le, le lieu des lois log-normale) qui n'est atteint qu'à l'origine (c'est à dire pour le cas limite de la distribution homothétique).
- Dans le cas $|\eta| > 1$, la zone sous la branche des lois Gamma Généralisées et la zone sous la branche des lois Gamma Généralisées Inverse n'est –semble-t-il– que partiellement couverte par les lois de Weibull Généralisées. Ceci peut se démontrer puisque nous avons vu que, dans le cas de la loi de Weibull Généralisée, on avait la relation suivante, indépendante du paramètre η (relation 3.69) :

$$\frac{\tilde{\kappa}_2^3}{\tilde{\kappa}_3^2} = \frac{\Psi(1, \hat{L})^3}{\Psi(2, \hat{L})^2}$$

et que de plus on a :

$$\lim_{L=0} \frac{\Psi(1, \hat{L})^3}{\Psi(2, \hat{L})^2} = \frac{1}{4}.$$

d'où

$$\begin{aligned} \lim_{L=0} \tilde{\kappa}_2^3 &= \lim_{L=0} \left(\tilde{\kappa}_3^2 \frac{\Psi(1, \hat{L})^3}{\Psi(2, \hat{L})^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \lim_{L=0} \tilde{\kappa}_3^2. \end{aligned}$$

Come on montre aussi que :

$$\frac{\Psi(1, \hat{L}')^3}{\Psi(2, \hat{L}')^2} > \frac{\Psi(1, \hat{L})^3}{\Psi(2, \hat{L})^2} \quad \forall L' > L$$

on a donc :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_2 &= \left(\tilde{\kappa}_3^2 \frac{\Psi(1, \hat{L})^3}{\Psi(2, \hat{L})^2} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &> \left(\frac{\tilde{\kappa}_3^2}{4} \right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

La famille des lois de Weibull généralisées est alors limitée par la courbe :

$$\tilde{\kappa}_2 = \left(\frac{\tilde{\kappa}_3^2}{4} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.1)$$

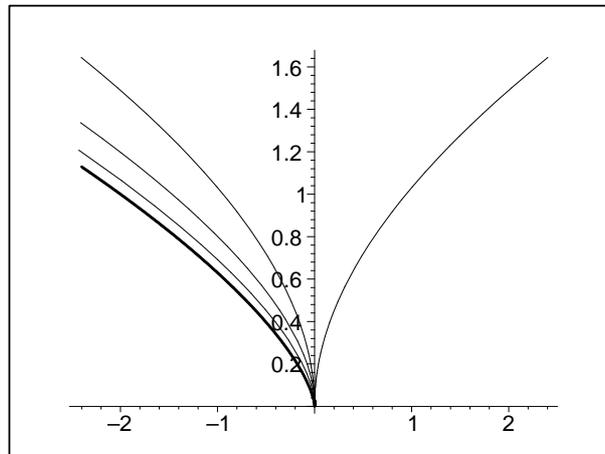


FIG. 4.28 – Branches de lois de Weibull Généralisée avec $\eta = 2$, et $\eta = 4$. La courbe en gras correspond à la frontière inférieure des lois de Weibull Généralisées (courbe d'équation 4.1).

4.2.5 Loi de Rayleigh généralisée

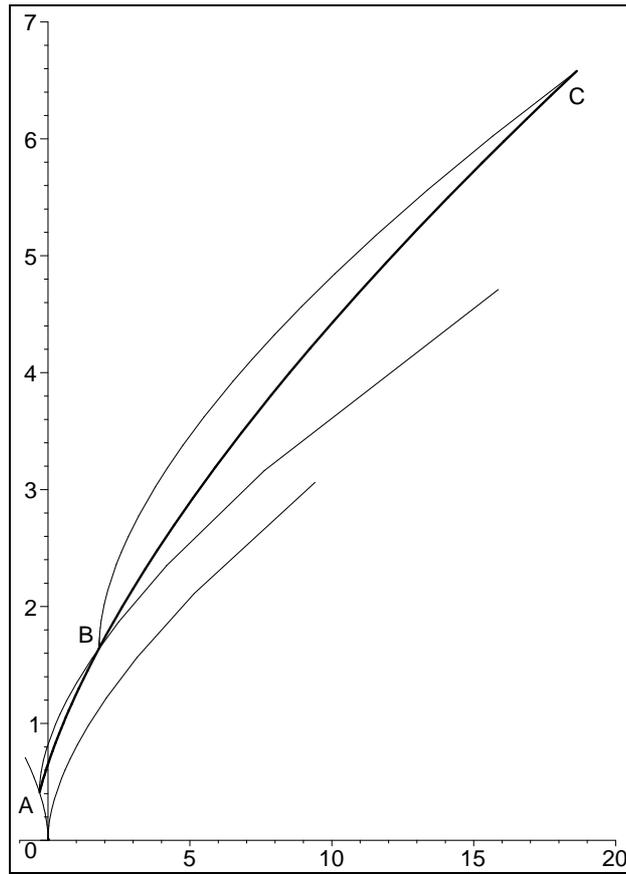


FIG. 4.29 – Diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ pour la loi de Rayleigh généralisée en fonction du paramètre α (en gras). Le point A correspond au cas $\alpha = 2$, c'est à dire à une distribution de Rayleigh. Soit la loi de Fisher en amplitude $\mathcal{F}_A[\mu, 1, M]$: sa représentation démarre du point A (cas dégénéré $M \rightarrow \infty$) et intersecte en B la loi de Rayleigh généralisée pour la valeur $M = \frac{1}{2}$: ce point correspond à la valeur $\alpha = 1$. Depuis B, on construit la loi $\mathcal{RN}\mathcal{I}[1, \frac{1}{4}] \hat{\star} \mathcal{RN}\mathcal{I}[1, M']$: elle intersecte la loi de Rayleigh généralisée (avec $\alpha = \frac{1}{2}$) pour la valeur $M' = \frac{3}{4}$ au point C.

Cette loi a été étudiée au paragraphe 2.5.3. Si la forme analytique de la d.d.p. ne peut être formulée de manière explicite, ses log-cumulants d'ordre 2 et 3 sont en revanche aisément exploitables (relations 2.128 et 2.129) :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_2 &= \frac{\Psi(1, 1)}{\alpha^2} \\ \tilde{\kappa}_3 &= \frac{\Psi(2, 1)}{4} \frac{\alpha^3 - 4}{\alpha^3}\end{aligned}$$

Il est aisé de voir que la courbe correspondante se trouve globalement entre les branches des lois de Nakagami et Nakagami Inverse. Nous avons vu aussi que, pour des valeurs spécifiques de α , cette loi pouvait s'obtenir sous forme de convolution de Mellin de fonctions classiques (lois de Rayleigh-Nakagami, lois de Rayleigh-Nakagami Inverse) :

$\alpha = 2$	$\mathcal{RN}[2\sqrt{\gamma}, 1]$
$\alpha = 1$	$\mathcal{F}_A[2\gamma, 1, \frac{1}{2}] = \mathcal{RN}[\mu, L = 1] \hat{\star} \mathcal{RN}\mathcal{I}[1, M = \frac{1}{2}]$
$\alpha = \frac{1}{2}$	$\mathcal{RN}[\mu, L = 1] \hat{\star} \mathcal{RN}\mathcal{I}[1, M = \frac{1}{2}] \hat{\star} \mathcal{RN}\mathcal{I}[1, M = \frac{3}{4}] \hat{\star} \mathcal{RN}\mathcal{I}[1, M = \frac{1}{4}]$

La figure 4.29 illustre cette construction de ces 3 cas (point A pour $\alpha = 2$ – sur la branche des lois de Nakagami–, point B pour $\alpha = 1$ et point C pour $\alpha = \frac{1}{2}$).

4.3 Comparaison théorique des diagrammes

A ce stade, il est important de récapituler les caractéristiques de ces deux diagrammes et de les comparer.

- Tout d’abord, il faut noter l’importance des branches liées à la loi Gamma et à la loi Gamma Inverse : elles partitionnent l’espace en zones dont la caractérisation est essentielle. Cependant, il faut noter deux différences majeures :
 - Seules les lois Gamma Inverse telles que $M > 4$ sont représentables dans le diagramme $\beta_1\text{-}\beta_2$. En revanche, toutes les lois Gamma Inverse sont représentables dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2\text{-}\tilde{\kappa}_3$.
 - Dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2\text{-}\tilde{\kappa}_3$, pour une ordonnée donnée ($\tilde{\kappa}_2$) correspond une loi Gamma ($\tilde{\kappa}_3' = y < 0$) et son inverse ($\tilde{\kappa}_3 = -y > 0$) : les branches sont symétriques par rapport à la verticale et, pour une valeur donnée du second log-cumulant, les paramètres de forme des deux lois (L pour la Loi Gamma et M pour la loi Gamma Inverse) sont identiques. En revanche, nous avons vu que, pour le diagramme $\beta_1\text{-}\beta_2$, pour une abscisse donnée (β_1), les paramètres de forme (L et M) ne sont pas identiques : la même constatation s’observe si l’on fixe l’ordonnée (β_2).
- Dans les deux cas, la loi de Fisher se trouve dans la région délimitée par ces deux branches. Cependant, il faut noter qu’une partie seulement des lois de Fisher sont représentables dans le diagramme $\beta_1\text{-}\beta_2$: en effet, il faut que le moment d’ordre 4 existe, ce qui impose $M > 4$. En revanche, toutes les lois de Fisher sont représentables dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2\text{-}\tilde{\kappa}_3$.
- Dans les deux cas, à la loi Beta (Pearson type I) correspond une région spécifique dont une des frontières correspond à la branche de la loi Gamma. La seconde frontière est alors :
 - pour le diagramme $\beta_1\text{-}\beta_2$, une droite dont l’existence est démontrée et qui vérifie la relation $\beta_2 = 1 + \frac{\beta_1}{2}$. Au dessus de cette droite, aucune loi de probabilité ne peut être figurée.
 - pour le diagramme $\tilde{\kappa}_2\text{-}\tilde{\kappa}_3$, l’axe horizontal, ce qui correspond à la condition nécessaire des densités de probabilités : $\tilde{\kappa}_2 \geq 0$.
- La loi Beta Inverse suscite quelques questions puisque :
 - pour le diagramme $\tilde{\kappa}_2\text{-}\tilde{\kappa}_3$, elle occupe la région symétrique par rapport à la verticale de la région spécifique à la loi Beta, ce qui est trivial puisque, par définition, la loi Beta Inverse est la loi inverse de la loi Beta : elle a donc le même log-cumulant d’ordre 2 et son log-cumulant d’ordre 3 est simplement l’opposé de celui de la loi Beta. Ce positionnement logique est satisfaisant pour l’esprit.
 - pour le diagramme $\beta_1\text{-}\beta_2$, la région occupée par la loi Beta Inverse est commune avec la région spécifique à la loi de Fisher. Il n’est donc pas possible de séparer sur ce type de diagramme ces deux lois. Il est aussi intéressant de noter que, très curieusement, aucun auteur “traditionnel” ne s’aventure à parler spécifiquement de la loi Beta Inverse, bien que ce soit une solution –certes totalement méconnue– du système de Pearson.

A ce stade, on voit la supériorité du diagramme $\tilde{\kappa}_2\text{-}\tilde{\kappa}_3$ sur le diagramme $\beta_1\text{-}\beta_2$, principalement pour les lois “à queue lourde” : de plus une loi et son inverse occupent exactement la même surface dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2\text{-}\tilde{\kappa}_3$, ce qui n’est absolument pas le cas dans le cas du diagramme $\beta_1\text{-}\beta_2$.

Plus généralement, on peut considérer qu’une certaine inadéquation existe pour la représentation des lois définies sur \mathbb{R}^+ dans le diagramme $\beta_1\text{-}\beta_2$, initialement conçu pour tout type de lois sur \mathbb{R} . Il semble donc que le diagramme $\tilde{\kappa}_2\text{-}\tilde{\kappa}_3$, spécifiquement conçu pour étudier les lois sur \mathbb{R}^+ , soit globalement un outil plus performant pour étudier ce type de lois. Reste à confirmer que ce nouveau diagramme n’est pas seulement un outil théorique mais présente aussi une certaine supériorité sur des jeux de données expérimentales : c’est l’objectif du prochain paragraphe dédié à une étude empirique sur données simulées.

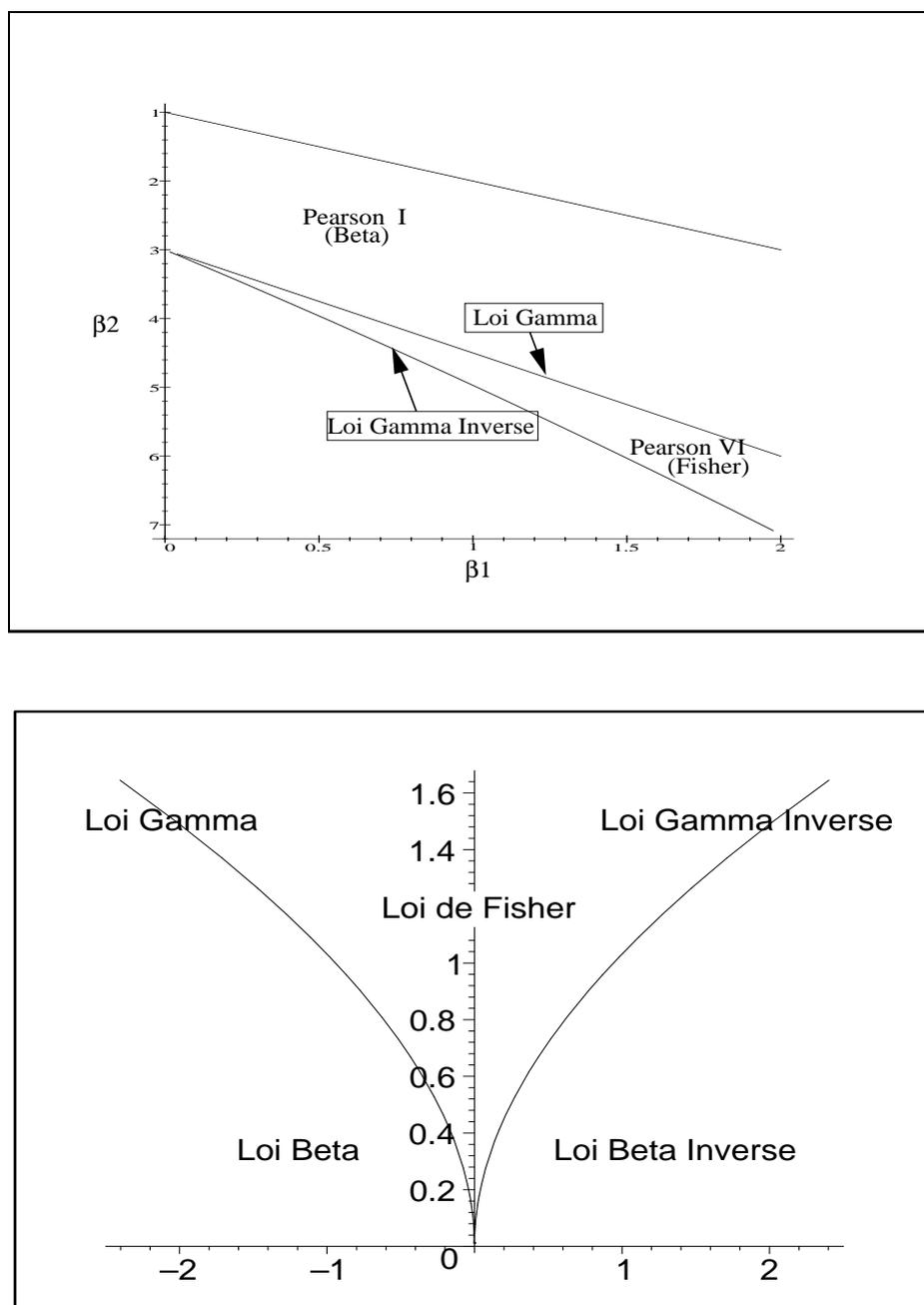


FIG. 4.30 – En haut : diagramme β_1 - β_2 pour le système de Pearson, de présentation analogue à celle de Kendall & Stuart (c'est aussi la reproduction de la figure 4.1). En bas : diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$. Dans les deux cas, les branches spécifiques aux lois Gamma et Gamma Inverse délimitent la région propre à la loi de Fisher. Dans le cas du diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$, tout le demi-espace (correspondant à $\tilde{\kappa}_2 > 0$) est utilisable. Dans le cas du diagramme β_1 - β_2 , seule la région délimitée en haut par la droite $\beta_2 = 1 + \frac{\beta_1}{2}$ et en bas par la branche de la loi Gamma Inverse est utilisable.

4.4 Etude expérimentale sur images de synthèse

4.4.1 Images de synthèse

Pour pouvoir comparer aisément l'utilisation de tels diagrammes sur des images RSO, le plus simple est de disposer de données de synthèses suivant une loi de probabilité donnée. Il existe une loi se génère sans trop de difficultés : la loi Gamma, dont un code de tirage aléatoire existe, par exemple, dans les Numerical Recipes pour des valeurs du facteur de forme entières.

A partir de cet algorithme, il est aisé d'en déduire un code produisant un tirage de valeurs suivant la loi Gamma Inverse (la valeur est simplement l'inverse de la valeur tirée pour une loi Gamma), un code pour la loi \mathcal{K} (produit de deux variables aléatoires suivant une loi Gamma) ainsi qu'un code pour la loi de Fisher (rapport de deux variables aléatoires suivant une loi Gamma).

Ce seront exclusivement ces quatre lois (Gamma, Gamma Inverse, loi \mathcal{K} et Fisher) qui seront utilisées dans ce paragraphe.

4.4.2 Diagrammes expérimentaux β_1 - β_2 et $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$

Pour pouvoir comparer facilement une représentation d'une loi dans différents diagrammes, plusieurs facteurs doivent être pris en compte :

- Puisque les lois références sont les lois Gamma et Gamma Inverse, les diagrammes expérimentaux β_1 - β_2 et $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ font systématiquement apparaître les branches caractéristiques à ces deux lois. Cependant, nous avons vu que, sur le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$, ces deux branches ont une allure symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, alors qu'il n'existe aucune symétrie dans le diagramme β_1 - β_2 . Aussi, pour permettre des comparaisons efficaces entre diagrammes, il nous a semblé utile d'écrire, aux extrémités des branches, les valeurs des paramètres L (loi Gamma) ou M (loi Gamma Inverse), les origines des branches étant dans les deux cas le point lié à la loi homothétique (confondu avec le point caractéristique de la loi gaussienne pour le diagramme β_1 - β_2).
- Toute estimation de grandeurs statistiques s'effectue par des opération de moyennage sur un certain nombre de points, correspondant à une fenêtre sur l'image. Aussi, sur chaque diagramme, la dimension de cette fenêtre est indiquée en bas à gauche.
- Par répétition de l'analyse, on construit donc un nuage de points, chacun correspondant à une estimation des paramètres dans la fenêtre glissante correspondante. Plutôt que de représenter le nuage de points, les diagrammes proposés sont en fait des bi-histogrammes expérimentaux. On peut aisément en caractériser la valeur maximale (le mode de cet histogramme 2-D) et le centre de gravité. Sur les diagrammes, ces deux points caractéristiques pourront apparaître sous la forme d'un \times (le mode) ou d'un \square (centre de gravité).
- A partir d'un nuage de points, il est aisé de calculer les écarts-type (la dispersion) selon les deux axes du diagramme. Nous avons vu aussi qu'il est possible de calculer analytiquement les écarts-type des grandeurs considérées (β_1 , β_2 , $\tilde{\kappa}_2$, $\tilde{\kappa}_3$). Il peut alors être intéressant de tracer les ellipses correspondantes, centrées soit sur la valeur théorique, soit sur le mode), même si les axes du diagramme ne correspondent pas aux axes principaux d'inertie des nuages. Ce dernier point s'explique par le fait que ces variables ne sont pas toujours indépendantes : par exemple, pour une loi Gamma, β_2 s'exprime linéairement en fonction de β_1 et donc le nuage de points sera orienté selon la droite représentative des lois Gamma.

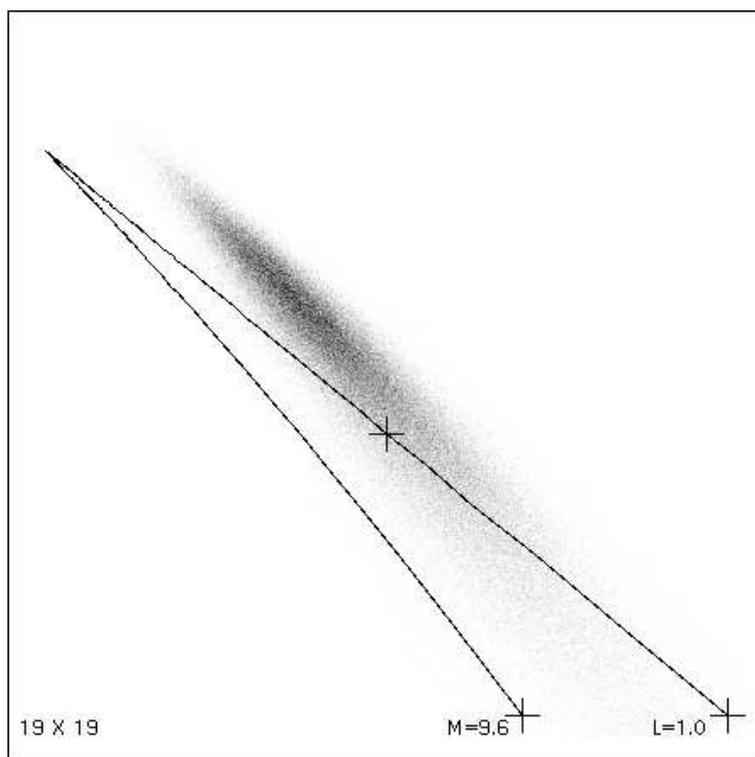
Diagramme expérimental β_1 - β_2 

FIG. 4.31 – Exemple de diagramme β_1 - β_2 pour une image de synthèse correspondant à une loi Gamma $L = 2$. La position théorique est indiquée par le symbole $+$. Les deux branches correspondent aux lois Gamma (branche supérieure, pour L variant entre les valeurs 1 et ∞) et aux lois Gamma Inverse (branche inférieure, pour M variant entre les valeurs 9,6 et ∞). La dimension de la fenêtre d'analyse est de 19×19 .

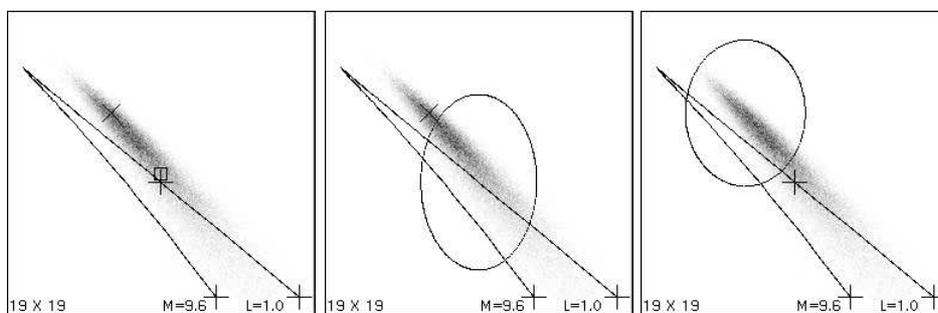


FIG. 4.32 – Diverses représentations du diagramme β_1 - β_2 : à gauche, sont représentés la position théorique (symbole $+$), le centre de gravité du nuage (symbole \square) et le mode du nuage (symbole \times). Au milieu on place le mode (symbole \times) et l'ellipse centrée sur la valeur théorique et de paramètres liés aux écart-types théoriques. À droite on place la valeur théorique (symbole $+$) et l'ellipse centrée sur le mode et de paramètres liés aux écart-types expérimentaux.

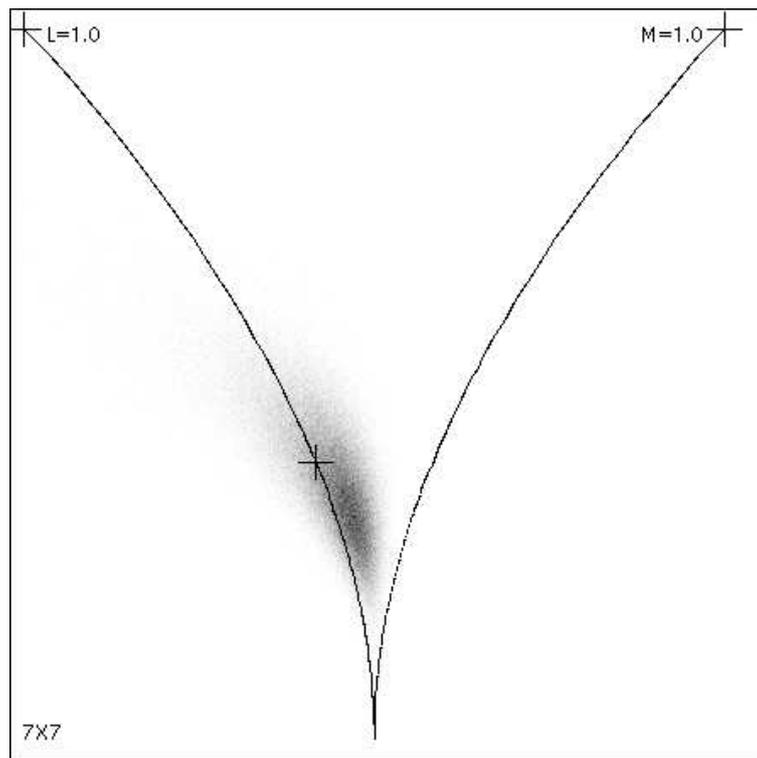
Diagramme expérimental $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ 

FIG. 4.33 – Exemple de diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ pour une image de synthèse correspondant à une loi Gamma $L = 2$. La position théorique est indiquée par le symbole $+$. Les deux branches correspondent aux lois Gamma (branche de gauche, pour L variant entre les valeurs 1 et ∞) et aux lois Gamma Inverse (branche de droite, pour M variant entre les valeurs 1 et ∞). La dimension de la fenêtre d'analyse est de 7×7 .

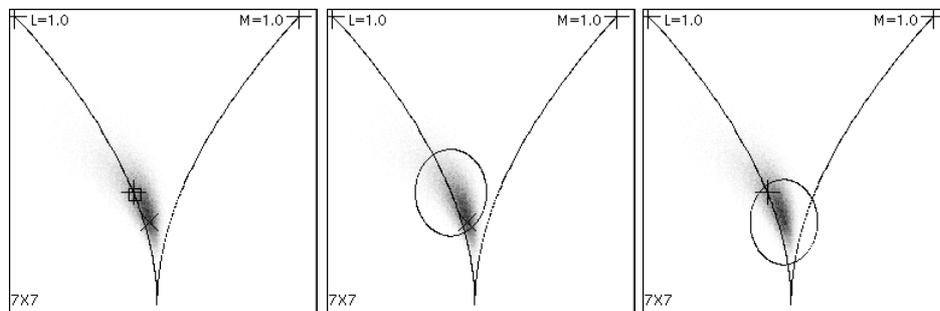


FIG. 4.34 – Diverses représentations du diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$: à gauche, sont représentés la position théorique (symbole $+$), le centre de gravité du nuage (symbole \square) et le mode du nuage (symbole \times). Au milieu on place le mode (symbole \times) et l'ellipse centrée sur la valeur théorique et de paramètres liés aux écart-types théoriques. À droite on place la valeur théorique (symbole $+$) et l'ellipse centrée sur le mode et de paramètres liés aux écart-types expérimentaux.

4.4.3 Etudes de lois

L'étude de la comparaison des diagrammes va commencer avec les lois les plus représentatives des lois définies sur \mathbb{R}^+ :

- La loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L](u)$, à laquelle correspond une branche caractéristique sur les deux diagrammes β_1 - β_2 et $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$.
- La loi Gamma Inverse $\mathcal{GI}[\mu, M](u)$, à laquelle correspond une autre branche caractéristique sur les deux diagrammes β_1 - β_2 et $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$.
- La loi de Fisher : $\mathcal{F}[\mu, L, M](u)$, à laquelle correspond la région comprise entre ces deux branches, tant dans le diagramme β_1 - β_2 que le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$.
- La loi $\mathcal{K} : \mathcal{K}[\mu, L, M](u)$ pour laquelle nous avons vu qu'une zone caractéristique était dévolue dans les deux digrammes, dans la région des lois de Fisher, incluant la branche de la loi Gamma (ce qui est normal puisque la loi Gamma est un cas limite de la loi \mathcal{K}).

Pour permettre une première comparaison, les dimensions des fenêtres d'analyse sont différentes pour les deux diagrammes (nous approfondirons le problème de la variance des estimateurs de β_1 , β_2 , $\tilde{\kappa}_2$ et $\tilde{\kappa}_3$ en fonction de la dimension de la fenêtre d'analyse, *i.e.* du nombre de points retenus pour l'estimation, au paragraphe 4.4.4). De plus, nous ne traiterons dans ce paragraphe que des lois effectivement représentables dans les deux diagrammes : les lois Gamma Inverse et les lois de Fisher seront choisies de telle sorte que $M > 4$.

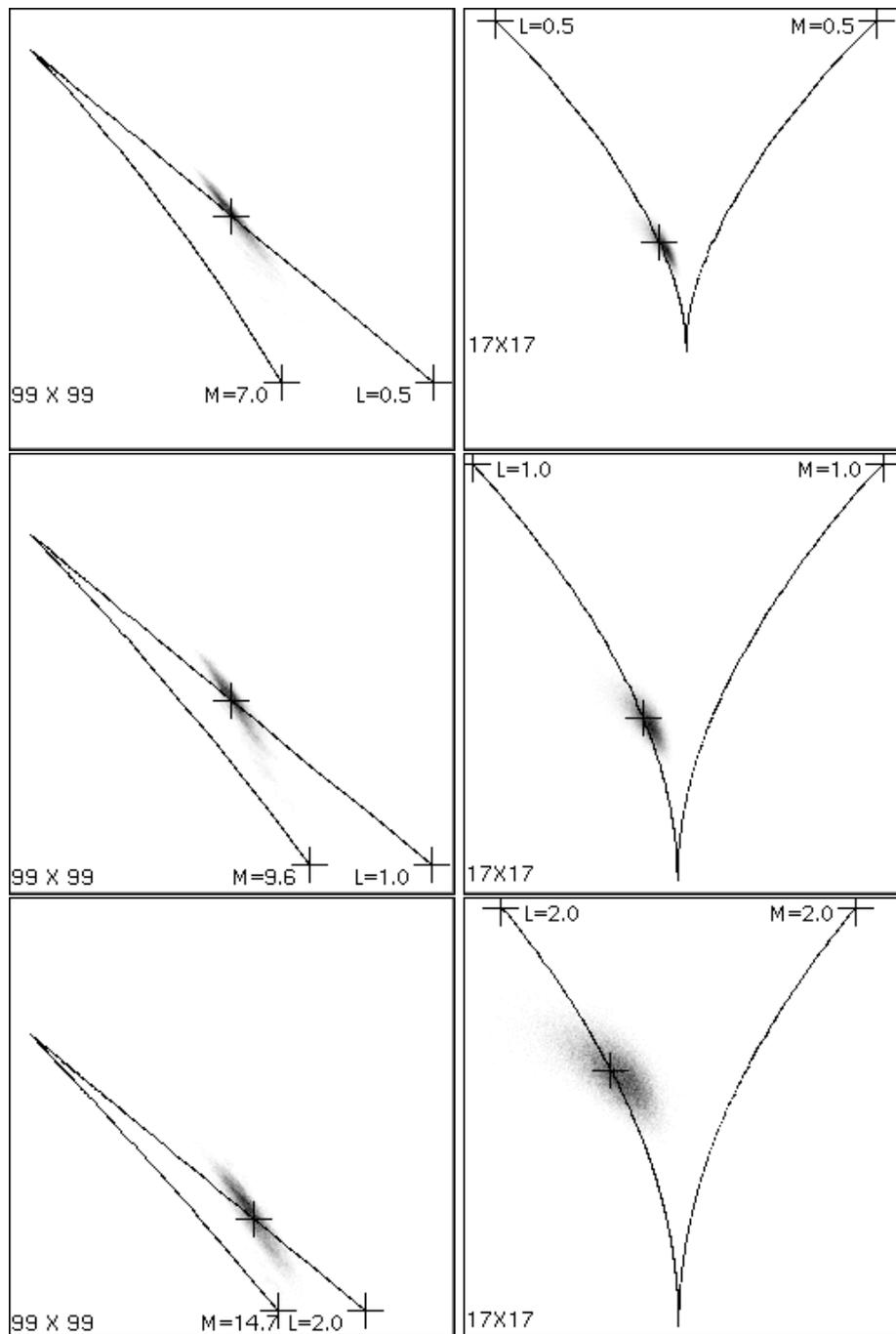


FIG. 4.35 – **Loi Gamma** : comparaison des diagrammes β_1 - β_2 et $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ pour une image de synthèse correspondant à des lois Gamma avec $L = 1$ (haut) $L = 2$ (milieu) et $L = 3$ (bas) . La position théorique est indiquée par le symbole +.

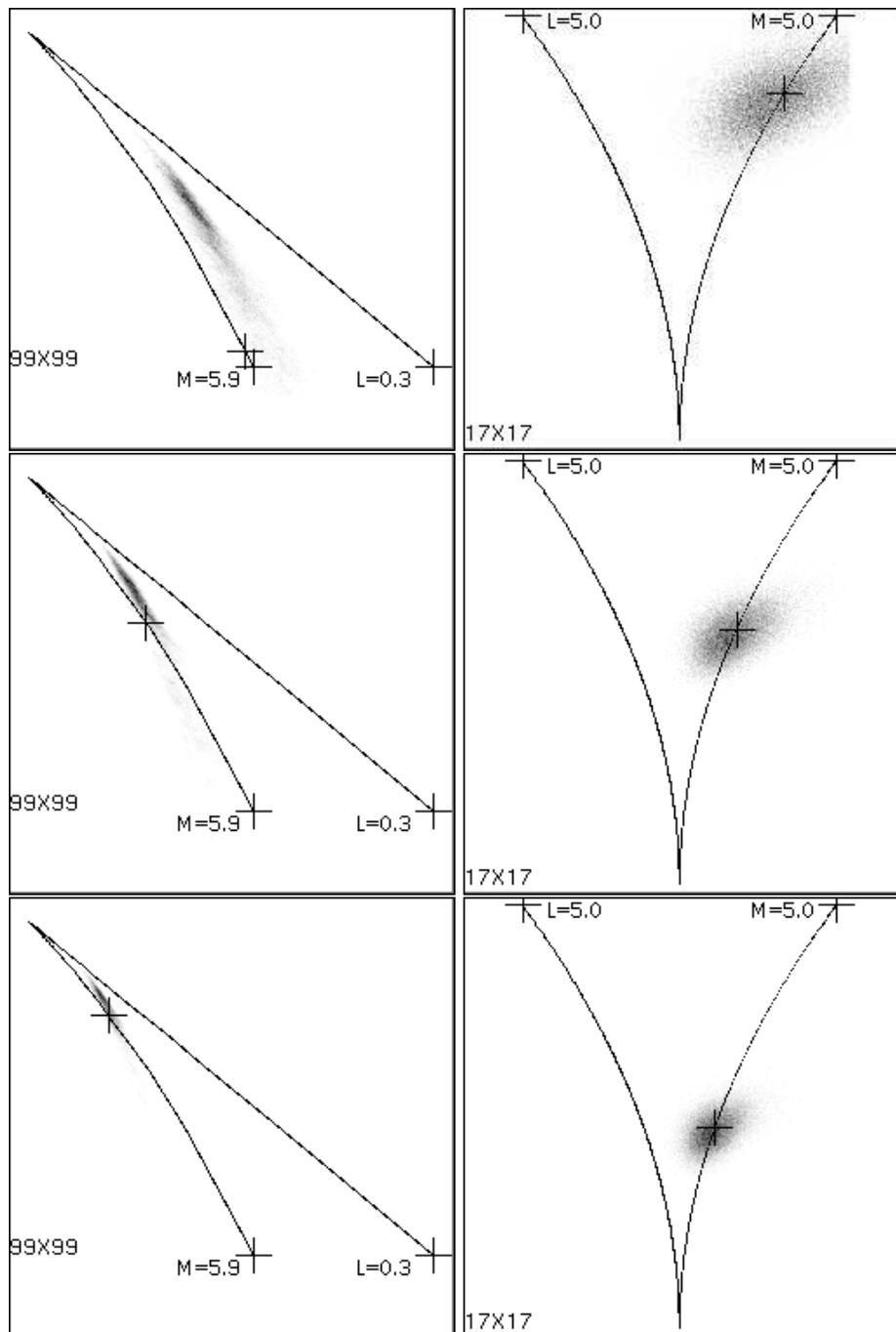


FIG. 4.36 – **Loi Gamma Inverse** : comparaison des diagrammes β_1 - β_2 et $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ pour une image de synthèse correspondant à des lois Gamma avec $M = 6$ (haut) $M = 8$ (milieu) et $M = 10$ (bas) . La position théorique est indiquée par le symbole +.

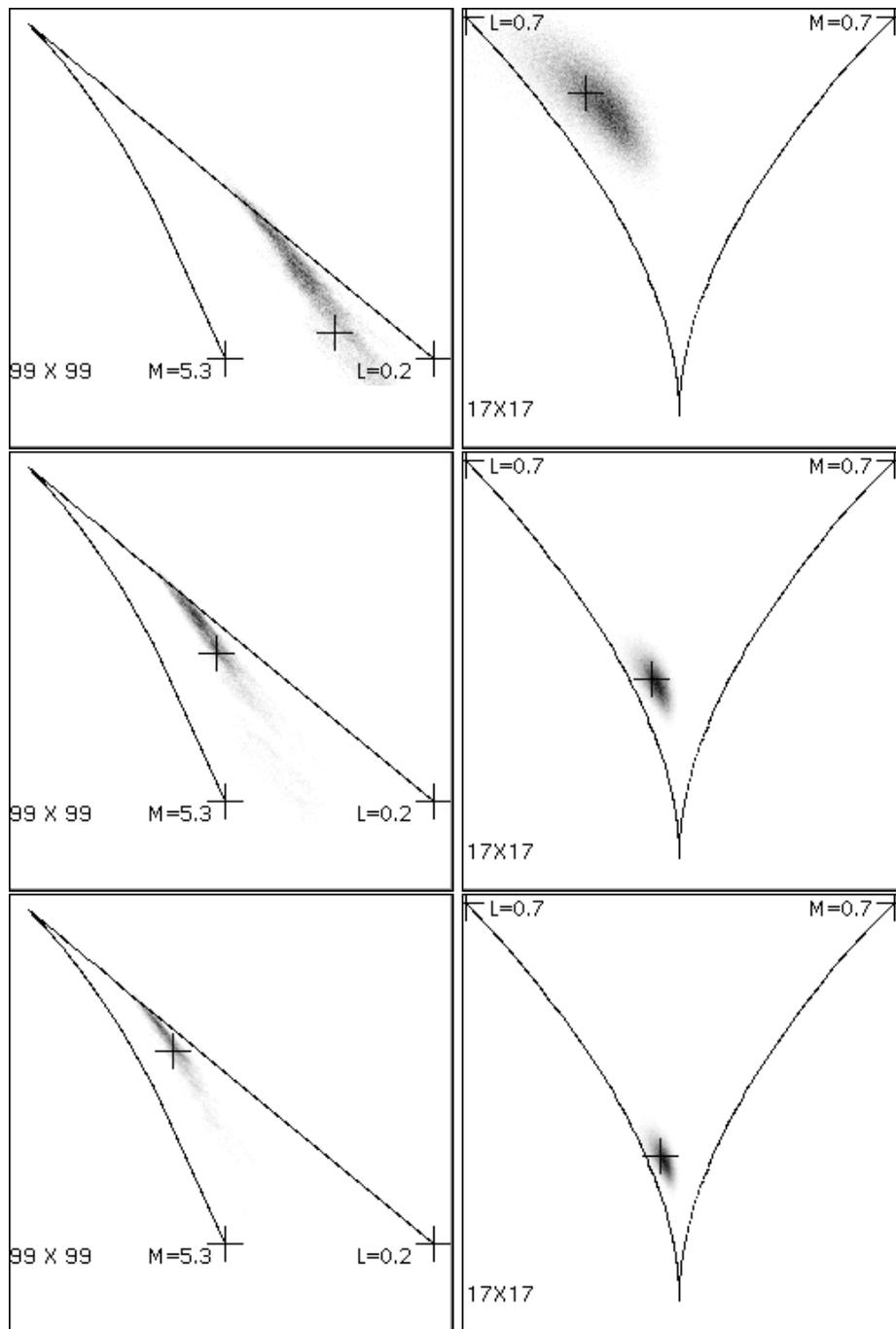


FIG. 4.37 – Loi \mathcal{K} : comparaison des diagrammes $\beta_1\text{-}\beta_2$ et $\tilde{\kappa}_2\text{-}\tilde{\kappa}_3$ pour une image de synthèse correspondant à des lois \mathcal{K} avec $L = 3, M = 1$ (haut) $L = 3, M = 2$ (milieu) et $L = 3, M = 3$ (bas) . La position théorique est indiquée par le symbole +.

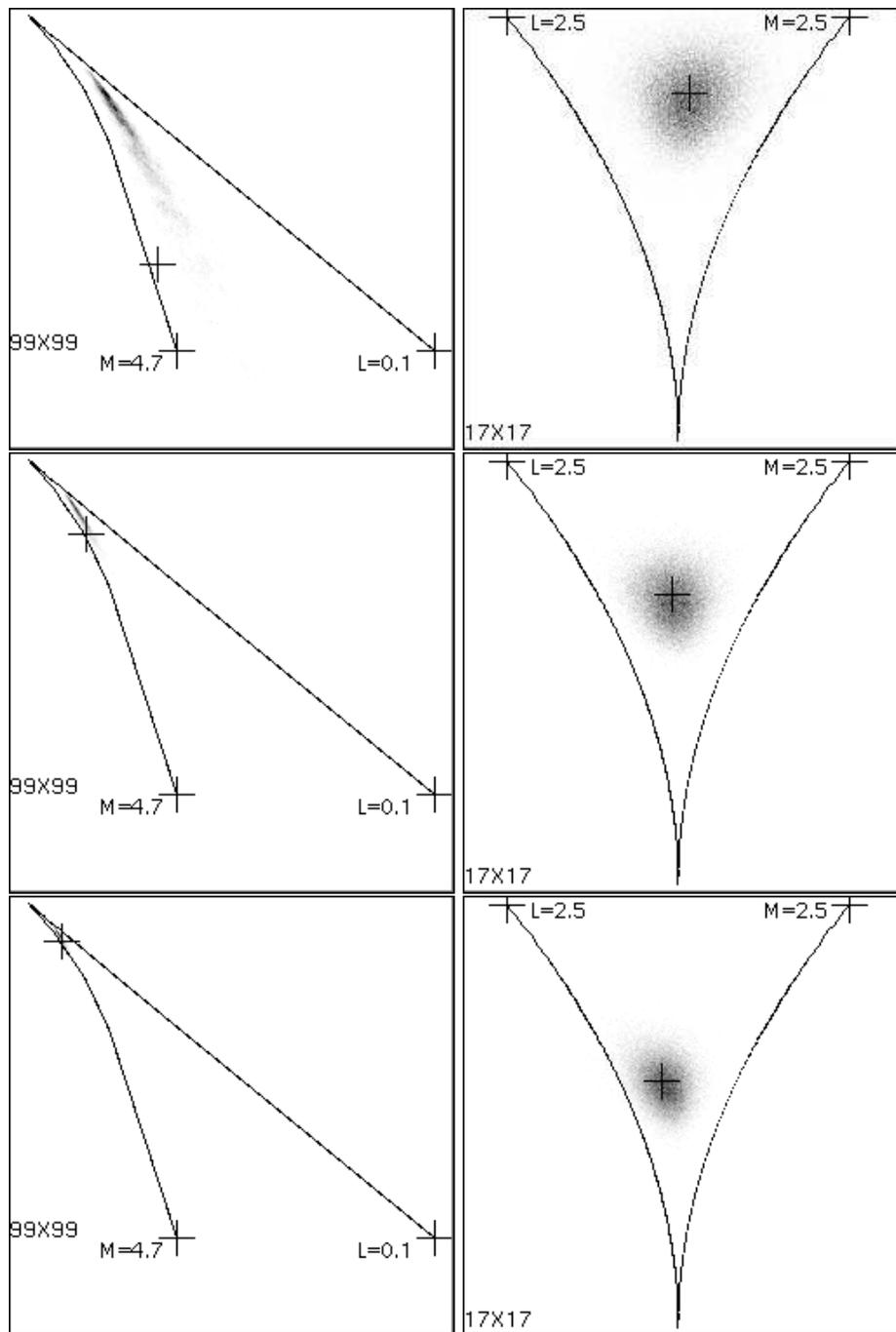


FIG. 4.38 – **Loi de Fisher** : comparaison des diagrammes $\beta_1\text{-}\beta_2$ et $\tilde{\kappa}_2\text{-}\tilde{\kappa}_3$ pour une image de synthèse correspondant à des lois \mathcal{K} avec $L = 6, M = 5$ (haut) $L = 6, M = 7$ (milieu) et $L = 6, M = 10$ (bas) . La position théorique est indiquée par le symbole +.

Premier bilan

Dans ce paragraphe, l'analyse a été effectuée dans un contexte particulier : celui où la fenêtre d'analyse était de dimension constante : 39×39 dans le cas du diagramme $\beta_1\text{-}\beta_2$ (c'est à dire 1521 valeurs), 17×17 dans le cas du diagramme $\tilde{\kappa}_2\text{-}\tilde{\kappa}_3$ (c'est à dire 289 valeurs). Dans ce contexte, on a simplement analysé la forme du nuage et sa position relative vis à vis de la position théorique dans les diagrammes, parfaitement connue analytiquement. On observe ainsi les comportements suivants :

- Dans le cas de la loi Gamma Généralisée (figure 4.35), la position des nuages semble en adéquation avec la localisation théorique dans les deux diagrammes.
- Dans le cas de la loi Gamma Inverse (figure 4.35i), si la localisation dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2\text{-}\tilde{\kappa}_3$ est tout à fait correcte et ressemble -à une symétrie près- à celle observée pour la loi Gamma Généralisée, il n'en est pas de même pour le diagramme $\beta_1\text{-}\beta_2$. On remarque en effet, pour les valeurs de M faibles, que le nuage n'est plus centré sur la position théorique, l'erreur étant d'autant plus marquée que la valeur de M est faible. Plus précisément, on note que le mode du nuage se positionne autour d'un centre plus proche du point origine (celui de la loi Normale) que celui prévu. Schématiquement parlant, l'effet "queue lourde" se traduit, pour cette dimension de fenêtre d'analyse, par un positionnement erroné laissant penser que le paramètre a une valeur plus élevée qu'elle ne devrait, ce qui revient à atténuer l'effet "queue lourde".
- Pour la loi \mathcal{K} , qui est de type "tête lourde" (figure 4.35), le nuage de points dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2\text{-}\tilde{\kappa}_3$ est plus étalé que dans le cas de la loi Gamma Généralisée, mais demeure correctement positionné. Pour le diagramme $\beta_1\text{-}\beta_2$, on a le même effet d'étalement, mais, de plus, on observe un biais dans la position du mode du nuage, qui est globalement trop rapproché de la branche spécifique de la loi Gamma Généralisée.
- Enfin, pour la loi de Fisher (figure 4.38), on note que la position du nuage est toujours correcte dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2\text{-}\tilde{\kappa}_3$. En revanche, sa localisation dans le diagramme $\beta_1\text{-}\beta_2$ est très erronée, surtout pour les faibles valeurs de M . Notons que, pour analyser ce type de lois, le choix des valeurs des extrémités des branches de la loi Gamma Généralisée (et donc de la loi Gamma Inverse) est très différente, comparé à celui effectué dans les trois cas précédents. Deux points importants peuvent être notés sur cette analyse : le fait que l'espace de représentation des lois "à queue lourde" est artificiel dans le cas du diagramme $\beta_1\text{-}\beta_2$ (puisque les branches caractéristiques des lois Gamma et Gamma Inverse n'ont rien de symétrique), et que le mode du nuage est d'autant plus éloigné de la valeur théorique que les effets de "queue lourde" sont marqués.

4.4.4 Etudes des biais

Pour mieux comprendre les phénomènes ainsi observés, nous allons nous focaliser sur la loi Gamma généralisée et sur la loi de Fisher, et analyser dans ces deux cas comment se positionnent le mode et le centre de gravité des nuages par rapport au point théorique en fonction du nombre de points utilisés dans le calcul des paramètres (*i.e.* la dimension de la fenêtre). Selon le cas, en même temps que la valeur théorique (symbole +), sera positionné sur le diagramme le mode du nuage (symbole \times) ou le centre de gravité du nuage (symbole \square).

Le cas idéal serait celui où ces trois points coïncident. Malheureusement, nous allons observer que cela requiert un très grand nombre de points pour la fenêtre d'analyse, surtout pour le diagramme β_1 - β_2 .

La présentation des résultats permettra de comparer trois cas de dimension de fenêtre, les valeurs étant choisies pour que les effets observés de biais soient comparables. Cependant, il faudra noter que, à effets comparables, les tailles de fenêtres sont très réduites dans le cas du diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ par rapport à celles requises dans le cas du diagramme β_1 - β_2 .

β_1 - β_2	$\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$
9 \times 9 (81)	5 \times 5 (25)
23 \times 23 (529)	7 \times 7 (49)
99 \times 99 (9801)	39 \times 39 (1521)

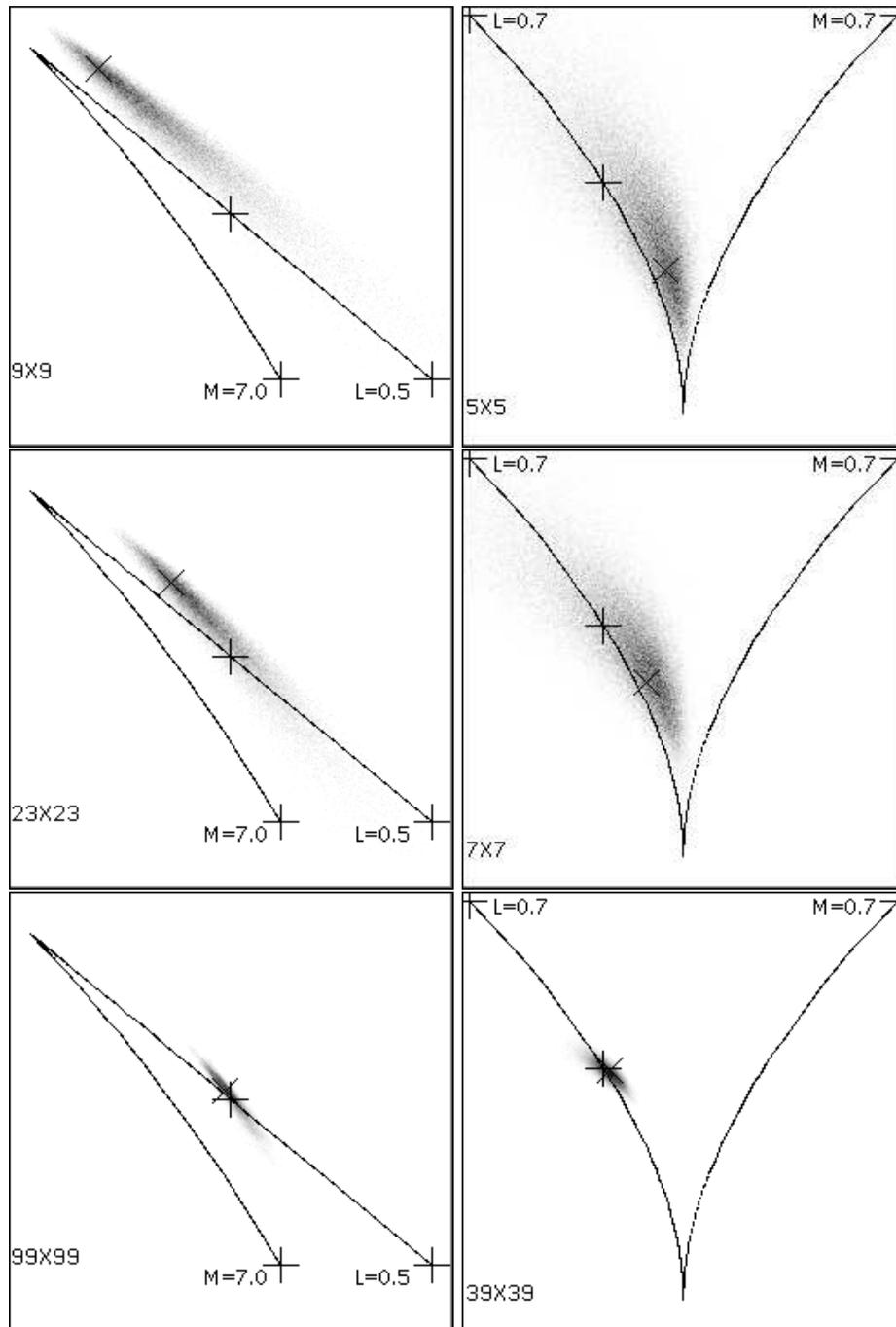


FIG. 4.39 – **Loi Gamma** : comparaison des diagrammes $\beta_1\text{-}\beta_2$ (à gauche) et $\tilde{\kappa}_2\text{-}\tilde{\kappa}_3$ (à droite) pour une image de synthèse correspondant à une loi Gamma avec $L = 1$. La position théorique est indiquée par le symbole + et le mode par x. Pour le diagramme $\beta_1\text{-}\beta_2$, la dimension de la fenêtre prend les valeurs de 9×9 (haut), 23×23 (milieu) et 99×99 (bas). Pour le diagramme $\tilde{\kappa}_2\text{-}\tilde{\kappa}_3$, la dimension de la fenêtre prend les valeurs de 5×5 (haut), 7×7 (milieu) et 39×39 (bas).

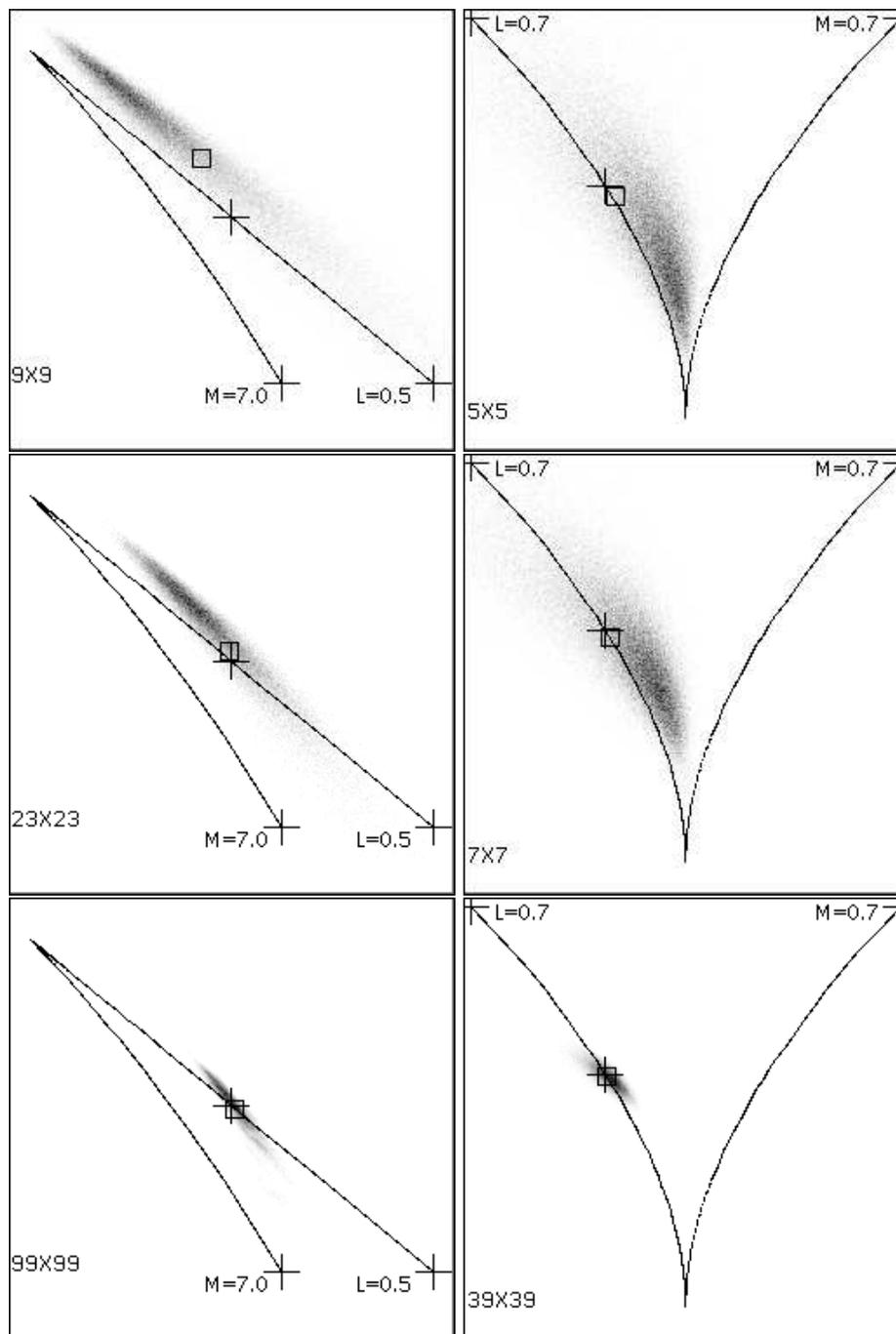


FIG. 4.40 – **Loi Gamma** : comparaison des diagrammes $\beta_1-\beta_2$ (à gauche) et $\tilde{\kappa}_2-\tilde{\kappa}_3$ (à droite) pour une image de synthèse correspondant à une loi Gamma avec $L = 1$. La position théorique est indiquée par le symbole + et le centre de gravité par \square . Pour le diagramme $\beta_1-\beta_2$, la dimension de la fenêtre prend les valeurs de 9×9 (haut), 23×23 (milieu) et 99×99 (bas). Pour le diagramme $\tilde{\kappa}_2-\tilde{\kappa}_3$, la dimension de la fenêtre prend les valeurs de 5×5 (haut), 7×7 (milieu) et 39×39 (bas).

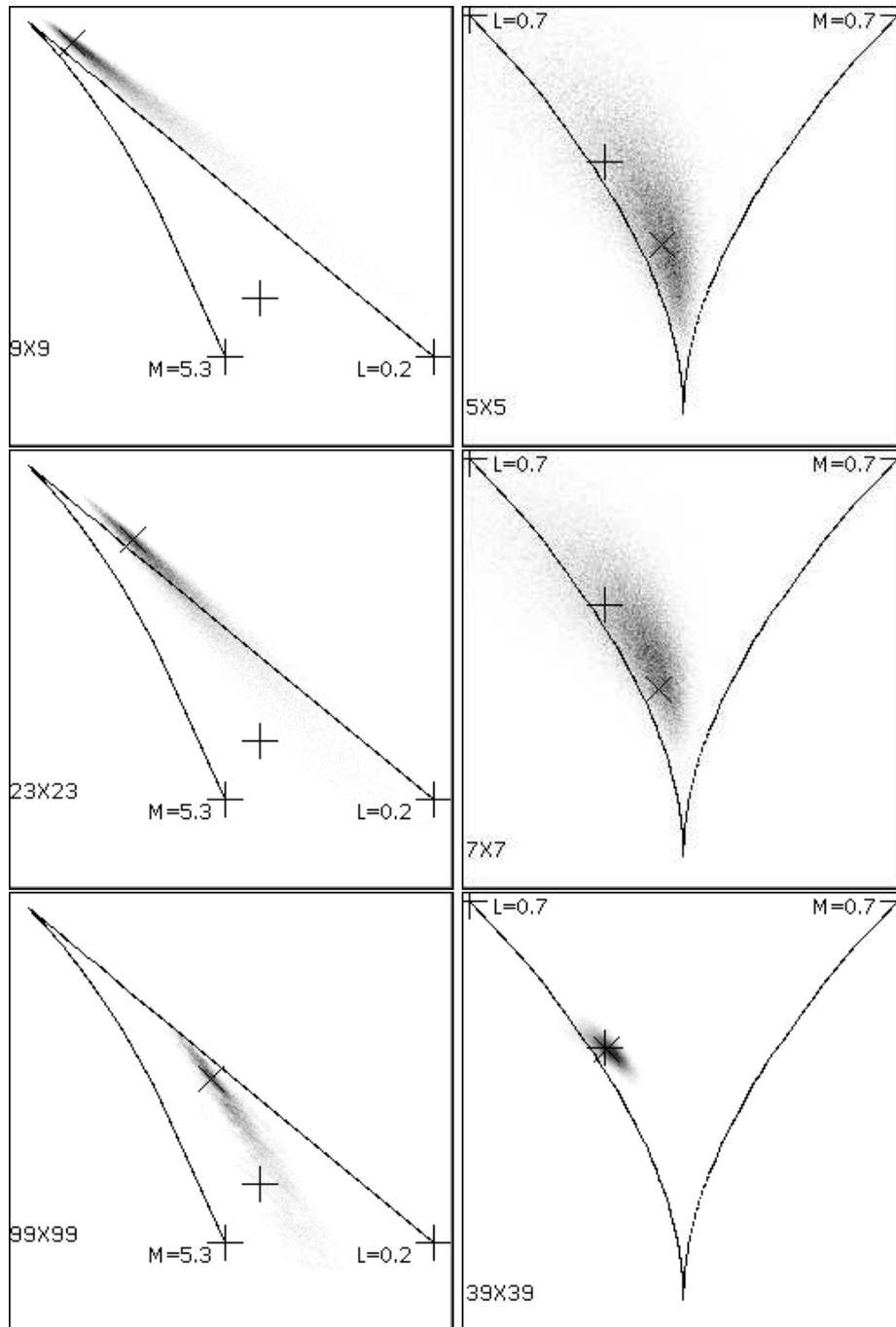


FIG. 4.41 – **Loi de Fisher** : comparaison des diagrammes $\beta_1-\beta_2$ (à gauche) et $\tilde{\kappa}_2-\tilde{\kappa}_3$ (à droite) pour une image de synthèse correspondant à une loi de Fisher avec $L = 1$ et $M = 7$. La position théorique est indiquée par le symbole + et le mode par \times . Pour le diagramme $\beta_1-\beta_2$, la dimension de la fenêtre prend les valeurs de 9×9 (haut), 23×23 (milieu) et 99×99 (bas). Pour le diagramme $\tilde{\kappa}_2-\tilde{\kappa}_3$, la dimension de la fenêtre prend les valeurs de 5×5 (haut), 7×7 (milieu) et 39×39 (bas).

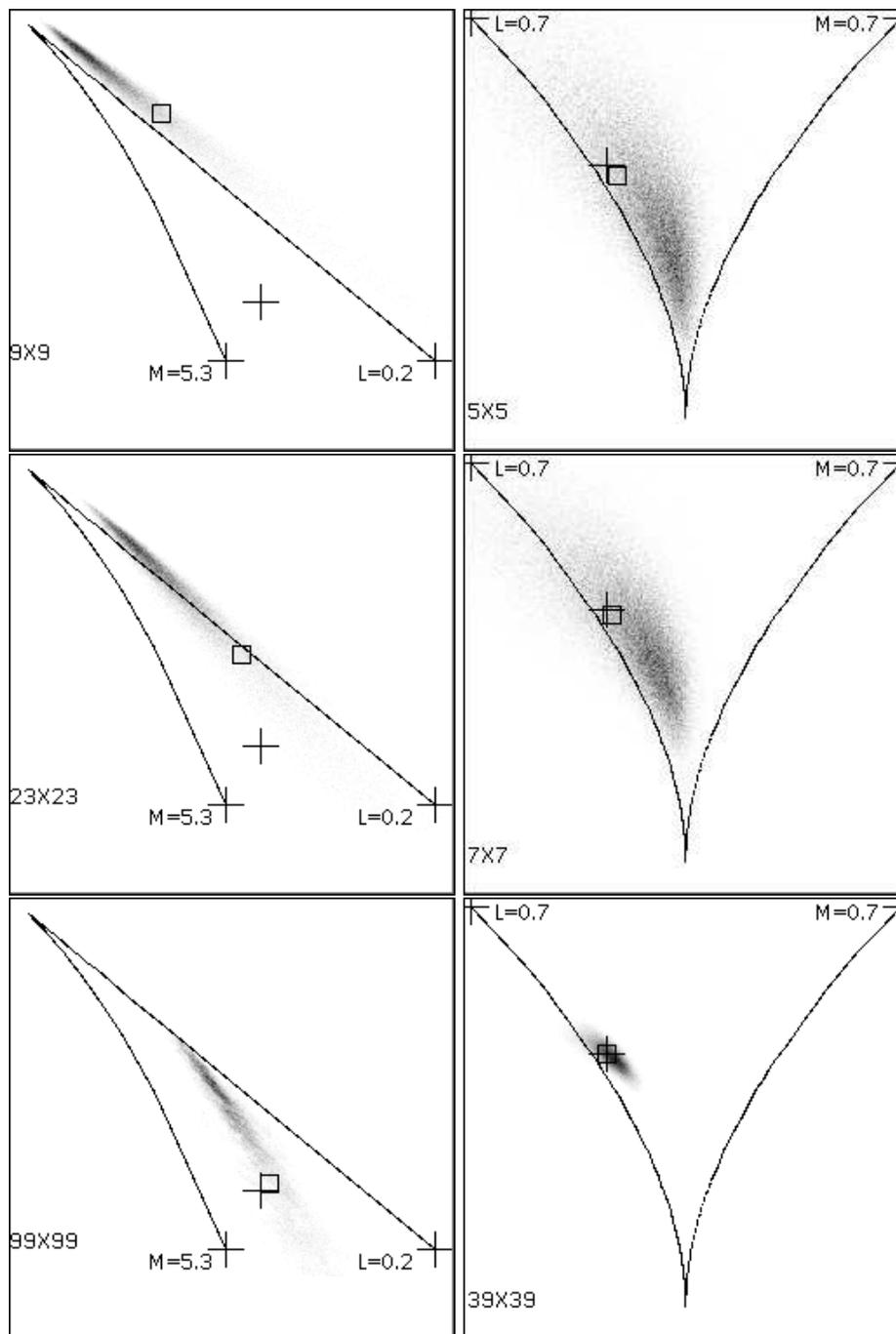


FIG. 4.42 – **Loi de Fisher** : comparaison des diagrammes β_1 - β_2 (à gauche) et $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ (à droite) pour une image de synthèse correspondant à une loi de Fisher avec $L = 1$ et $M = 7$. La position théorique est indiquée par le symbole + et le centre de gravité par \square . Pour le diagramme β_1 - β_2 , la dimension de la fenêtre prend les valeurs de 9×9 (haut), 23×23 (milieu) et 99×99 (bas). Pour le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$, la dimension de la fenêtre prend les valeurs de 5×5 (haut), 7×7 (milieu) et 39×39 (bas).

Bilan sur l'analyse des biais

Il est intéressant de voir que dans les deux diagrammes un nombre de points conséquent est requis pour que mode et centre de gravité du nuage de points coïncident avec la valeur théorique. Ce nombre est notablement plus important dans le cas du diagramme β_1 - β_2 que dans le cas du diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$. Mais dans les deux diagrammes, les nuages semblent converger vers la localisation théorique dès lors que l'on dispose d'un grand nombre de valeurs.

Dans le paragraphe suivant, on va donc rechercher s'il existe un moyen théorique de comparer ces biais : grâce aux calculs analytiques de la variance de ces estimateurs, nous allons voir que ces écarts observés sont en réalité prévisibles et correspondent aux écarts théoriques auxquels on peut s'attendre.

4.4.5 Etude de la variance des estimateurs

Dans les cas analysés précédemment, nous avons vu que le nuage de point était d'autant plus étendu que le nombre de valeurs utilisées était faible : phénomène tout à fait normal et attendu. Or, dans le chapitre 3, nous avons vu une méthode, celle de Kendall et Stuart, permettant de calculer la variance d'estimateurs quelconques (et donc des grandeurs β_1 et β_2) pour les lois étudiées dans ce document, méthode que nous avons adaptée aux log-statistiques. Nous allons donc calculer la variance des grandeurs β_1 , β_2 , $\tilde{\kappa}_2$ et $\tilde{\kappa}_3$ et placer sur le diagramme les ellipses, appelées ici **ellipses d'erreur** correspondant aux écart-types qui s'en déduisent.

Puisque nous avons observés qu'il existait un biais sur le positionnement du nuage, ainsi qu'un curieux effet de décentrage du mode, ces ellipses seront tracés dans les deux configurations suivantes : leur centre sur le centre de gravité du nuage ou le centre sur le mode du nuage. Un point essentiel à vérifier est alors que la valeur théorique de la position du centre du nuage se trouve globalement à l'intérieur de cette ellipse d'incertitude.

Loi Gamma Généralisée

Nous avons déjà établis les formules exprimant les variances des estimateurs des log-cumulants d'ordre 2 et 3 ($\tilde{\kappa}_2$: formule 3.36 et $\tilde{\kappa}_3$: formule 3.37), ce qui permet d'écrire :

$$Ect \{ \tilde{\kappa}_2 \} = \sqrt{Var \{ \tilde{\kappa}_2 \}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\Psi(3, L) + 2 (\Psi(1, L))^2}$$

$$Ect \{ \tilde{\kappa}_3 \} = \sqrt{Var \{ \tilde{\kappa}_3 \}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{6 (\Psi(1, L))^3 + 9 (\Psi(2, L))^2 + 9 \Psi(3, L) \Psi(1, L) + \Psi(5, L)}$$

De la même manière, on peut effectuer cette même opération dans le diagramme β_1 - β_2 . On trouve facilement que :

$$Ect \{ \beta_1 \} = \sqrt{Var(\beta_1)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{96(L+1)(L+5)}{L^3}}$$

$$Ect \{ \beta_2 \} = \sqrt{Var(\beta_2)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{24(126 + 167L + 42L^2 + L^3)}{L^3}}$$

Donc, pour une valeur de L donnée, et en fonction du nombre d'échantillons N , on peut donc tracer les ellipses d'erreur sur les deux diagrammes (figure 4.43) et observer qu'elles concordent avec les observations.

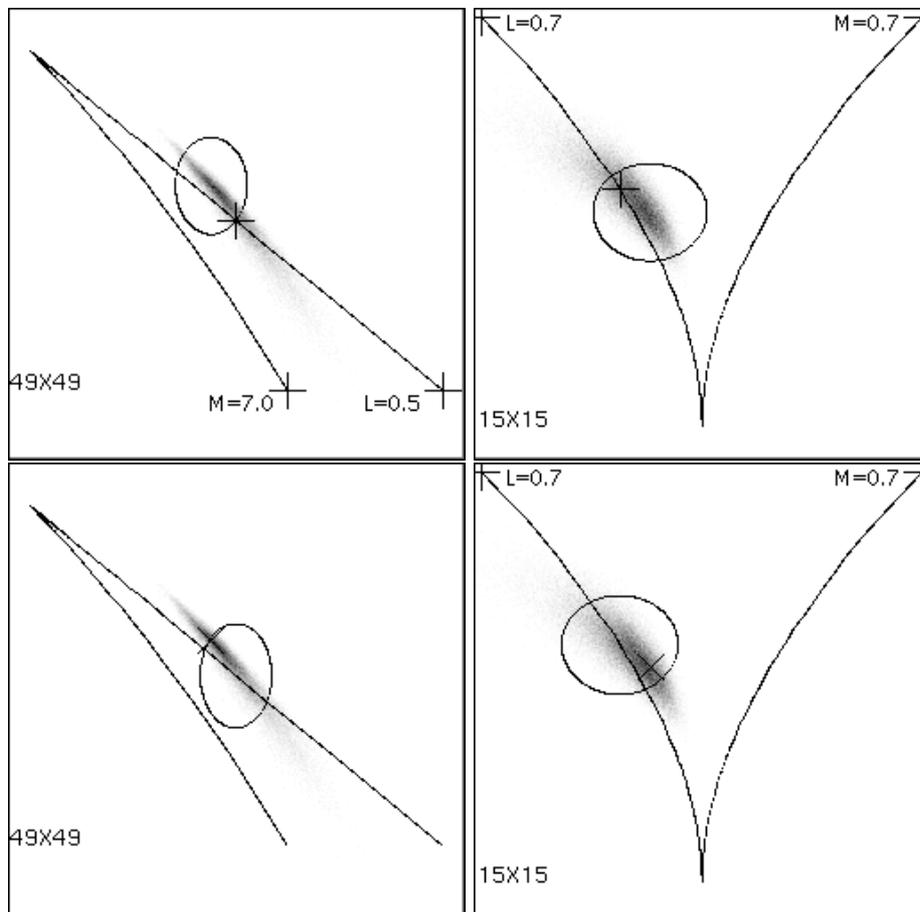


FIG. 4.43 – **Loi Gamma Généralisée** : comparaison des diagrammes β_1 - β_2 (à gauche) et $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ (à droite) pour une image de synthèse correspondant à une loi Gamma Généralisée avec $L = 1$. La position théorique est indiquée par le symbole + et le mode par x. Pour le diagramme β_1 - β_2 , la dimension de la fenêtre prend les valeurs de 49×49 . Pour le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$, la dimension de la fenêtre prend les valeurs de 15×15 . En haut, l'ellipse est centrée sur le mode du nuage, en bas l'ellipse est centrée sur la valeur théorique.

Loi de Fisher

Nous avons déjà établi les formules exprimant les variances des estimateurs des log-cumulants d'ordre 2 et 3 ($\tilde{\kappa}_2$: formule 3.89 et $\tilde{\kappa}_3$: formule 3.90), ce qui permet d'écrire, pour $\tilde{\kappa}_2$:

$$\begin{aligned} Ect\{\tilde{\kappa}_2\} &= \sqrt{Var\{\tilde{\kappa}_2\}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\Psi(3, L) + 2(\Psi(1, L))^2 + \Psi(3, M) + 2(\Psi(1, M))^2 + 4\Psi(1, L)\Psi(1, M)} \end{aligned}$$

L'expression pour $\tilde{\kappa}_3$ est analogue, mais sa longueur la rend incompréhensible et sans intérêt dans un document écrit.

De même, la variance des estimateurs de β_1 et β_2 ne présente aucune difficulté technique, si ce n'est la longueur. Grâce à Maple, des procédures en C ont été directement générées, ce qui permet donc de tracer les ellipses d'erreur sur les diagrammes.

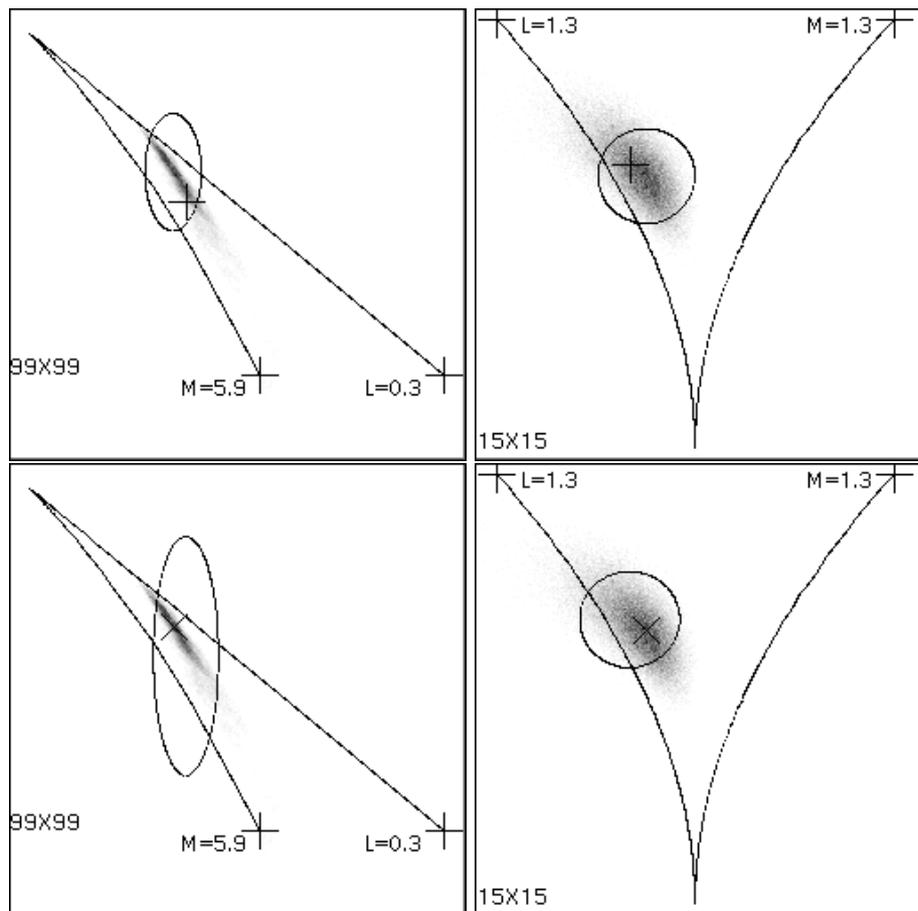


FIG. 4.44 – Loi de Fisher : comparaison des diagrammes β_1 - β_2 (à gauche) et $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ (à droite) pour une image de synthèse correspondant à une loi de Fisher avec $L = 2$ et $M = 10$. La position théorique est indiquée par le symbole + et le mode par \times . Pour le diagramme β_1 - β_2 , la dimension de la fenêtre prend les valeurs de 99×99 . Pour le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$, la dimension de la fenêtre prend les valeurs de 15×15 . En haut, l'ellipse est centrée sur le mode du nuage, en bas l'ellipse est centrée sur la valeur théorique.

Approche théorique de la Loi Gamma Généralisée

Une dernière investigation peut être menée, connaissant les écart-types dans les deux diagrammes.

Pour le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$, de part et d'autre de la branche de la loi Gamma, on va placer deux branches délimitant les $N_{\tilde{\kappa}}$ points tels que

$$\hat{\tilde{\kappa}}_3 \in [\tilde{\kappa}_3 - \frac{1}{\sqrt{N_{\tilde{\kappa}}}} Ect \{ \tilde{\kappa}_3 \}; \tilde{\kappa}_3 + \frac{1}{\sqrt{N_{\tilde{\kappa}}}} Ect \{ \tilde{\kappa}_3 \}].$$

Pour le diagramme β_1 - β_2 , de part et d'autre de la branche de la loi Gamma, on va placer deux branches délimitant les N_{β} points tels que

$$\hat{\beta}_2 \in [\beta_2 - \frac{1}{\sqrt{N_{\beta}}} Ect \{ \beta_2 \}; \beta_2 + \frac{1}{\sqrt{N_{\beta}}} Ect \{ \beta_2 \}].$$

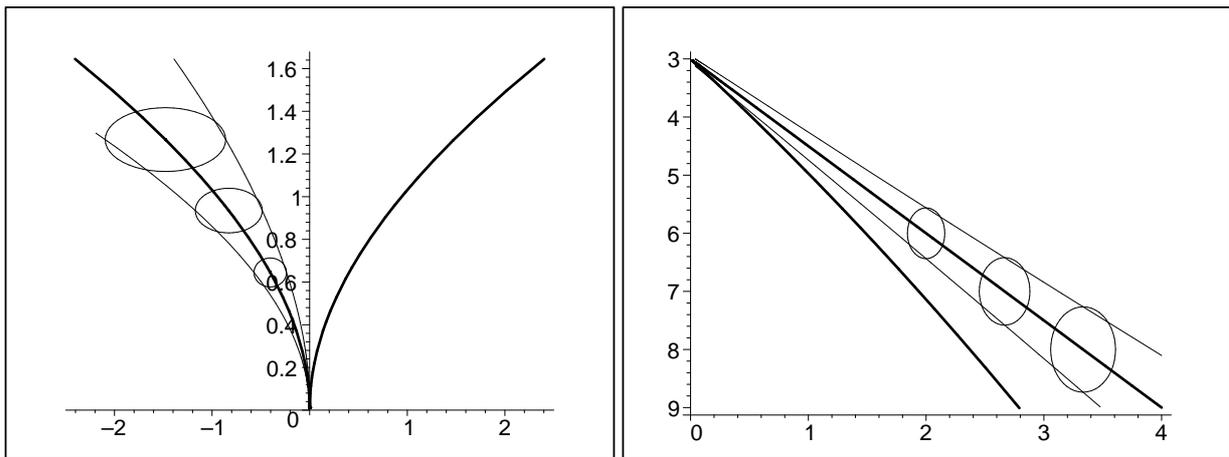


FIG. 4.45 – A gauche : Diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ de la loi Gamma Généralisée. Les deux branches correspondent à des valeurs de $\tilde{\kappa}_3$ dont les valeurs s'écartent de \pm l'écart type. La fenêtre d'analyse est 17×17 . Les trois ellipses correspondent à $L = 1.2, 1.5$ et 2 . A droite : Diagramme β_1 - β_2 de la loi Gamma Généralisée. Les deux branches correspondent à des valeurs de β_2 dont les valeurs s'écartent de \pm l'écart type. La fenêtre d'analyse est 100×100 . Les trois ellipses correspondent à $L = 1.2, 1.5$ et 2 .

Sur cet exemple, on observe des effets analogues sur la dimension des nuages entre les deux diagrammes. Seul change le nombre de valeurs utilisées, qui est de $N_{\tilde{\kappa}} = 17 \times 17 = 289$ dans le cas du diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ et de $N_{\beta} = 100 \times 100 = 10000$ dans le cas du diagramme β_1 - β_2 , soit environ 34 fois plus.

En traitement d'image, le nombre de valeurs correspond en pratique à une fenêtre de sélection de pixels : le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ garantit donc une bien meilleure localisation des résultats que le diagramme β_1 - β_2 .

4.4.6 Expériences hors du domaine de validité du diagramme β_1 - β_2

Nous allons maintenant examiner expérimentalement les deux diagrammes dans le cas d'une loi "à queue lourde", et plus précisément le cas d'une loi de Fisher avec $M \leq 4$ (figure 4.46). Si la localisation dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ est conforme à la théorie, dans le diagramme β_1 - β_2 , aucune théorie ne peut prédire où le nuage apparaîtra. Dans l'exemple choisi ($L = 4$ et $M = 2, 3$ et 4), on observe une localisation du nuage aussi bien dans la zone "Fisher" que dans la zone "Beta".

De plus, on peut observer expérimentalement qu'en augmentant la dimension de la taille de la fenêtre, ce nuage change de position globalement vers des localisations correspondant à des faibles valeurs de L .

Dans ce cas de figure, l'analyse effectuée sur le diagramme β_1 - β_2 peut conduire de manière imprévisible à un choix de loi sous jacente très éloigné de la réalité.

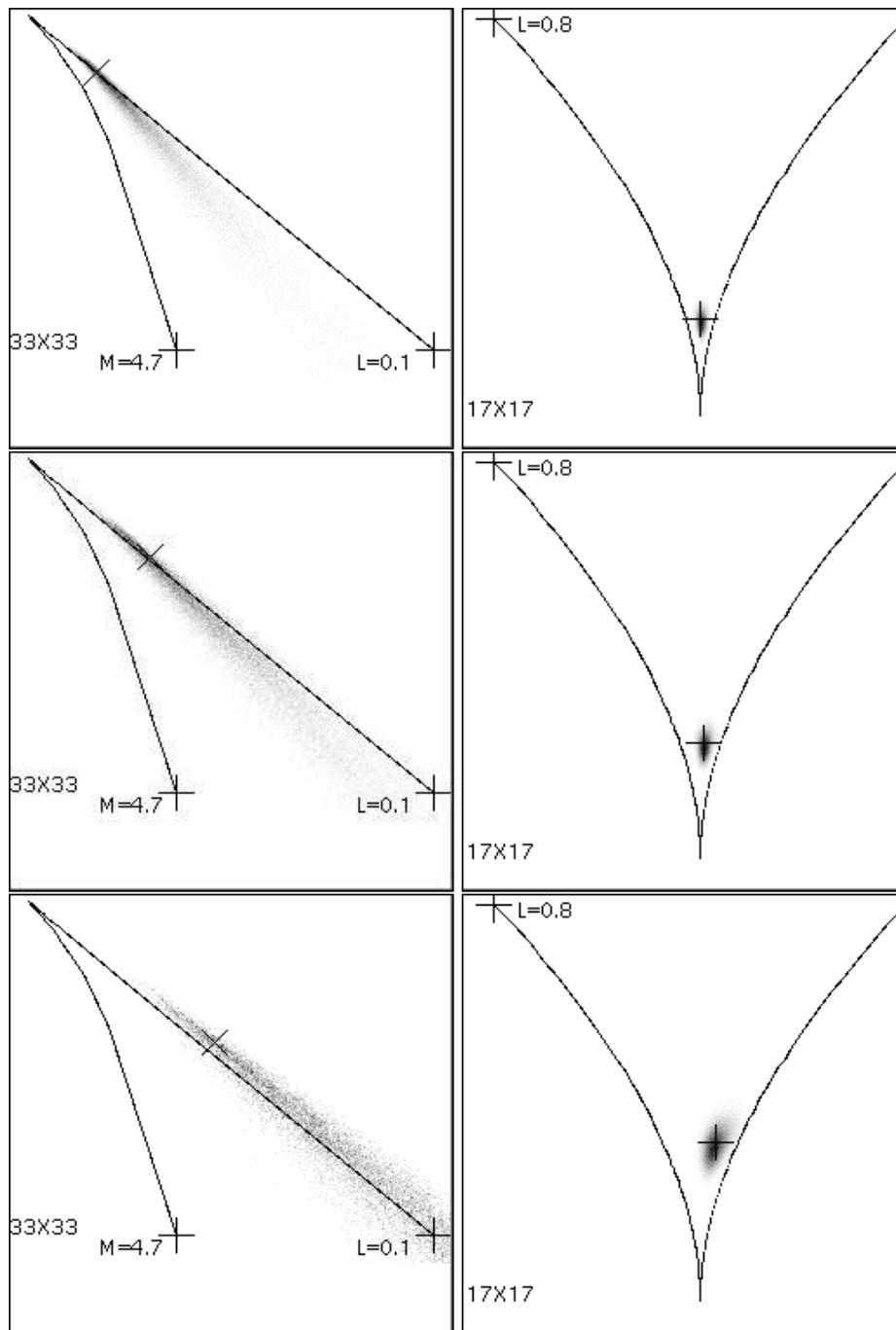


FIG. 4.46 – **Loi de Fisher** : comparaison des diagrammes β_1 - β_2 (à gauche) et $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$ (à droite) pour une image de synthèse correspondant à des lois de Fisher avec $L = 4$ et $M = 2, 3$ et 4 . La position théorique est indiquée par le symbole $+$ (ceci uniquement dans le cas du diagramme $\tilde{\kappa}_2$ - $\tilde{\kappa}_3$) et le mode par le symbole \times .

4.5 Conclusions

L'utilisation des diagrammes $\beta_1\text{-}\beta_2$ et $\tilde{\kappa}_2\text{-}\tilde{\kappa}_3$ semble une méthode pratique et facile à utiliser pour caractériser des lois de texture d'image dès lors que l'on cherche à les identifier à des lois appartenant au système de Pearson. Si le diagramme $\beta_1\text{-}\beta_2$ est connu et utilisé depuis longtemps, il n'en demeure pas moins qu'il est inadapté aux "lois à queue lourde" telles qu'on les rencontre en imagerie radar.

En revanche, le diagramme $\tilde{\kappa}_2\text{-}\tilde{\kappa}_3$ présente un grand intérêt pratique puisqu'il permet de représenter correctement les lois définies sur \mathbb{R}^+ sans restriction.

La localisation est bien meilleure sur le diagramme $\tilde{\kappa}_2\text{-}\tilde{\kappa}_3$ que sur le diagramme $\beta_1\text{-}\beta_2$. Il faut tout de même nuancer ce résultat en notant que l'utilisation des log-moments d'ordre 2 et 3 seulement est une des raisons essentielles de cette meilleure localisation alors que le calcul des coefficients β_1 et β_2 requiert les moments d'ordre 2, 3 et 4.

Lois directes et lois inverses sont à la même enseigne par définition dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2\text{-}\tilde{\kappa}_3$ en terme de précision de localisation : la seule différence est qu'elles appartiennent à un quadrant différent. En revanche, aucune analyse ne peut être menée sur la localisation d'une loi inverse en fonction de la localisation de sa loi directe dans le diagramme $\beta_1\text{-}\beta_2$ puisque les moments vérifient entre eux des relations complexes (voir la relation 1.47 liant moments positifs et moments négatifs).

Enfin, une des caractéristiques les plus regrettables du diagramme $\beta_1\text{-}\beta_2$ est d'attribuer une même région à la loi de Fisher et à la loi Beta Inverse, ce que le diagramme $\tilde{\kappa}_2\text{-}\tilde{\kappa}_3$ élude avec élégance.

Chapitre 5

Applications à l'estimation sur images RSO

5.1 Lois en intensité et lois en amplitude

Les images RSO (Radar à Synthèse d'Ouverture), comme bien d'autres images obtenues par imagerie cohérente, sont disponibles sous différents formats :

- les données en amplitude. Sur une zone homogène et en présence de speckle pleinement développé, ces images suivent une loi de Rayleigh Nakagami (dans la mesure où l'image d'intensité – c'est à dire l'image construite à partir du carré des valeurs – suit une loi Gamma généralisée). Ce sont par exemple les données "PRI" (PRrecision Images) fournies par les agences spatiales.
- les données complexes dans le cas de données "monovues" (SLC : *Single Look Complex*). A partir de ces données on peut aisément construire :
 - des images d'intensité
 - des images d'amplitude (racine carré des images d'intensité)

On sait alors que sur une zone homogène et en présence de speckle pleinement développé, l'image d'intensité suit une loi Gamma Généralisée.

Passer de données en amplitude à des données en intensité (et vice versa) ne pose aucun problème mathématique : ce point a été abordé au paragraphe 1.4. En pratique, des difficultés subsistent. En effet :

- L'estimation des paramètres des lois sous jacentes s'effectue beaucoup plus facilement pour les lois en intensité pour la plus traditionnelle des méthodes : la méthode des moments. Par exemple, dans le cas de la loi Gamma, les deux premiers moments permettent d'avoir un système explicite pour les deux paramètres μ et L . En revanche, pour la loi de Nakagami, les deux premiers moments donnent un système implicite mettant en jeu la fonction de Pochhammer. Il est alors tentant de prendre les valeurs en intensité (en les élevant au carré), ce qui revient à calculer les moments d'ordre 2 et 4 des données en amplitude. Cette démarche est alors extrêmement discutable car la variance de tels estimateurs est beaucoup plus élevée que celle des deux premiers moments.
- En revanche, l'utilisation des log-moments est parfaitement "transparente" : passer de données en amplitude à des données en intensité introduit simplement dans les log-cumulants des constantes multiplicatives. Tout se passe bien à condition d'investir dans les log-statistiques, voire dans les méthodes mixtes.

L'estimation des données "en intensité" a été longuement traité au chapitre 3. Le but de ce chapitre est d'analyser plus spécifiquement les lois qui pourraient suivre les images en amplitude et détailler les méthodes d'estimation de leurs paramètres.

Pour ce faire, on supposera que l'on dispose de N échantillons indépendants x_1, \dots, x_N et plusieurs types d'estimées seront utilisés¹ :

- les estimées des moments

$$\begin{aligned}\hat{m}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \\ \hat{m}_2 &= \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N}\end{aligned}$$

¹dont les définitions –crime lèse Bourbaki– seront néanmoins rappelées en tête de ce chapitre

$$\hat{m}_3 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^3}{N}$$

– les estimées des log-moments

$$\hat{m}_1 = \frac{\sum_{i=1}^N \log(x_i)}{N}$$

$$\hat{m}_2 = \frac{\sum_{i=1}^N \log(x_i)^2}{N}$$

$$\hat{m}_3 = \frac{\sum_{i=1}^N \log(x_i)^3}{N}$$

– les estimées des moments mixtes :

$$\hat{w}_1 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \log(x_i)}{N}$$

$$\hat{w}_2 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \log(x_i)}{N}$$

– les estimées des logmoments mixtes :

$$\hat{\hat{w}}_1 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \log(x_i)}{N}$$

$$\hat{\hat{w}}_2 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i (\log(x_i))^2}{N}$$

Pour alléger les notations, les formules permettant de retrouver les paramètres des lois seront parfois écrites avec les grandeurs statistiques (comme m_1) et non avec l'estimée de ces grandeurs (comme \hat{m}_1).

Pour aider la lecture, un certain nombre de formules et de résultats seront repris dans ce chapitre pour en permettre une lecture plus aisée et indépendante.

5.2 Lois utilisées

Le but de ce paragraphe est de regrouper les expressions liées aux lois en amplitude et qui n'ont pas été explicitement formulées précédemment (excepté pour la loi de Rayleigh Nakagami, qui a eu droit à un paragraphe spécifique).

5.2.1 Loi Log-normale

Puisque nous avons vu au paragraphe 2.2.2 que le formalisme de la loi log-normale est identique pour des données en amplitude ou en intensité, nous allons choisir pour décrire une loi log-normale en amplitude l'expression suivante :

$$\mathcal{L}_A[\mu, \sigma](x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}x} e^{\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \quad u > 0$$

qui est de facto l'expression choisie pour la loi en intensité (équation 2.12). Le mode s'écrit donc :

$$m_{mode} = e^{\mu - \sigma^2}.$$

Les estimations des paramètres s'effectuent de manière identique à la loi en intensité et sont donc repris sans grande modification.

Maximum de vraisemblance

Le résultat s'exprime donc comme la loi en intensité (mais attention, les paramètres μ et σ ne sont pas les mêmes) :

$$\hat{\mu}_{MMV} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log(x_i)$$

$$\hat{\sigma}_{MMV} = \sqrt{\frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N (\log(x_i))^2 - \left(\sum_{i=1}^N \log(x_i) \right)^2 \right)}$$

Méthodes des moments, log-moments et mixtes

La méthode des Moments donne directement les paramètres :

$$\begin{aligned}\sigma_{MM} &= \sqrt{\log \frac{m_2}{m_1^2}} \\ \mu_{MM} &= 2 \log(m_1) - \frac{1}{2} \log(m_2)\end{aligned}$$

La Méthode des Log-Moments s'identifie à celle du maximum de vraisemblance (mêmes expressions).

5.2.2 Loi de Nakagami

Si l'on suppose que les données en intensité suivent une loi Gamma (voir paragraphe 2.2.3) qui s'exprime comme (équation 2.20) :

$$\mathcal{G}[\mu_I, L](u) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{Lu}{\mu_I} \right)^{L-1} e^{-\frac{Lu}{\mu_I}},$$

alors les données en amplitude suivent une loi de Nakagami, loi qui a fait l'objet du paragraphe 2.2.4 et qui s'exprime comme (équation 2.34)

$$\mathcal{RN}[\mu, L](x) = \frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{L}}{\Gamma(L)} \left(\frac{\sqrt{L}x}{\mu} \right)^{2L-1} e^{-\left(\frac{\sqrt{L}x}{\mu}\right)^2}.$$

Attention au choix spécifique à ce document : $\frac{u}{\mu_I}$ et $\frac{x}{\mu}$ sont sans dimension...

Maximum de vraisemblance

Comme pour la loi Gamma classique, la méthode du maximum de vraisemblance peut s'appliquer (paragraphe 3.5.4) et conduit à résoudre le système suivant :

$$\begin{aligned}\mu &= \sqrt{m_2} \\ \log L - \Psi(L) &= \log \mu - \tilde{m}_1\end{aligned}$$

La première relation est explicite. Connaissant μ , la seconde relation permet d'obtenir L et se résout par un schéma numérique très simple eu égard aux propriétés de la fonction Digamma. Une tabulation peut aussi être envisagée.

Méthodes des moments, log-moments et mixtes

Les deux premiers moments s'écrivent (équation 2.38) :

$$\begin{cases} m_1 &= \frac{\Gamma(L+\frac{1}{2})}{\sqrt{L}\Gamma(L)} \mu \\ m_2 &= \mu^2. \end{cases}$$

Il est important de souligner que l'espérance de la variable n'est pas égal au paramètre μ . On peut néanmoins changer le formalisme de cette loi pour que l'espérance de la variable soit effectivement égale à un paramètre μ' (comme dans la définition 2.43 proposée par El Zaart) mais il faut bien admettre que c'est la définition d'origine qui est universellement reconnue.

En revanche, tant la méthode du maximum de vraisemblance que la méthode des moments donnent une estimation explicite de μ par le moment d'ordre 2 :

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N}$$

Le facteur de forme L ne se déduit de manière explicite exacte que par la Méthode Mixte, où l'on a (relation 3.51) :

$$\hat{L}_{AM} = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{\tilde{m}_2}{m_2} - \tilde{m}_1}$$

Une approximation utilisant les moments donne (relation 3.44)

$$\hat{L}_{MM1} = \frac{1}{8} \frac{1}{\frac{\sqrt{m_2}}{m_1} - 1}$$

Enfin une dernière relation, plus approximative, et toujours fondée sur les moments est donnée par (relation 3.45) :

$$\hat{L}_{MM2} \simeq \frac{1}{4 \hat{\gamma}^2} = \frac{m_1^2}{m_2 - m_1^2}$$

	Première formule	Seconde formule
1.	0.974	0.9159
2.	1.958	1.8973
3.	2.951	2.8902
4.	3.948	3.8866
5.	4.946	4.8843
6.	5.944	5.8828
7.	6.944	6.8817
8.	7.9423	7.8808
9.	8.9422	8.8802
10.	9.9418	9.87976

La méthode des log-moments est aisée à mettre en œuvre puisque le second log-moment s'écrit (relation 2.40) :

$$\tilde{\kappa}_2 = \frac{1}{4} \Psi(1, L)$$

Comme on l'a déjà vu, une inversion numérique d'une telle équation ne pose aucun problème, eu égard aux propriétés de la fonction Polygamma. Une tabulation peut aussi être envisagée.

5.2.3 Loi \mathcal{K} en amplitude

La loi \mathcal{K} est une des plus célèbres de l'imagerie RSO. En effet, elle résulte d'une hypothèse de texture suivant une loi Gamma et d'un type d'imagerie superposant un bruit multiplicatif modélisé par une loi Gamma. La simplicité du modèle est à l'origine de son utilisation depuis presque trente ans (Jakeman fut semble-t-il le premier à l'utiliser dans le monde du Radar en 1978 [34]). Mais il est intéressant de rappeler que sa formulation sous forme de convolution de Mellin avait été proposé en 1948 par Epstein [20].

Beaucoup de travaux ont été mené sur les données "en intensité", repris globalement dans le paragraphe 3.6.2. Dans ce cas la loi s'exprime comme (équation 2.75) :

$$\mathcal{K}[\mu', L, M](u) = \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{2 L M}{\mu'} \left(\frac{L M u}{\mu'} \right)^{\frac{M+L}{2}-1} K_{M-L} \left[2 \left(\frac{L M u}{\mu'} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Ici nous nous focalisons sur les données en amplitude. En utilisant l'expression de la loi en intensité et en utilisant la relation liant loi en intensité et loi en amplitude (relation 1.56), la loi en amplitude s'écrit alors :

$$\mathcal{K}_A[\mu, L, M](x) = \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{4\sqrt{L M}}{\mu} \left(\frac{\sqrt{L M} x}{\mu} \right)^{M+L-1} K_{M-L} \left[2 \frac{\sqrt{L M} x}{\mu} \right]$$

avec K fonction de Bessel modifiée de seconde espèce. μ est défini de sorte que $\frac{x}{\mu}$ soit sans dimension : on a bien évidemment $\mu^2 = \mu'$, μ' étant le paramètre de la loi en intensité.

De même que la loi \mathcal{K} se définit à partir des lois Gamma par la relation :

$$\mathcal{K}[\mu', L, M] = \mathcal{G}[\mu', L] \hat{\star} \mathcal{G}[1, M]$$

la loi \mathcal{K}_A se définit à partir des lois de Rayleigh Nakagami :

$$\mathcal{K}_A[\mu, L, M] = \mathcal{RN}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{RN}[1, M]$$

La fonction caractéristique de deuxième espèce (utile pour calculer les moments) s'en déduit directement, ou bien peut se déduire de celle de la loi \mathcal{K} en intensité (équation 2.74, en prenant en compte les spécificités de μ vis à vis de μ_I). Elle s'écrit :

$$\phi(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L + \frac{s-1}{2})}{L^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M + \frac{s-1}{2})}{M^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(M)} \quad (5.1)$$

Maximum de vraisemblance

Une des curiosités de la loi \mathcal{K} est que la méthode du maximum de vraisemblance ne peut s'appliquer. En effet, il n'existe pas de forme analytique à la dérivée d'une fonction de Bessel par rapport à son indice.

Et même si l'on connaissait L et M , μ vérifie une équation implicite (relation 3.71) totalement inutilisable en pratique.

Cas particulier de la loi $\mathcal{K}1$ en amplitude : Méthodes des moments

La loi $\mathcal{K}1$ en amplitude peut poser problème dans le cadre de la méthode des moments. En effet, si l'on choisit les deux premiers moments, il est nécessaire de résoudre le système suivant pour la loi en amplitude :

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{\Gamma(L + \frac{1}{2})}{L^{\frac{1}{2}} \Gamma(L)} \Gamma(\frac{3}{2}) \mu \\ m_2 &= \mu^2 \end{aligned}$$

L s'obtient alors par la relation implicite :

$$\frac{\Gamma(L + \frac{1}{2})}{L^{\frac{1}{2}} \Gamma(L)} \Gamma(\frac{3}{2}) \sqrt{m_2} = \frac{m_1}{\sqrt{m_2}}$$

où l'on reconnaît, à un facteur $\Gamma(\frac{3}{2})$ près l'expression permettant d'estimer L dans le cas de la loi de Nakagami (expression 3.43) et pour laquelle des approximations peuvent s'utiliser.

Pour éviter l'expression implicite, Iskander [33] a été l'un des premiers à proposer l'utilisation des FLOM (Fractional Lower Order Moments) en partant de la relation suivante :

$$R_p = \frac{m_{p+2q}}{m_p m_{2q}} = \frac{\Gamma(L) \Gamma(L + \frac{p}{2} + q) \Gamma(1 + \frac{p}{2} + q)}{\Gamma(L + q) \Gamma(L + \frac{p}{2}) \Gamma(1 + \frac{q}{2}) \Gamma(1 + q)}$$

On constate que R_p ne dépend que de L . Iskander montre qu'il est intéressant de prendre $0 < q < 2$. En particulier, pour $q = 1$ on obtient :

$$R_{q=1} = \frac{(2L + p)(2 + p)}{4L}$$

ce qui donne directement :

$$\hat{L}_{MM} = \frac{p(p+2)}{4(R_{q=1} - \frac{p+2}{2})}$$

Le cas $q = 2$ est plus lourd à résoudre et donne un polynôme de degré 2 à résoudre.

Cas général : méthodes des moments, log-moments et mixtes

En utilisant 5.1, on obtient les trois premiers moments de la loi \mathcal{K} en amplitude :

$$\begin{cases} m_1 = \frac{\Gamma(L + \frac{1}{2})}{\sqrt{L} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M + \frac{1}{2})}{\sqrt{M} \Gamma(M)} \mu \\ m_2 = \mu^2 \\ m_3 = \frac{\Gamma(L + \frac{3}{2})}{L^{\frac{3}{2}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M + \frac{3}{2})}{M^{\frac{3}{2}} \Gamma(M)} \mu^3 \end{cases}$$

Comme dans le cas de la loi de Nakagami, on rencontre des fonctions de Pochhammer. On voit qu'il sera quasiment impossible d'avoir un système explicite simple (hormis en prenant les trois premiers moments pairs $\{m_2, m_4, m_6\}$, qui sont les trois premiers moments de la loi en intensité et pour lesquels on dispose de solutions plus ou moins efficaces (voir 3.6.2).

En revanche, les log-cumulants ont une expression quasiment identiques à celle des log-cumulants de la loi en intensité (voir la relation 2.77) :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_1 &= \log(\mu) + \frac{1}{2}(\Psi(L) - \log(L)) + \frac{1}{2}(\Psi(M) - \log(M)) \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{1}{4}(\Psi(1, L) + \Psi(1, M)) \\ \tilde{\kappa}_3 &= \frac{1}{8}(\Psi(2, L) + \Psi(2, M)) \end{aligned} \tag{5.2}$$

Les paramètres L et M se déduisent par le même schéma numérique que dans le cas de la loi en intensité à condition de prendre $4\tilde{\kappa}_2$ et $8\tilde{\kappa}_3$ dans cet algorithme.

5.2.4 Loi de Fisher en amplitude

Plaçons nous dans l'hypothèse où la loi des données en intensité est la loi de Fisher (voir paragraphe 2.3.4) qui s'exprime comme (équation 2.90) :

$$\mathcal{F}[\mu', L, M](u) = \frac{L}{M\mu'} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{\left(\frac{Lu}{M\mu'}\right)^{L-1}}{\left(1 + \frac{Lu}{M\mu'}\right)^{L+M}}.$$

et dont la fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit (relation 2.89) :

$$\phi_{\mathcal{F}}(s) = \mu'^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1}\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s}\Gamma(M)}$$

En utilisant la relation liant loi en intensité et loi en amplitude (relation 1.56), on obtient l'expression de la loi de Fisher "en amplitude" :

$$\mathcal{FA}[\mu, L, M](x) = \frac{2}{\mu} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \sqrt{\frac{L}{M}} \frac{\left(\sqrt{\frac{L}{M}} \frac{x}{\mu}\right)^{2L-1}}{\left(1 + \left(\sqrt{\frac{L}{M}} \frac{x}{\mu}\right)^2\right)^{L+M}}. \quad (5.3)$$

De même que la loi \mathcal{F} se définit à partir des lois Gamma par la relation :

$$\mathcal{F}[\mu', L, M] = \mathcal{G}[\mu', L] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, M]$$

la loi \mathcal{FA} se définit à partir des lois de Rayleigh Nakagami :

$$\mathcal{FA}[\mu, L, M] = \mathcal{RN}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{RN}\mathcal{I}[1, M]$$

Grâce à la relation 1.57 liant les fonctions caractéristiques de deuxième espèce, on a directement (en prenant en compte les spécificités de μ vis à vis de μ') :

$$\phi_{\mathcal{FA}}(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L + \frac{s-1}{2})}{L^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M + \frac{1-s}{2})}{M^{\frac{1-s}{2}} \Gamma(M)} \quad (5.4)$$

Maximum de vraisemblance

Appliquer la méthode du Maximum de Vraisemblance offre des difficultés identiques au cas en intensité. En effet, les estimées $(\hat{\mu}, \hat{L}, \hat{M})$ se déduisent du calcul des dérivées partielles suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log \mathcal{FA}}{\partial \mu} &= \frac{2LM(x^2 - \mu^2)}{\mu(Lx^2 + M\mu^2)} \\ \frac{\partial \log \mathcal{FA}}{\partial L} &= \Psi(L+M) - \Psi(L) + \log\left(\frac{Lx^2}{Lx^2 + M\mu^2}\right) - \frac{M(x^2 - \mu^2)}{Lx^2 + M\mu^2} \\ \frac{\partial \log \mathcal{FA}}{\partial M} &= \Psi(L+M) - \Psi(M) + \log\left(\frac{M\mu^2}{Lx^2 + M\mu^2}\right) + \frac{L(x^2 - \mu^2)}{Lx^2 + M\mu^2} \end{aligned}$$

Les estimées $(\hat{\mu}, \hat{L}, \hat{M})$ vérifient alors les relations suivantes :

$$\sum_{i=1}^N \frac{(x_i^2 - \hat{\mu}^2)}{(\hat{L}x_i^2 + \hat{M}\hat{\mu}^2)} = 0 \quad (5.5)$$

$$\sum_{i=1}^N \left(\Psi(\hat{L} + \hat{M}) - \Psi(\hat{L}) + \log\left(\frac{\hat{L}x_i^2}{\hat{L}x_i^2 + \hat{M}\hat{\mu}^2}\right) \right) - \sum_{i=1}^N \frac{\hat{M}(x_i^2 - \hat{\mu}^2)}{\hat{L}x_i^2 + \hat{M}\hat{\mu}^2} = 0 \quad (5.6)$$

$$\sum_{i=1}^N \left(\Psi(\hat{L} + \hat{M}) - \Psi(\hat{M}) + \log\left(\frac{\hat{M}\hat{\mu}^2}{\hat{L}x_i^2 + \hat{M}\hat{\mu}^2}\right) \right) + \sum_{i=1}^N \frac{\hat{L}(x_i^2 - \hat{\mu}^2)}{\hat{L}x_i^2 + \hat{M}\hat{\mu}^2} = 0 \quad (5.7)$$

et en utilisant, dans les relations 5.6 et 5.7, la relation 5.5, on obtient alors :

$$\sum_{i=1}^N \left(\Psi(\hat{L} + \hat{M}) - \Psi(\hat{L}) + \log \left(\frac{\hat{L} x_i^2}{\hat{L} x_i^2 + \hat{M} \hat{\mu}^2} \right) \right) = 0 \quad (5.8)$$

$$\sum_{i=1}^N \left(\Psi(\hat{L} + \hat{M}) - \Psi(\hat{M}) + \log \left(\frac{\hat{M} \hat{\mu}^2}{\hat{L} x_i^2 + \hat{M} \hat{\mu}^2} \right) \right) = 0 \quad (5.9)$$

En soustrayant ces deux dernières relations, on obtient :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log x_i = \log \hat{\mu} + \frac{1}{2} \left(\Psi(\hat{L}) - \log \hat{L} \right) - \frac{1}{2} \left(\Psi(\hat{M}) - \log \hat{M} \right)$$

et on reconnaît dans le terme de droite l'expression du premier log-cumulant de la loi de Fisher en amplitude.

La relation 5.9 permet d'écrire directement :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log \left(1 + \frac{\hat{L} x_i^2}{\hat{M} \hat{\mu}^2} \right) = \Psi(\hat{L} + \hat{M}) - \Psi(\hat{M})$$

Cette dernière relation peut s'avérer utile dans des méthodes utilisant la log-vraisemblance.

Enfin une troisième relation, directement tirée de 5.5, permet d'écrire :

$$\sum_{i=1}^N \frac{(x_i^2 - \hat{\mu}^2)}{(\hat{M} \hat{\mu}^2 + \hat{L} x_i^2)} = 0$$

qui permet la formulation suivante pour $\hat{\mu}$:

$$\hat{\mu}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{1 + \frac{L x_i^2}{M \hat{\mu}^2}}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{1 + \frac{L x_i^2}{M \hat{\mu}^2}}} = \frac{\sum_{i=1}^N \alpha_i x_i^2}{\sum_{i=1}^N \alpha_i} \quad \text{avec} \quad \alpha_i = 1 + \frac{L x_i^2}{M \hat{\mu}^2}$$

et qui correspond à une moyenne pondérée des échantillons (ce qui est satisfaisant intuitivement, mais qui ne permet pas une résolution directe puisque les coefficients de pondération α_i dépendent eux aussi des échantillons). Si $M \rightarrow \infty$, on retrouve l'expression correspondant à la loi de Rayleigh Nakagami. Si $L \rightarrow \infty$, on retrouve l'expression correspondant à la loi de Rayleigh Nakagami Inverse.

Ce système implicite est bien évidemment difficile à résoudre, ce qui fait que la Méthode du Maximum de Vraisemblance n'est jamais utilisée en pratique pour la loi de Fisher en amplitude.

Méthodes des moments, log-moments et mixtes

En utilisant 5.4, on obtient les trois premiers moments de la loi \mathcal{FA} (en supposant qu'ils existent, *i.e.* si $M > \frac{3}{2}$) :

$$\begin{cases} m_1 = \frac{\Gamma(L+\frac{1}{2})}{\sqrt{L} \Gamma(L)} \frac{\sqrt{M} \Gamma(M-\frac{1}{2})}{\Gamma(M)} \mu \\ m_2 = \frac{M}{M-1} \mu^2 \\ m_3 = \frac{\Gamma(L+\frac{3}{2})}{L^{\frac{3}{2}} \Gamma(L)} \frac{M^{\frac{3}{2}} \Gamma(M-\frac{3}{2})}{\Gamma(M)} \mu^3 \end{cases}$$

Comme dans le cas de la loi de Nakagami, on rencontre des fonctions de Pochhammer. On voit qu'il sera quasiment impossible d'avoir un système explicite simple (hormis en prenant les trois premiers moments pairs $\{m_2, m_4, m_6\}$, qui sont les trois premiers moments de la loi en intensité et pour lesquels on dispose toujours de solutions même si elles n'ont pas de sens –voir 3.6.3–).

En revanche, les log-cumulants ont une expression quasiment identiques à celle des log-cumulants de la loi en intensité (voir la relation 2.94) :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_1 &= \log(\mu) + \frac{1}{2}(\Psi(L) - \log(L)) - \frac{1}{2}(\Psi(M) - \log(M)) \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{1}{4}(\Psi(1, L) + \Psi(1, M)) \\ \tilde{\kappa}_3 &= \frac{1}{8}(\Psi(2, L) - \Psi(2, M))\end{aligned}\quad (5.10)$$

Les paramètres L et M se déduisent par le même schéma numérique que dans le cas de la loi en intensité à condition de prendre $4\tilde{\kappa}_2$ et $8\tilde{\kappa}_3$ dans cet algorithme.

5.2.5 Loi de Weibull Généralisée

Pour mémoire, nous rappelons l'expression de la loi de Weibull Généralisée (équation 2.66) :

$$\mathcal{WG}[\mu, L, \eta](u) = \frac{|\eta|}{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{\Gamma(L)} \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} u}{\mu} \right)^{\eta L - 1} e^{-\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} u}{\mu} \right)^\eta}.$$

dont le formalisme intrinsèque est aussi bien adapté aux lois en amplitude qu'aux lois en intensité et dont les méthodes d'estimation de paramètres ont déjà été discutées au paragraphe 3.6.1.

La seule méthode pour en trouver les paramètres est celle des Log-moments qui conduit aux étapes suivantes :

- Trouver \hat{L} en inversant le système implicite :

$$\frac{\tilde{\kappa}_2^3}{\tilde{\kappa}_3^2} = \frac{\Psi(1, \hat{L})^3}{\Psi(2, \hat{L})^2}$$

- Trouver $\hat{\eta}$ en inversant le système implicite :

$$\tilde{\kappa}_2 = \frac{\Psi(1, \hat{L})}{\hat{\eta}^2}$$

- enfin calculer $\hat{\mu}$ à partir du premier log-cumulant :

$$\log \hat{\mu} = \tilde{\kappa}_1 - \frac{\Psi(\hat{L}) + \log(\hat{L})}{\hat{\eta}}$$

5.3 Mélange additif de lois

5.3.1 Mélange additif de lois Gamma [55]

Un problème important en pratique (en particulier en imagerie RSO) est celui des mélanges de lois Gamma. Contrairement au cas gaussien, on obtient le plus souvent des d.d.p. unimodales, sauf lorsque les deux lois initiales sont très différentes (voir figure 5.1). Nous allons montrer qu'il existe cependant une solution simple pour déterminer les paramètres du mélange en analysant ce problème à l'aide des log-cumulants d'ordre 2 et 3.

Considérons le mélange de lois Gamma suivant :

$$\lambda \mathcal{G}[\mu, L] + \lambda' \mathcal{G}[\mu', L]$$

avec $\lambda \geq 0$, $\lambda' \geq 0$ et $\lambda + \lambda' = 1$. Dans ce modèle, nous prenons la même valeur L pour les deux lois Gamma.

On peut réécrire ce modèle en définissant la variable ρ telle que $\mu' = \rho\mu$, ce qui permet d'écrire le mélange sous la forme suivante :

$$\lambda \mathcal{G}[\mu, L] + (1 - \lambda) \mathcal{G}[\rho\mu, L] \quad (5.11)$$

Le mélange est alors défini par une loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L]$ (correspondant à une seule des composantes du mélange) et deux paramètres décrivant ce mélange : λ et ρ .

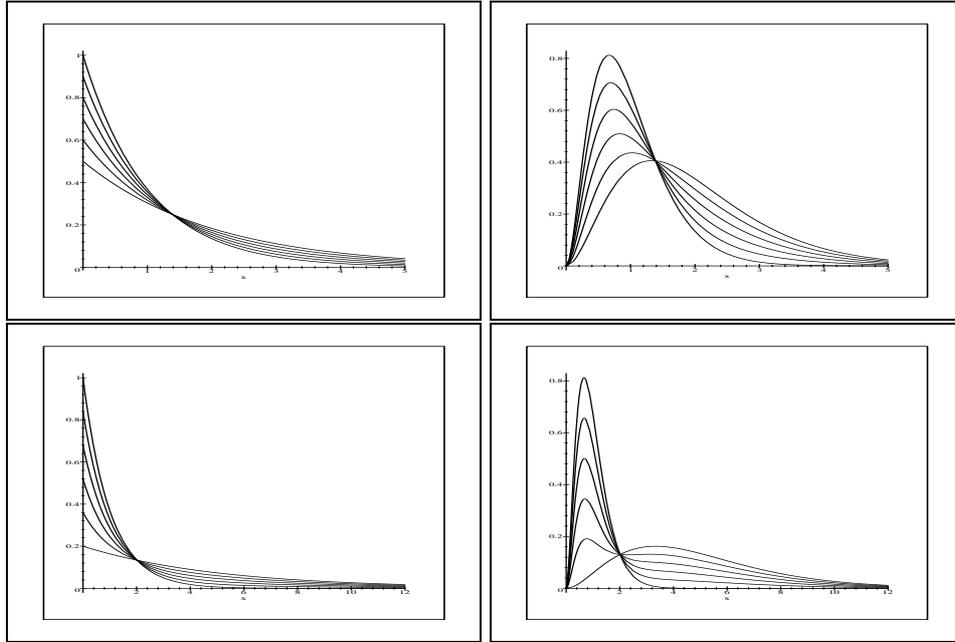


FIG. 5.1 – Exemples de lois de mélange additif de lois Gamma. La colonne de gauche illustre des lois avec $L=1$, la colonne de droite avec $L=3$. Sur la première ligne, $\rho=2$ ($\mu=1$ et $\mu'=2$). Sur la seconde ligne $\rho = 5$ ($\mu=1$ et $\mu'=5$). λ prend les valeurs 0, 0,2, 0,4, 0,6 0,8 et 1.

La fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit :

$$\phi(s) = (\lambda + (1-\lambda)\rho^{s-1}) \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)}.$$

A partir de cette expression, un calcul des log-cumulants peut se mener directement, donnant les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_{x(1)} &= \Psi(L) - \log L + \log \mu + (1-\lambda) \log \rho \\ \tilde{\kappa}_{x(2)} &= \Psi(1, L) + \log(\rho)^2 \lambda (1-\lambda) \\ \tilde{\kappa}_{x(3)} &= \Psi(2, L) + \log(\rho)^3 \lambda (1-\lambda) (2\lambda - 1) \end{aligned}$$

Remarquons qu'à partir de l'ordre 2, ces log-cumulants ne dépendent pas de μ et ont pour les valeurs limites $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$ la même expression que la loi Gamma standard.

Supposons que la grandeur L soit connue (L peut en effet se concevoir comme une fonction d'appareil, et donc être connue de l'expérimentateur). On pose alors :

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{\kappa}_{x(2)}} &= \tilde{\kappa}_{x(2)} - \Psi(1, L) \\ \overline{\tilde{\kappa}_{x(3)}} &= \tilde{\kappa}_{x(3)} - \Psi(2, L) \end{aligned}$$

λ et ρ sont alors donnés par les solutions d'une équation du second degré, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\overline{\tilde{\kappa}_{x(3)}}}{\sqrt{4\overline{\tilde{\kappa}_{x(2)}}^3 + \overline{\tilde{\kappa}_{x(3)}}^2}} \right) \\ \rho &= e^{\frac{\sqrt{4\overline{\tilde{\kappa}_{x(2)}}^3 + \overline{\tilde{\kappa}_{x(3)}}^2}}{\overline{\tilde{\kappa}_{x(2)}}}} \end{aligned}$$

Les évolutions des différents paramètres dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ $\tilde{\kappa}_3$ sont données figure 5.2. Il est intéressant de remarquer que l'allure de ces courbes ne dépend pas de L .

Si on compare les résultats ainsi obtenus avec ceux que l'on trouve dans la littérature, on peut remarquer que cette approche ne nécessite qu'une hypothèse : la connaissance du paramètre L , tandis que l'analyse des mélanges par des méthodes classiques nécessitent en sus la connaissance de μ [67].

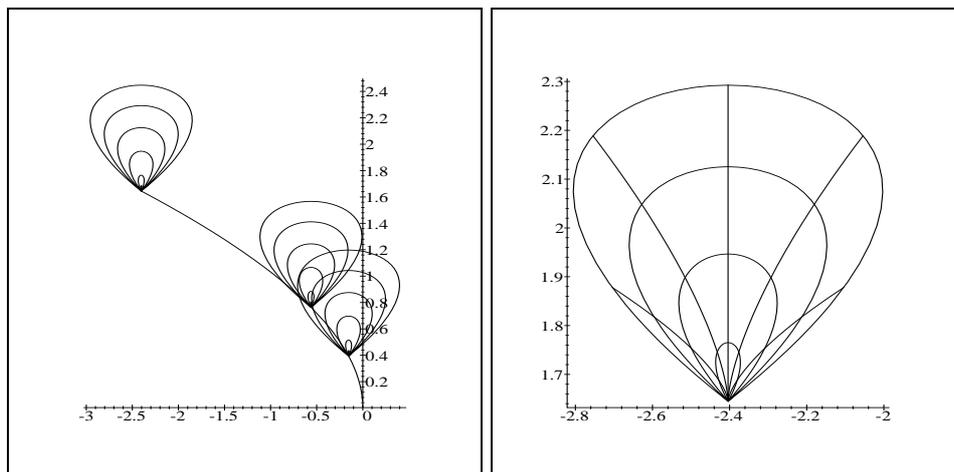


FIG. 5.2 – Diagramme $\tilde{\kappa}_2$ $\tilde{\kappa}_3$ pour un mélange de lois Gamma décrit par les paramètres λ (proportion du mélange) et ρ (rapport des moyennes des zones). A gauche, pour λ variant entre 0 et 1, on trace 3 diagrammes correspondant à plusieurs valeurs de ρ pour 3 valeurs de L ($L = 1, 3$ et 5). Sur cette même figure, la loi Gamma est représentée pour $L \in [1, \infty]$. A droite, pour $L = 1$, on fait varier séparément ρ entre 0 et 5 (5 courbes, avec λ prenant les valeurs 0,1, 0,3, 0,5, 0,7 et 0,9) et λ entre 0 et 1 (4 courbes fermées, avec ρ prenant les valeurs 2, 3, 4 et 5), diagrammes que l'on place sur la même figure.

5.3.2 Mélange additif de lois de Rayleigh Nakagami

Comme dans le cas précédent (équation 5.11), on peut écrire un mélange de lois de Rayleigh Nakagami :

$$\lambda \mathcal{RN}[\mu, L] + (1 - \lambda) \mathcal{RN}[\rho\mu, L]$$

La méthode précédemment décrite s'applique *in extenso* à condition d'estimer les log cumulants 2 et 3 des données en amplitude : $\tilde{\kappa}_{A,2}$ et $\tilde{\kappa}_{A,3}$, et d'utiliser dans le schéma décrit les valeurs $4 \tilde{\kappa}_{A,2}$ et $8 \tilde{\kappa}_{A,3}$.

5.4 Applications à l'interférométrie

La loi de distribution de la cohérence empirique d s'exprime en fonction de D , degré de cohérence entre les deux canaux, et de L , nombre de points de la fenêtre de moyennage :

$$p(d|D, L) = 2(L-1)(1-D^2)^L d(1-d^2)^{L-2} {}_2F_1(L, L; 1; d^2 D^2).$$

Or on trouve dans les tables de transformées de Mellin ([57], formule 15.5) la relation suivante :

$$\mathcal{M} \left[(1-x)^{\sigma-1} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; \delta x) \right] = \frac{\Gamma(\sigma) \Gamma(\delta)}{\Gamma(\sigma + \delta)} {}_3F_2(\alpha, \beta, \delta; \gamma, \sigma; s)$$

Par identification ($\alpha = \beta = L$, $\sigma - 1 = L - 2$ et $\gamma = 1$), on obtient :

$$\mathcal{M} \left[(1-x)^{L-2} {}_2F_1(L, L; 1; \delta x) \right] = \frac{\Gamma(L-1) \Gamma(\delta)}{\Gamma(L-1 + \delta)} {}_3F_2(L, L, \delta; 1, L-1; s)$$

Cette expression donne directement les moments, résultat classique bien connu. Mais, malheureusement, il ne semble guère possible d'en exhiber les log moments et les log cumulants, la fonction hypergéométrique ${}_3F_2$ s'avérant peu coopérative pour ce genre de traitement.

5.5 Application au traitement d'images RSO

L'approche des lois statistiques définies sur \mathbb{R}^+ entraîne des conséquences sur les techniques que l'on peut employer pour filtrer des images cohérentes entachées par les effets du chatoiement. Deux catégories de filtres seront ainsi abordés :

- les filtres statistiques pour lesquels on fera une hypothèse de forme de loi de probabilité pour la texture sous jacente. L'opération de filtrage visera à rechercher une solution maximisant la vraisemblance.
- les filtres adaptatifs pour lesquels on recherchera simplement à minimiser un terme d'erreur quadratique.

5.5.1 Les filtres statistiques

Soit une image RSO dont on ne connaît que les valeurs des pixels p . Ces valeurs correspondent à une information sur la rétrodiffusion locale \hat{p} que l'on aimerait caractériser, mais le chatoiement spécifique aux images RSO ajoute du bruit multiplicatif à cette grandeur.

L'hypothèse généralement faite est de supposer que ce bruit multiplicatif est modélisable par une loi Gamma Généralisée pour des données en intensité (ce sera une loi de Rayleigh Nakagami pour des données en amplitude). La valeur d'un pixel p suit alors la loi suivante, paramétrée par la rétrodiffusion locale \hat{p} :

$$P(p|\hat{p}) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\hat{p}} \left(\frac{Lp}{\hat{p}} \right)^{L-1} e^{-\frac{Lp}{\hat{p}}}$$

\hat{p} peut être une constante : la zone est alors homogène (la loi de la texture sous jacente est simplement la loi homothétique). Dans le cas contraire, à ce stade, la loi de la texture sous jacente $Q(\hat{p})$ reste inconnue.

Si l'on considère un voisinage d'un pixel donné, on peut souhaiter maximiser la vraisemblance de la valeur des pixels et, étant donné les valeurs de p , rechercher la valeur de \hat{p} maximisant cette vraisemblance. La règle de Bayes permet d'écrire :

$$P_{\text{a posteriori}}(\hat{p}|p) = \frac{P(p|\hat{p}) Q(\hat{p})}{P(p)} \sim P(p|\hat{p}) Q(\hat{p})$$

il suffit donc de maximiser

$$P(p|\hat{p}) Q(\hat{p})$$

ce qui s'effectue en en prenant le logarithme et en recherchant le maximum de l'expression

$$\log(P(p|\hat{p})) + \log(Q(\hat{p})) \quad (5.12)$$

La recherche d'un tel maximum est très classique et consiste à trouver les valeurs annulant la dérivée de cette expression. Les filtres ainsi construits entrent dans la catégorie des filtres MAP (Maximum A Posteriori).

Filtre Gamma-MAP

Dans ce premier modèle, on suppose que la texture sous jacente suit, elle aussi, une loi Gamma :

$$Q(\hat{p}) = \frac{1}{\Gamma(M)} \frac{M}{\mu} \left(\frac{M\hat{p}}{\mu} \right)^{M-1} e^{-\frac{M\hat{p}}{\mu}}$$

On sait alors que la loi globale de l'image suit une loi \mathcal{K} (formule 2.76), dont on peut estimer les paramètres (L , M et μ) sur un voisinage Ω .

En prenant la dérivée logarithmique partielle selon la variable \hat{p} de la formule 5.12 et en annulant l'expression obtenue, il vient :

$$\left(\frac{L(p-\hat{p})}{\hat{p}^2} + \frac{\mu(M-1) - M\hat{p}}{\mu\hat{p}} \right) = 0$$

Le système à résoudre est alors un polynôme du second degré dont on ne conserve que la solution positive, ce qui donne :

$$\hat{p} = \frac{1}{2M} \left(\mu(M-L-1) + \sqrt{\mu} \sqrt{\mu(M-L-1)^2 + 4MLp} \right)$$

On a ainsi trouvé l'expression du filtre Gamma-MAP pour les données en intensité. On peut remarquer les cas particuliers suivants :

- Si $M \rightarrow \infty$, alors $\hat{p} = \mu$, ce qui est tout à fait raisonnable puisque la texture sous jacente est simplement une loi homothétique.
- Si $L \rightarrow \infty$, alors $\hat{p} = p$: comme il n'y a plus de chatoisement, on conserve la valeur du pixel.

Pour les données en amplitude, les calculs sont un petit peu plus lourd et conduisent à l'expression suivante :

$$\hat{p}_A = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{M} \left(\mu^2(2M - 2L - 1) + \mu \sqrt{\mu^2(2M - 2L - 1)^2 + 16MLp^2} \right)}$$

Là aussi, on peut remarquer les cas particuliers suivants :

- Si $M \rightarrow \infty$, alors $\hat{p} = \mu$,
- Si $L \rightarrow \infty$, alors $\hat{p} = p$.

Filtre Fisher-MAP [56]

Il est tout à fait possible d'effectuer d'autres hypothèses sur les lois de texture sous jacente. En particulier, l'utilisation de la loi Gamma inverse peut être proposée pour permettre de prendre en compte certains effets spécifiques "à queue lourde" que l'on peut rencontrer dans le tissu urbain par exemple. On a alors :

$$Q(\hat{p}) = \frac{1}{\Gamma(M)} \frac{1}{\mu M} \left(\frac{M\mu}{\hat{p}} \right)^{M+1} e^{-\frac{M\mu}{\hat{p}}}$$

Nous avons vu que la loi ainsi obtenue est une distribution de Fisher (formule 2.90), dont la forme dépend de 2 paramètres : L lié au chatoisement, et M caractérisant les effets de "queue lourde".

L'estimation des paramètres d'une loi de Fisher peut se mener sans encombre dès lors que l'on utilise la méthode des log-moments.

Comme dans le cas du filtre Gamma MAP, on recherche le maximum de la vraisemblance, ce qui conduit à une expression assez simple pour la valeur estimée du pixel ;

$$\hat{p} = \frac{Lp + M\mu}{1 + L + M}.$$

Le filtre Fisher-MAP se trouve être aussi un filtre adaptatif puisque l'on obtient ainsi une expression linéaire (somme pondérée) entre la vraie valeur du pixel (p) et la moyenne locale (μ). On peut remarquer les cas particuliers suivants, identiques à ceux rencontrés pour le Gamma MAP :

- Si $M \rightarrow \infty$, alors $\hat{p} = \mu$, ce qui est tout à fait raisonnable puisque la texture sous jacente est simplement une loi homothétique.
- Si $L \rightarrow \infty$, alors $\hat{p} = p$: comme il n'y a plus de chatoisement, on conserve la valeur du pixel.

Pour les données en amplitude, on a

$$\hat{p}_A = \sqrt{\frac{2Lp^2 + 2M\mu^2}{1 + 2L + 2M}},$$

avec les cas particuliers suivants :

- Si $M \rightarrow \infty$, alors $\hat{p} = \mu$,
- Si $L \rightarrow \infty$, alors $\hat{p} = p$.

5.5.2 Filtres adaptatifs

Filtres adaptatifs de Kuan et de Lee

Analysant une image RSO comme le résultat d'une convolution de Mellin entre une loi $S(u)$ décrivant le chatoisement normalisé (une loi Gamma $\mathcal{G}[\mu_S, L_S]_{\mu_S=1}$ dans le cas d'une image en intensité), et une loi décrivant la texture sous jacente P :

$$Q(u) = S(u) \hat{\star} P(u) = \mathcal{G}[\mu_S, L_S]_{\mu_S=1}(u) \hat{\star} P(u) \quad (5.13)$$

il apparait donc que la valeur d'un pixel q est le résultat d'un mélange multiplicatif de la valeur de la texture sous jacente p et des effets du chatoisement. Le but du filtrage est de proposer une estimée \hat{p} de la valeur de la texture à partir de la valeur mesurée du pixel de l'image q , de la connaissance locale de la loi décrivant l'image Q , et de la loi du chatoisement S , supposée connue.

Pour définir une relation entre l'estimée, la valeur du pixel et la moyenne μ_S , il est d'usage d'imposer la linéarité (on parlera aussi de développement au premier ordre) ainsi que l'absence de biais ($E(\hat{p}) = E(p)$), ce qui conduit à définir une relation ne dépendant que d'un seul paramètre k :

$$\hat{p} = (1 - k)\bar{p} + k\frac{q}{\mu_S} \quad (5.14)$$

\bar{p} , la moyenne, étant estimée sur un voisinage du pixel considéré, et μ_S étant la valeur moyenne du chatoiement (ici $\mu_S = 1$, puisque notre chatoiement a été choisi normalisé). Reste à définir le paramètre k , qui dépend a priori du voisinage du pixel considéré.

Parmi les critères possibles permettant de définir k , le plus naturel est de minimiser l'erreur quadratique moyenne (filtre EQMM) : cette approche a été menée par Kuan sous une forme sans approximation, et antérieurement par Lee avec une légère approximation. A partir des équations 5.13 et 5.14, il est aisé de calculer l'erreur quadratique moyenne \mathcal{E} :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= E\left\{(\hat{p} - p)^2\right\} \\ &= E\left\{\left((1 - k)\bar{p} + k\frac{q}{\mu_S} - p\right)^2\right\} \\ &= E\left\{\left(\bar{p} - p + k\left(\frac{q}{\mu_S} - \bar{p}\right)\right)^2\right\} \\ &= E\left\{\left(\bar{p} - p + k\left(\frac{q - \bar{q}}{\mu_S}\right)\right)^2\right\} \end{aligned}$$

et d'en exprimer sa dérivée par rapport à la variable k : cette expression doit être nulle pour minimiser \mathcal{E} . On peut alors écrire :

$$E\left\{\left(\frac{q}{\mu_S} - \bar{p}\right)\left(\bar{p} - p + k\left(\frac{q}{\mu_S} - \bar{p}\right)\right)\right\} = 0$$

ce qui permet d'obtenir, puisque les lois du chatoiement et de la texture sous jacente sont indépendantes, l'expression suivante pour k :

$$k = \frac{E\left\{\left(\frac{q}{\mu_S} - \bar{p}\right)(p - \bar{p})\right\}}{E\left\{\left(\frac{q - \bar{q}}{\mu_S}\right)^2\right\}} = \frac{E\{p^2\} - E\{p\}^2}{E\{q^2\} - E\{q\}^2} \mu_S^2.$$

En utilisant les moments centrés d'ordre 2 de la texture $M_{P,2}$ et de l'image globale $M_{Q,2}$, on obtient finalement l'expression suivante :

$$k = \frac{M_{P,2}}{M_{Q,2}} m_{S,1}^2. \quad (5.15)$$

Le moment centré d'ordre 2, $M_{P,2}$, qui, lié à la texture sous jacente, ne peut donc être estimé directement, s'exprime néanmoins en fonction de la connaissance du chatoiement et de l'image. Pour cela, à partir de la relation 5.13 et des propriétés de la convolution de Mellin, on écrit

$$M_{P,2} = m_{P,2} - m_{P,1}^2 = \frac{m_{Q,2}}{m_{S,2}} - \frac{m_{Q,1}^2}{m_{S,1}^2}$$

et, utilisant les coefficients de variation $\gamma_S = \sqrt{\frac{m_{S,2}}{m_{S,1}^2} - 1}$ et $\gamma_Q = \sqrt{\frac{m_{Q,2}}{m_{Q,1}^2} - 1}$, on obtient finalement la relation suivante :

$$M_{P,2} = \frac{m_{Q,1}^2}{\mu_S^2} \frac{\gamma_Q^2 - \gamma_S^2}{1 + \gamma_S^2} = \frac{M_{Q,2}}{\mu_S^2} \frac{1 - \gamma_S^2}{1 + \gamma_S^2}$$

relation qui permet d'établir la formule due à Kuan :

$$k_{Kuan} = \frac{1 - \gamma_S^2}{1 + \gamma_S^2} \quad (5.16)$$

dans laquelle γ_S est déduit des connaissances a priori sur la nature du chatoisement et γ_Q est estimé localement sur l'image. Remarquons toutefois que si les expressions 5.15 et 5.16 sont assez limpides, le passage de la première à la seconde s'est avéré plutôt laborieux.

La formule de Lee est une approximation de cette relation :

$$k_{Lee} = 1 - \frac{\gamma_S^2}{\gamma_Q^2} \quad (5.17)$$

Ce qui donne pour les images en intensité (loi Gamma) :

$$k_{Lee} = 1 - \frac{L_Q}{L_S} \quad (5.18)$$

Dans le cas des images en amplitude (loi de Rayleigh Nakagami) la relation 5.17 ne permet curieusement aucune simplification parlante.

Les comportements de ces deux filtres, très utilisés en imagerie radar, sont proches. Sur une zone très homogène, on a $\gamma_Q \approx \gamma_S$, et donc $k = 0$, ce qui implique $\hat{p} = \bar{p}$. La valeur du filtre sur une zone homogène est simplement la moyenne locale. En revanche, sur une zone très hétérogène (à proximité d'une discontinuité par exemple), on a $\gamma_Q \gg \gamma_S$, donc $k = 1$ pour le filtre de Lee (et $\frac{1}{1+\gamma_S^2}$ pour le filtre de Kuan). L'action de moyennage est interrompue ou limitée sur ce genre de zones où la meilleure estimation de la réflectivité est la radiométrie même du pixel.

Les filtres homomorphiques (échelle logarithmique) [53]

Dans le cas de lois définies sur \mathbb{R}^+ , on peut tout à fait remplacer la notion d'erreur quadratique par l'Erreur Quadratique Normalisée (EQN) qui s'exprime sous la forme suivante :

$$\tilde{\mathcal{E}} = E \left\{ \left(\log \left(\frac{x}{y} \right) \right)^2 \right\}. \quad (5.19)$$

Considérons maintenant que la loi de l'image RSO est une convolution de Mellin de la loi du chatoisement et de la loi de la scène. Posons que l'estimateur de la valeur du pixel \hat{p} vérifie une expression de type homomorphique (identique à la précédente par passage en échelle logarithmique) :

$$\hat{p} = \bar{p}^{1-k} \left(\frac{q}{\bar{m}_S} \right)^k, \quad (5.20)$$

expression dans laquelle on a aussi remplacé les moyennes par les log-moyennes : \bar{p} est la log-moyenne calculée dans un voisinage donné du pixel considéré et \bar{m}_S est la log-moyenne du chatoisement (rappelons que cette log-moyenne, dans le cas d'un chatoisement de type Goodman, *i.e.* suivant une loi Gamma normalisée, dépend de μ et de L).

Développons l'EQN :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}} &= E \left\{ \left(\log \left(\frac{\hat{p}}{p} \right) \right)^2 \right\} \\ &= E \left\{ \left((1-k) \log \bar{p} + k \log \left(\frac{q}{\bar{m}_S} \right) - \log p \right)^2 \right\} \\ &= E \left\{ \left((\log \bar{p} - \log p) + k (\log q - \log \bar{p} - \log \bar{m}_S) \right)^2 \right\} \\ &= E \left\{ \left((\log \bar{p} - \log p) + k (\log q - \log \bar{q}) \right)^2 \right\} \\ &= E \left\{ \left(\log \frac{\bar{p}}{p} + k \log \frac{q}{\bar{q}} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

Pour minimiser $\tilde{\mathcal{E}}$, il suffit de rechercher la valeur de k qui en annule la dérivée première. On peut donc écrire

$$E \left\{ \log \frac{q}{\bar{q}} \left(\log \frac{\bar{p}}{p} + k \log \frac{q}{\bar{q}} \right) \right\} = 0$$

ce qui permet, puisque les lois du chatoiment et de la texture sous jacente sont indépendantes, d'obtenir l'expression suivante pour k :

$$k = \frac{E \left\{ \log \frac{p}{\bar{p}} \log \frac{q}{\bar{q}} \right\}}{E \left\{ \left(\log \frac{q}{\bar{q}} \right)^2 \right\}} = \frac{E \left\{ \left(\log \frac{p}{\bar{p}} \right)^2 \right\}}{E \left\{ \left(\log \frac{q}{\bar{q}} \right)^2 \right\}}.$$

A partir de la définition des log-moments normalisés, on en déduit l'expression suivante

$$k = \frac{\tilde{M}_{P,2}}{\tilde{M}_{Q,2}}. \quad (5.21)$$

Pour obtenir $\tilde{M}_{P,2}$, il suffit d'utiliser les propriétés des moments normalisés :

$$\tilde{M}_{P,2} = \tilde{M}_{Q,2} - \tilde{M}_{S,2}$$

ce qui donne directement

$$k = 1 - \frac{\tilde{M}_{S,2}}{\tilde{M}_{Q,2}}, \quad (5.22)$$

que l'on peut rapprocher du filtre de Lee classique (ratio des coefficients de variations, équation 5.17). Remarquons la simplicité des calculs nécessaires à l'obtention de cette relation, à la différence du cas classique qui avait nécessité quelques artifices (utilisation laborieuse du coefficient de variation) pour arriver au formalisme de Kuan.

Menons maintenant la même analyse que pour les filtres de Lee et Kuan.

- Dans une zone homogène, on aura $k = 0$. On attribuera alors comme valeur au pixel la *log-moyenne*, qui, dans le cas de la loi Gamma, est légèrement inférieure à la valeur moyenne.
- Dans une zone totalement hétérogène, on aura $k = 1$. On prendra alors comme estimée la valeur effective du pixel.

On voit que le comportement est fondamentalement différent de celui du filtre de Kuan puisque, pour les zones homogènes, on ne retient pas la moyenne, mais une valeur s'en approchant (la log-moyenne, qui est un estimateur biaisé du paramètre μ), et pour les zones très hétérogènes (correspondant en général à la présence de pixels brillants), on prend la vraie valeur du pixel, sans pondération. La dynamique globale est donc supérieure à celle obtenue par les techniques linéaires.

Remarquons enfin que, tant pour la loi Gamma généralisée que pour la loi de Nakagami, la relation 5.22 s'exprime :

$$k = 1 - \frac{\Psi(2, L_S)}{\Psi(2, L_Q)}$$

qui présente de fortes similitudes avec 5.18, expression valide seulement pour la loi Gamma généralisée (en se rappelant que les fonctions $\Psi(2, x)$ sont décroissantes, ce qui explique pourquoi les indices sont permutés entre numérateur et dénominateur).

Annexe A

La fonction Gamma et ses dérivées

A.1 Définitions

A.1.1 La fonction Gamma

Définition

La fonction Gamma est définie par la relation intégrale [26] :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad \operatorname{Re}(z) > 0$$

Elle vérifie la relation :

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z) \tag{A.1}$$

avec $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. En particulier, pour un entier n :

$$\Gamma(n+1) = n!$$

où ! est la fonction factorielle.

Une propriété intéressante de la fonction Gamma est la relation dite de **duplication** :

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) \tag{A.2}$$

On a aussi une autre relation fondamentale :

$$\Gamma(1-x) \Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \tag{A.3}$$

qui permet de déduire une autre relation fondamentale :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{A.4}$$

Propriétés

On peut aisément démontrer (avec Maple par exemple) les relations suivantes :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\alpha x)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{1}{x} \tag{A.5}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\alpha + x)}{\alpha^x \Gamma(\alpha)} = 1 \tag{A.6}$$

La relation A.3 appliquée au voisinage de $x = 0$ permet d'écrire :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Gamma(x) \approx \frac{\pi}{x}$$

Enfin la formule de Stirling permet d'approcher la loi Gamma pour de grandes valeurs de x par une exponentielle :

$$\Gamma(x) \simeq e^{-x} x^{x-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}$$

A.1.2 La fonction Beta

Elle s'exprime simplement à l'aide de la fonction Gamma :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

A.1.3 La fonction de Pochhammer

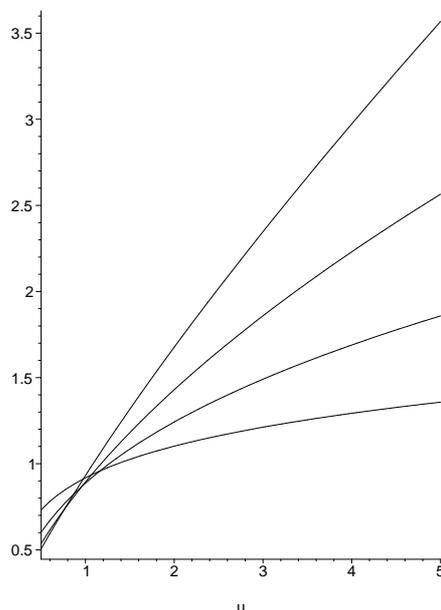


FIG. A.1 – Fonction de Pochhammer pour $\nu = 0.2, 0.4, 0.6$ et 0.8 . Rappelons que pour $\nu = 0$, cette fonction est constante et égale à 1 ; pour $\nu = 1$, cette fonction est égale à x (pente constante égale à 1).

La fonction de Pochhammer, $\text{Poch}(x, \nu)$ est donnée par l'expression

$$\text{Poch}(x, \nu) = \frac{\Gamma(x + \nu)}{\Gamma(x)}$$

et est tracée figure A.1 pour différentes valeurs de ν .

L'approximation suivante [2] s'avère alors très utile :

$$\text{Poch}(x - 1, 0.5) = \frac{(x + 0.5)!}{x!} = \sqrt{x} \left(1 + \frac{3}{8x}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

ce qui permet d'écrire

$$\frac{\text{Poch}(x, \frac{1}{2})}{\sqrt{x}} = \frac{\Gamma(x + \frac{1}{2})}{\sqrt{x} \Gamma(x)} \simeq 1 - \frac{1}{8x} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{x} \Gamma(x)}{\Gamma(x + \frac{1}{2})} \simeq 1 + \frac{1}{8x} \quad (\text{A.7})$$

On en déduit aussi :

$$\frac{\text{Poch}(x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\sqrt{x}} \simeq 1 + \frac{1}{8x} \quad (\text{A.8})$$

A.1.4 La fonction Digamma

La fonction Digamma $\Psi(x)$ se définit comme la dérivée logarithmique de la fonction $\Gamma(x)$:

$$\Psi(x) = \frac{d \log \Gamma(x)}{dx} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

Remarquons que la constante d'Euler γ_E peut s'exprimer comme :

$$\gamma_E = -\Psi(1) \quad (\text{A.9})$$

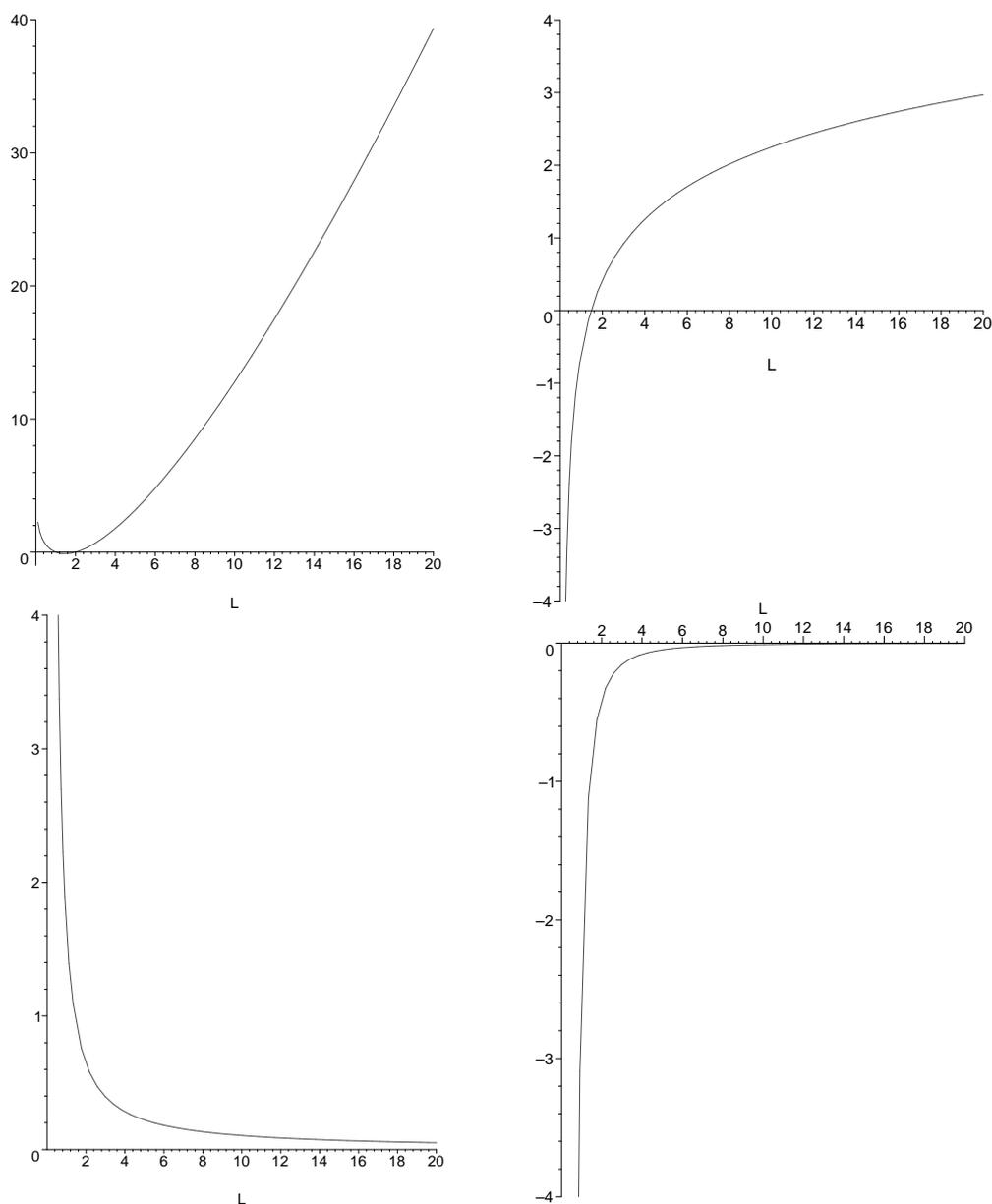


FIG. A.2 – Fonction Gamma (en haut à gauche) et ses dérivées logarithmiques (fonctions Digamma $\Psi(L)$ en haut à droite et Polygammas $\Psi(1, L)$ en bas à gauche, et $\Psi(2, L)$ en bas à droite).

Pour x grand, on montre que :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Psi(x)}{\log(x)} = 1 \quad (\text{A.10})$$

ainsi que la relation :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\Psi(x) - \log(x)) = 0 \quad (\text{A.11})$$

Considérons le logarithme de la relation fondamentale A.1 :

$$\log \Gamma(x+1) = \log x + \log \Gamma(x)$$

En dérivant, il vient la relation utile suivante :

$$\Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{1}{x} \quad (\text{A.12})$$

Enfin, en prenant la dérivée logarithmique de A.2, on obtient aisément la relation de duplication suivante :

$$\Psi(2x) = \log(2) + \frac{1}{2} \left(\Psi(x) + \Psi\left(x + \frac{1}{2}\right) \right) \quad (\text{A.13})$$

A.1.5 Définitions des fonctions Polygamma

Par définition

$$\Psi(r, x) = \frac{d^r \Psi(x)}{dx^r}$$

Comme pour la fonction Digamma, la dérivation $r + 1$ -ème du logarithme de la relation fondamentale A.1 va permettre d'écrire :

$$\Psi(r, x + 1) - \Psi(r, x) = (-1)^r \frac{\Gamma(r + 1)}{x^{r+1}} \quad (\text{A.14})$$

Une relation intéressante que l'on peut obtenir est la suivante :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\Psi(r, x) x^r| = \Gamma(r)$$

qui peut s'écrire aussi pour x grand :

$$\Psi(r, x) \sim \frac{\Gamma(r)}{x^r}.$$

On en déduit en particulier :

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} |\Psi(1, L) L| &= 1 \\ \lim_{L \rightarrow \infty} |\Psi(2, L) L^2| &= 1 \\ \lim_{L \rightarrow \infty} |\Psi(3, L) L^3| &= 2 \end{aligned}$$

La figure A.3 illustre l'allure de $\Psi(1, L) L$ et de $\Psi(2, L) L^2$.

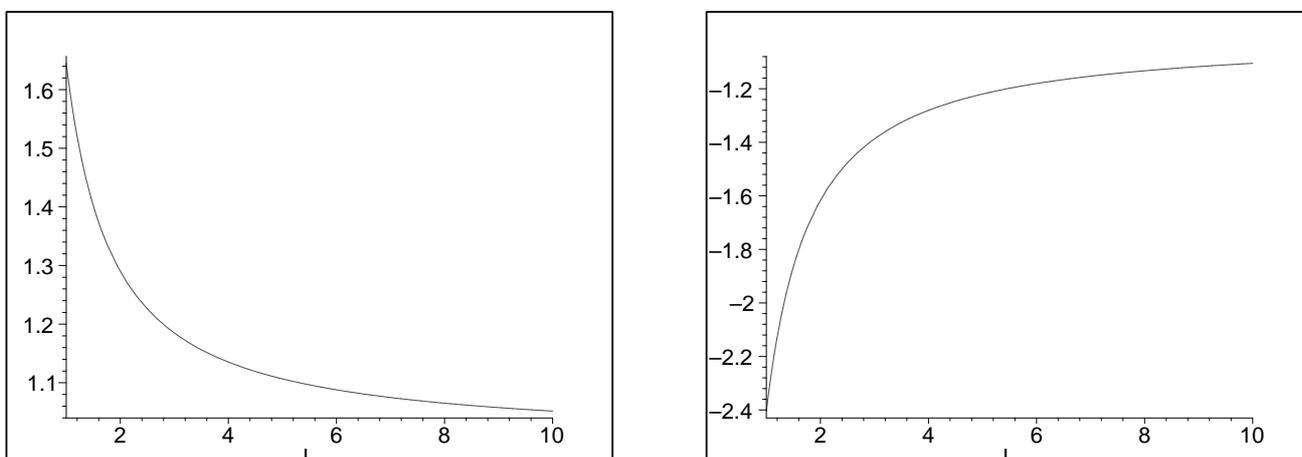


FIG. A.3 – Allure des fonctions $\Psi(1, L) L$ (à gauche) et $\Psi(2, L) L^2$ (à droite) pour L variant entre 1 et 10.

A.1.6 La fonction Zeta

A partir des fonctions Polygamma, il est possible de donner une définition des fonctions Zeta de Riemann à l'aide de l'expression suivante :

$$\zeta(r) = (-1)^r \frac{\Psi(r - 1, 1)}{\Gamma(r)}.$$

A.2 Une méthode numérique pour calculer la fonction Gamma et ses dérivées

A.2.1 Principe mathématique

On trouve un théorème intéressant dans [23] (page 280) :

Soit une suite de fonctions (f_n) définies et dérivables sur un intervalle I . On suppose que la suite des (f'_n) converge uniformément sur tout compact K de I vers une limite g et que, en un point x de I , la suite $(f_n(x))$ converge.

Alors les fonction (f_n) convergent vers une fonction limite f et l'on a $f'=g$.

Puisque la fonction Gamma vérifie les hypothèses de ce théorème, on en déduit que la dérivée de la série est la série de la dérivée.

A.2.2 Code numérique

Pour permettre les estimations des paramètres des lois comme la loi \mathcal{K} , la loi de Fisher ou la loi Beta, un code numérique des fonctions polygamma $\Psi(1, x)$ et $\Psi(2, x)$ a été construit selon le schéma suivant :

- considérer la série de la fonction Gamma proposé dans les Numerical Recipes (avec 5 coefficients, l'erreur annoncée est inférieure à 2.10^{-10})
- puis sous Maple
 - définir la fonction Gamma à partir de cette série
 - calculer les dérivées première et seconde de cette expression
 - en produire le code C

Les erreurs sont inférieures à celles que requiert la simple précision en C.

Annexe B

Les fonctions hypergéométriques

B.1 Définition

La fonction hypergéométrique ${}_2F_1$ peut se définir par la série suivante :

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n$$

avec $(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)$.

Cette fonction vérifie l'intégrale de Mellin-Barnes :

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(-s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)} (-z)^s ds$$

On peut définir la fonction hypergéométrique dégénérée ${}_1F_1$ (notée aussi Φ dans [26]) par :

$${}_1F_1(a; c; z) = \lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1(a, b; c; \frac{z}{b})$$

ce qui donne :

$${}_1F_1(a; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n! (c)_n} z^n$$

Trois fonctions jouent alors un rôle essentiel : les fonctions de Whittaker $MW_{\lambda, \mu}$ et $W_{\lambda, \mu}$, et la fonction Ψ .

– La fonction MW de Whittaker, qui se définit comme suit :

$$MW_{\lambda, \mu} = x^{\mu + \frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + \mu - \lambda; 2\mu + 1; x\right) \quad (\text{B.1})$$

– La fonction de Whittaker W , qui se définit comme suit (pour 2μ non entier) :

$$\begin{aligned} W_{\lambda, \mu} &= \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \lambda)} MW_{\lambda, \mu}(x) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} MW_{\lambda, -\mu}(x) \\ &= z^{\frac{1}{2} + \mu} e^{-\frac{z}{2}} \left(\frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \lambda - \mu)} {}_1F_1\left(\mu - \lambda + \frac{1}{2}; 2\mu + 1; z\right) \right. \\ &\quad \left. + z^{-2\mu} \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \lambda + \mu)} {}_1F_1\left(-\mu - \lambda + \frac{1}{2}; -2\mu + 1; z\right) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Elle vérifie la propriété suivante

$$W_{\lambda, \mu} = W_{\lambda, -\mu} \quad (\text{B.3})$$

– La fonction Ψ est défini par :

$$\Psi(\alpha, \gamma; z) = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} {}_1F_1(\alpha, \gamma; z) + z^{1-\gamma} \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)} {}_1F_1(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma; z)$$

Il est aisé de montrer les relations suivantes :

$$W_{\lambda, \mu}(z) = z^{\frac{1}{2} + \mu} e^{-\frac{z}{2}} \Psi\left(\frac{1}{2} - \lambda + \mu, 1 + 2\mu; z\right) \quad (\text{B.4})$$

$$\Psi(\alpha, \gamma; z) = z^{-\frac{\gamma}{2}} e^{\frac{z}{2}} W_{\frac{\gamma}{2} - \alpha, \frac{\gamma-1}{2}} \quad (\text{B.5})$$

B.2 Les fonctions hypergéométriques solutions d'équations différentielles

Une définition équivalente de $F(a, b; c; z)$ est de la considérer comme solution de l'équation différentielle hypergéométrique, qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$z(1-z)y'' + (c - (1+a+b)z)y' - aby = 0$$

${}_1F_1(a; c; z)$ peut se définir comme solution de l'équation hypergéométrique confluyente

$$zy'' + (c-z)y' - ay = 0$$

La fonction de Whittaker $W_{k,m}$ est alors tout naturellement solution de l'équation de Whittaker

$$y'' + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{z^2} \right) y = 0 \quad (\text{B.6})$$

Annexe C

Le système de Pearson

C.1 Définition

Parmi les lois de probabilités décrites par un faible nombre de paramètres, une famille bien connue est celle qui vérifie le système de Pearson [35] et qui a fait l'objet, par Delignon, d'un travail de synthèse dans le cadre des images RSO [16].

Le système de Pearson décrit les lois de probabilités $P_P(u)$ vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\frac{1}{P_P(u)} \frac{dP_P(u)}{du} = -\frac{a+u}{c_0+c_1u+c_2u^2}. \quad (\text{C.1})$$

Les solutions d'une telle équation sont donc paramétrées par 4 grandeurs : a, c_0, c_1 et c_2 . Ces solutions sont classées en 7 types (type I à VII) selon la nature du polynôme et des racines de ce même polynôme :

$$c_0 + c_1u + c_2u^2. \quad (\text{C.2})$$

Degré du polynôme	nombre de racine	type de racine		Type de solution
0				Loi gaussienne
1	1			Type III (Loi Gamma)
2	1	double		Type V (Loi Gamma Inverse)
2	2	réelle	même signe signe opposé	Type VI (Loi de Fisher) Types I et II (cas symétrique)
2	2	complexe	$c_1 \neq 0$ ou $a \neq 0$ $c_1 = a = 0$	Type IV Type VII

Pour caractériser des images RSO, seules nous intéressent les solutions continument dérivables définies pour $u \in \mathbb{R}^+$, ce qui impose $c_0 = 0$ et qui conduit à ne retenir que celles appartenant aux 4 catégories suivantes [35] :

- type III : $c_2 = 0$ et $c_1 > 0$ (i.e. le polynôme a une seule racine). La solution est alors une loi Gamma :

$$P_{P_{III}}(u) = \text{Cste} (u)^{-\frac{a}{c_1}} e^{-\frac{u}{c_1}}$$

- type I (racines réelle de signe opposé) : puisque nous nous restreignons aux lois définies sur \mathbb{R}^+ , une des racines est nulle, et la seconde (a_2) est > 0 . La solution est la loi Beta de première espèce et s'écrit :

$$P_{P_I}(u) = \text{Cste} (u)^{m_1} (a_2 - u)^{m_2}$$

et n'est définie que sur $[0; a_2]$. Les valeurs de m_1 et de m_2 doivent vérifier $m_1 > -1$ et $m_2 > -1$.

- type VI (racines réelles de même signe) : ici, une des racines est nulle, et la seconde (a'_2) est < 0 . Posant $a_2 = -a'_2 > 0$, la solution est la loi de Beta de deuxième espèce, appelée aussi plus généralement loi de Fisher, et s'écrit :

$$P_{P_{VI}}(u) = \text{Cste} (u)^{m_1} (u + a_2)^{m_2}$$

On montre qu'il est alors nécessaire d'avoir $m_1 + m_2 < -1$ et $m_2 < -1$.

- type V (racines doubles en $u = 0$). La condition $c_0 = 0$ impose alors $c_1 = 0$ et la solution est une loi Gamma inverse.

$$P_{P_V}(u) = \text{Cste} \frac{e^{-\frac{a}{c_2}u}}{u^{\frac{1}{c_2}}}$$

Notons que puisque $P_{P_V}(u)$ est définie sur \mathbb{R}^+ , on doit avoir $\frac{a}{c_2} < 0$ (condition en $u = 0$) et $c_2 > 0$ (condition à l'infini).

Pour mémoire signalons les expressions des autres solutions, définies sur \mathbb{R} :

- type II, qui est un cas symétrique de la solution de type I :

$$P_{P_{II}}(u) = \text{Cste} (u^2 - a_1^2)^{m_2}$$

- type IV, cas des racines complexes :

$$P_{P_{IV}}(u) = \text{Cste} \frac{e^{-\frac{(2ac_2 - c_1)}{c_2 \sqrt{4c_0c_2 - c_1^2}} \text{Atan}\left(\frac{2c_2u + c_1}{\sqrt{4c_0c_2 - c_1^2}}\right)}}{\sqrt{(c_0 + c_1u + c_2u^2)^{\frac{1}{c_2}}}}$$

- type VII, appelée aussi loi t de Student :

$$P_{P_{VII}}(u) = \text{Cste} \frac{1}{\sqrt{(c_0 + c_2u^2)^{\frac{1}{c_2}}}}$$

Remarquons enfin que la définition du système de Pearson (équation C.1) donne directement le mode de ces lois :

$$m_{mode} = -a$$

C.2 Lois directes et inverses

Considérons donc les solutions du système de Pearson définies sur \mathbb{R}^+ avec $c_0 = 0$. On a alors la relation :

$$\frac{1}{P_P(u)} \frac{dP_P(u)}{du} = -\frac{a + u}{c_1u + c_2u^2}.$$

Considérons la loi inverse $Q_P(u)$:

$$Q_P(u) = \frac{1}{u^2} P_P\left(\frac{1}{u}\right)$$

On peut aisément en déduire la dérivée logarithmique :

$$\frac{1}{Q_P(u)} \frac{dQ_P(u)}{du} = -\frac{\frac{2c_2 - 1}{2c_1 - a} + u}{\frac{c_2}{2c_1 - a}u + \frac{c_1}{2c_1 - a}u^2}$$

qui vérifie donc la relation fondamentale des systèmes de Pearson avec :

$$a' = \frac{2c_2 - 1}{2c_1 - a} \quad c'_1 = \frac{c_2}{2c_1 - a} \quad c'_2 = \frac{c_1}{2c_1 - a} \quad (\text{C.3})$$

En particulier, on peut remarquer que :

$$\frac{c'_2}{c'_1} = \frac{c_1}{c_2}.$$

et que le polynôme C.2 s'écrit :

$$x(c_2 + c_1x) = 0$$

On en déduit que les racines conservent leur signe.

Il est alors aisé de montrer la classe correspondante des lois inverses :

- loi initiale de type III : Dans ce cas :

$$P_{P_{III}}(u) = \text{Cste } (u)^{-\frac{a}{c_1}} e^{\frac{u}{c_1}}$$

On a alors (relation 1.11) :

$$P_{P_{III}Inverse}(u) = \text{Cste } (u)^{\frac{a-2c_1}{c_1}} e^{\frac{1}{u c_1}}$$

On peut vérifier que cette loi vérifie le système de Pearson et que c'est une loi de type V.

On aurait pu aussi déduire ce résultat à partir des équations C.3 : puisque la relation $c_2 = 0$ est vérifiée pour la loi Gamma, on en déduit que $c'_1 = 0$ pour la loi inverse, ce qui est, en fait, la condition vérifiée par la loi Gamma inverse.

- loi initiale de type V : c'est donc une loi de type III. Le raisonnement est identique au cas précédent.
- type VI : il apparaît que la loi inverse est bien évidemment une loi de type VI et s'écrit :

$$\begin{aligned} P_{P_{VI}Inverse}(u) &= \text{Cste } \frac{1}{u^2} \left(\frac{1}{u}\right)^{m_1} \left(\frac{1}{u} + a_2\right)^{m_2} \quad \text{avec } a_2 > 0 \\ &= \text{Cste } (u)^{-2-m_1-m_2} \left(u + \frac{1}{a_2}\right)^{m_2} \end{aligned}$$

- type I : La loi inverse est de type I et s'écrit

$$P_{P_IInverse}(u) = \text{Cste } \frac{1}{u^2} \left(\frac{1}{u}\right)^{m_1} \left(a_2 - \frac{1}{u}\right)^{m_2}$$

Elle n'est définie que sur $[\frac{1}{a_2}, \infty]$. Stricto sensu, on a du mal à reconnaître une loi de type I. Pourtant, elle vérifie l'équation fondamentale C.1. Son comportement a été analysé au paragraphe 2.3.5.

C.3 Une propriété du système de Pearson

Une approche originale va se fonder sur une propriété de la transformée de Mellin concernant la transformée de Mellin des dérivées première et seconde d'une fonction (propriété **TM 5**, que l'on associera à la propriété **TM 2**) :

$$\mathcal{M}[u^n f'(u)] = (-1)(s+n-1)\mathcal{M}[f(u)](s+n-1)$$

$$\mathcal{M}[u^n f''(u)] = (s+n-1)(s+n-2)\mathcal{M}[f(u)](s+n-2)$$

Dans l'espace de Mellin, et sous l'hypothèse $c_0 = 0$, le système de Pearson s'écrit alors :

$$\mathcal{M}[P'_P(u) (c_1 u + c_2 u^2)] = -\mathcal{M}[P_P(u) (a + u)]$$

ce qui, étant donné les propriétés de la transformée de Mellin d'une dérivée première et en posant $\mathcal{M}_P(s) = \mathcal{M}[P_P](s)$ peut s'écrire :

$$\mathcal{M}_P(s+1) (c_2 - 1 + c_2 s) = (a - c_1 s) \mathcal{M}_P(s)$$

Cette relation se réécrit :

$$\mathcal{M}_P(s+1) = \frac{-a + c_1 s}{(1 - c_2) - c_2 s} \mathcal{M}_P(s) \quad (\text{C.4})$$

Nous avons donc obtenu une relation de récurrence simple pour les solutions du système de Pearson. L'expression de cette récurrence s'exprime donc pour les fonctions caractéristiques de deuxième espèce ϕ_P :

$$\phi_P(s+1) = \frac{-a + c_1 s}{(1 - c_2) - c_2 s} \phi_P(s) \quad (\text{C.5})$$

Par prolongement analytique, on en déduit directement la forme analytique des transformées de Mellin selon les valeurs de c_1 et de c_2 , ce qui donne :

– Si $c_2 = 0$ et $c_1 > 0$ (cas Pearson III), on a :

$$\begin{aligned}\phi_P(s+1) &= (-a + c_1 s) \phi_P(s) \\ &= c_1 \left(s - \frac{a}{c_1} \right) \phi_P(s)\end{aligned}$$

et puisque, par définition des d.d.p. on a $\Phi_P(s)|_{s=1} = 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\phi_P(s)|_{s=2} &= c_1 \left(1 - \frac{a}{c_1} \right) \\ \phi_P(s)|_{s=3} &= c_1 \left(2 - \frac{a}{c_1} \right) \phi_P(s)|_{s=2} \\ &= c_1^2 \left(2 - \frac{a}{c_1} \right) \left(1 - \frac{a}{c_1} \right) \\ \phi_P(s)|_{s=n} &= c_1^{n-1} \left(n - 1 - \frac{a}{c_1} \right) \left(n - 2 - \frac{a}{c_1} \right) \dots \left(1 - \frac{a}{c_1} \right)\end{aligned}$$

En notant que $\frac{a}{c_1} > 0$ (loi sur \mathbb{R}^+), et puisque l'on a par définition $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, on peut écrire :

$$\left(n - 1 - \frac{a}{c_1} \right) \left(n - 2 - \frac{a}{c_1} \right) \dots \left(1 - \frac{a}{c_1} \right) \frac{\Gamma\left(1 - \frac{a}{c_1}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{a}{c_1}\right)} = \frac{\Gamma\left(n - \frac{a}{c_1}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{a}{c_1}\right)} = \frac{\Gamma\left(n - 1 + 1 - \frac{a}{c_1}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{a}{c_1}\right)}$$

Comme cette dernière expression n'a pas de limite pour $n \rightarrow \infty$, on préfère la réécrire sous la forme :

$$\left(1 - \frac{a}{c_1} \right)^{n-1} \left(\frac{\Gamma\left(n - 1 + 1 - \frac{a}{c_1}\right)}{\left(1 - \frac{a}{c_1}\right)^{n-1} \Gamma\left(1 - \frac{a}{c_1}\right)} \right)$$

de telle sorte que le membre de droite ait pour limite 1 quand $n \rightarrow \infty$. Une évidente démonstration par récurrence permet alors d'écrire pour tout s :

$$\phi_P(s) = (c_1 - a)^{s-1} \frac{\Gamma\left(s - 1 + \left(1 - \frac{a}{c_1}\right)\right)}{\left(1 - \frac{a}{c_1}\right)^{s-1} \Gamma\left(1 - \frac{a}{c_1}\right)}$$

En effectuant les identifications suivantes :

$$\begin{aligned}\mu &= c_1 - a \\ M &= 1 - \frac{a}{c_1}\end{aligned}$$

on retrouve l'expression 2.21 de la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi Gamma Généralisée :

$$\mathcal{M}_{P_{III}}(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(M + s - 1)}{M^{s-1} \Gamma(M)}$$

– Si $c_1 = 0$ et $c_2 > 0$ (cas Pearson V) on a :

$$\begin{aligned}\phi_P(s+1) &= \frac{-a}{(1 - c_2) - c_2 s} \phi_P(s) \\ &= \left(\frac{-a}{c_2} \right) \frac{1}{\frac{1-c_2}{c_2} - s} \phi_P(s)\end{aligned}$$

et puisque, par définition des d.d.p. on a $\Phi_P(s)|_{s=1} = 1$, on peut écrire :

$$\phi_P(s)|_{s=2} = \left(\frac{-a}{c_2} \right) \frac{1}{\frac{1-c_2}{c_2} - 1}$$

$$\begin{aligned}
\phi_P(s)|_{s=3} &= \left(\frac{-a}{c_2}\right) \frac{1}{\frac{1-c_2}{c_2} - 2} \phi_P(s)|_{s=2} \\
&= \left(\frac{-a}{c_2}\right)^2 \frac{1}{\left(\frac{1-c_2}{c_2} - 2\right) \left(\frac{1-c_2}{c_2} - 1\right)} \\
\phi_P(s)|_{s=n} &= \left(\frac{-a}{c_2}\right)^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1-c_2}{c_2} - (n-1)\right) \dots \left(\frac{1-c_2}{c_2} - 2\right) \left(\frac{1-c_2}{c_2} - 1\right)}
\end{aligned}$$

Si $c_2 < 1$ et si $s < \frac{1-c_2}{c_2}$, et connaissant les propriétés des fonctions Gamma, on peut écrire :

$$\left(\frac{1-c_2}{c_2} - (n-1)\right) \left(\frac{1-c_2}{c_2} - n\right) \dots \left(\frac{1-c_2}{c_2} - 1\right) \frac{\Gamma\left(\frac{1-c_2}{c_2} - (n-1)\right)}{\Gamma\left(\frac{1-c_2}{c_2} - (n-1)\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1-c_2}{c_2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-c_2}{c_2} - (n-1)\right)}$$

Comme précédemment, on va réécrire cette expression sous la forme :

$$\frac{1}{\left(\frac{1-c_2}{c_2}\right)^{1-n}} \left(\frac{\left(\frac{1-c_2}{c_2}\right)^{1-n} \Gamma\left(\frac{1-c_2}{c_2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-c_2}{c_2} - (n-1)\right)} \right)$$

de sorte que le terme de droite tende vers 1 quand $n \rightarrow -\infty$. Une évidente démonstration par récurrence permet alors d'écrire pour tout s :

$$\begin{aligned}
\phi_P(s) &= \left(\frac{-a}{c_2}\right)^{s-1} \left(\frac{1-c_2}{c_2}\right)^{1-s} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1-c_2}{c_2} - (s-1)\right)}{\left(\frac{1-c_2}{c_2}\right)^{1-s} \Gamma\left(\frac{1-c_2}{c_2}\right)} \right) \\
&= \left(\frac{-a}{1-c_2}\right)^{s-1} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1-c_2}{c_2} - (s-1)\right)}{\left(\frac{1-c_2}{c_2}\right)^{1-s} \Gamma\left(\frac{1-c_2}{c_2}\right)} \right)
\end{aligned}$$

En effectuant les identifications suivantes :

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{-a}{1-c_2} \\
M &= \frac{1-c_2}{c_2}
\end{aligned}$$

on retrouve l'expression 2.47 de la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi Gamma Généralisée Inverse :

$$\mathcal{M}_{P_{PV}}(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s} \Gamma(M)}$$

- Si $c_2 > 0$ et $c_1 > 0$ (cas Pearson VI), on a :

$$\begin{aligned}
\phi_P(s+1) &= \frac{-a + c_1 s}{(1-c_2) - c_2 s} \phi_P(s) \\
&= \frac{c_1}{c_2} \frac{s - \frac{a}{c_1}}{\frac{1-c_2}{c_2} - s} \phi_P(s)
\end{aligned}$$

En utilisant directement les deux résultats précédents (pour lesquels existaient les mêmes contraintes $c_2 > 0$ et $c_1 > 0$), on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\phi_P(s) &= \left(\frac{c_1 - a}{c_2}\right)^{s-1} \frac{\Gamma\left(s-1 + \left(1 - \frac{a}{c_1}\right)\right)}{\left(1 - \frac{a}{c_1}\right)^{s-1} \Gamma\left(1 - \frac{a}{c_1}\right)} \left(\frac{1-c_2}{c_2}\right)^{1-s} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1-c_2}{c_2} - (s-1)\right)}{\left(\frac{1-c_2}{c_2}\right)^{1-s} \Gamma\left(\frac{1-c_2}{c_2}\right)} \right) \\
&= \left(\frac{c_1 - a}{1-c_2}\right)^{s-1} \frac{\Gamma\left(s-1 + \left(1 - \frac{a}{c_1}\right)\right)}{\left(1 - \frac{a}{c_1}\right)^{s-1} \Gamma\left(1 - \frac{a}{c_1}\right)} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1-c_2}{c_2} - (s-1)\right)}{\left(\frac{1-c_2}{c_2}\right)^{1-s} \Gamma\left(\frac{1-c_2}{c_2}\right)} \right)
\end{aligned}$$

En effectuant les identifications suivantes :

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{c_1 - a}{1 - c_2} \\ M &= 1 - \frac{a}{c_1} \\ N &= \frac{1}{c_2} - 1\end{aligned}$$

on retrouve donc directement l'expression 2.89 de la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi de Fisher :

$$\mathcal{M}_{P_{P_{VI}}}(s) = \left(\frac{-ac_1}{c_2}\right)^{s-1} \frac{\Gamma(s - \frac{a}{c_1}) \Gamma(\frac{1}{c_2} - s)}{\Gamma(1 - \frac{a}{c_1}) \Gamma(\frac{1}{c_2} - 1)} = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(M + s - 1)}{M^{s-1} \Gamma(M)} \frac{\Gamma(N + 1 - s)}{N^{1-s} \Gamma(N)}$$

- Si $c_2 < 0$ et $c_1 > 0$ (cas Pearson I), on va poser $\tilde{c}_2 = -c_2$, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\phi_P(s+1) &= \frac{-a + c_1 s}{(1 + \tilde{c}_2) + \tilde{c}_2 s} \phi_P(s) \\ &= \frac{c_1}{\tilde{c}_2} \frac{s - \frac{a}{c_1}}{\frac{1+\tilde{c}_2}{\tilde{c}_2} + s} \phi_P(s)\end{aligned}$$

On en déduit facilement l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\phi_P(s) &= \left(\frac{c_1 - a}{\tilde{c}_2}\right)^{s-1} \frac{\Gamma\left(s - 1 + \left(1 - \frac{a}{c_1}\right)\right)}{\left(1 - \frac{a}{c_1}\right)^{s-1} \Gamma\left(1 - \frac{a}{c_1}\right)} \frac{1}{\left(\frac{1+\tilde{c}_2}{\tilde{c}_2} + 1\right)^{s-1}} \frac{\left(\frac{1+\tilde{c}_2}{\tilde{c}_2} + 1\right)^{s-1} \Gamma\left(\frac{1-\tilde{c}_2}{\tilde{c}_2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\tilde{c}_2}{\tilde{c}_2} + 1 + s - 1\right)} \\ &= \left(\frac{c_1 - a}{1 + 2\tilde{c}_2}\right)^{s-1} \frac{\Gamma\left(s - 1 + \left(1 - \frac{a}{c_1}\right)\right)}{\left(1 - \frac{a}{c_1}\right)^{s-1} \Gamma\left(1 - \frac{a}{c_1}\right)} \frac{\left(\frac{1+\tilde{c}_2}{\tilde{c}_2} + 1\right)^{s-1} \Gamma\left(\frac{1-\tilde{c}_2}{\tilde{c}_2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\tilde{c}_2}{\tilde{c}_2} + 1 + s - 1\right)}\end{aligned}$$

En effectuant les identifications suivantes :

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{c_1 - a}{1 + 2\tilde{c}_2} = \frac{a - c_1}{2c_2 - 1} \\ M &= 1 - \frac{a}{c_1} \\ N &= \frac{1 + \tilde{c}_2}{\tilde{c}_2} + 1 = \frac{2c_2 - 1}{c_2} = 2 - \frac{1}{c_2}\end{aligned}$$

on retrouve donc directement l'expression 2.98 de la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi Beta :

$$\mathcal{M}_{P_{PI}}(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(M + s - 1)}{M^{s-1} \Gamma(M)} \frac{N^{s-1} \Gamma(N)}{\Gamma(N + s - 1)}.$$

- Si $c_2 > 0$ et $c_1 < 0$ (cas Pearson I : loi Inverse), on va poser $\tilde{c}_1 = -c_1$, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\phi_P(s+1) &= \frac{-a - \tilde{c}_1 s}{(1 - c_2) - c_2 s} \phi_P(s) \\ &= \frac{\tilde{c}_1}{c_2} \frac{\frac{-a}{\tilde{c}_1} - s}{\frac{1-c_2}{c_2} - s} \phi_P(s)\end{aligned}$$

En s'inspirant des calculs précédents, on montre aisément que :

$$\begin{aligned}\phi_P(s) &= \left(\frac{\tilde{c}_1}{c_2}\right)^{s-1} \left(\frac{-a}{\tilde{c}_1}\right)^{s-1} \left(\frac{\left(\frac{-a}{\tilde{c}_1}\right)^{1-s} \Gamma\left(\frac{-a}{\tilde{c}_1}\right)}{\Gamma\left(\frac{-a}{\tilde{c}_1} - (s-1)\right)}\right) \left(\frac{1-c_2}{c_2}\right)^{1-s} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1-c_2}{c_2} - (s-1)\right)}{\left(\frac{1-c_2}{c_2}\right)^{1-s} \Gamma\left(\frac{1-c_2}{c_2}\right)}\right) \\ &= \left(\frac{-a}{1-c_2}\right)^{s-1} \left(\frac{\left(\frac{-a}{\tilde{c}_1}\right)^{1-s} \Gamma\left(\frac{-a}{\tilde{c}_1}\right)}{\Gamma\left(\frac{-a}{\tilde{c}_1} - (s-1)\right)}\right) \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1-c_2}{c_2} - (s-1)\right)}{\left(\frac{1-c_2}{c_2}\right)^{1-s} \Gamma\left(\frac{1-c_2}{c_2}\right)}\right)\end{aligned}$$

	c_1	c_2	“moyenne”		
Type III (Gamma)	> 0	0	$\mu = c_1 - a$	$M = 1 - \frac{a}{c_1}$	
Type V (Gamma Inverse)	0	> 0	$\mu = \frac{a}{c_2 - 1}$		$M = \frac{1}{c_2} - 1$
Type VI (Fisher)	> 0	> 0	$\mu = \frac{c_1 - a}{1 - c_2}$	$M = 1 - \frac{a}{c_1}$	$N = \frac{1}{c_2} - 1$
Type I (Beta)	> 0	< 0	$\mu = \frac{a - c_1}{2c_2 - 1}$	$M = 1 - \frac{a}{c_1}$	$N = 2 - \frac{1}{c_2}$
Type I inverse (Beta inverse)	< 0	> 0	$\mu = \frac{a}{c_2 - 1}$	$M = \frac{1}{c_2} - 1$	$N = \frac{a}{c_1}$

TAB. C.1 – Paramètres des lois en fonction des paramètres de Pearson

	a	c_1	c_2
Type III (Gamma)	$a = -\mu \frac{M-1}{M}$	$c_1 = \frac{\mu}{M}$	0
Type V (Gamma Inverse)	$a = -\mu \frac{M}{M+1}$	0	$c_2 = \frac{1}{M+1}$
Type VI (Fisher)	$a = -\mu \frac{(M-1)N}{M(N+1)}$	$c_1 = \frac{\mu N}{M(N+1)}$	$c_2 = \frac{1}{N+1}$
Type I (Beta)	$a = -\mu \frac{(M-1)N}{M(N-2)}$	$c_1 = \frac{\mu N}{M(N-2)}$	$c_2 = -\frac{1}{N-2}$
Type I inverse (Beta inverse)	$a = -\mu \frac{M}{M+1}$	$c_1 = -\frac{\mu M}{N(M+1)}$	$c_2 = \frac{1}{M+1}$

TAB. C.2 – Paramètres de Pearson en fonction des paramètres des lois

En effectuant les identifications suivantes :

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{-a}{1 - c_2} \\ M &= \frac{1}{c_2} - 1 \\ N &= \frac{-a}{\tilde{c}_1} = \frac{a}{c_1} \end{aligned}$$

on retrouve donc directement l’expression 2.107 de la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi Beta Inverse :

$$\mathcal{M}_{P_{P_{I,Inverse}}}(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+1-s)}{L^{1-s} \Gamma(L)} \frac{M^{1-s} \Gamma(M)}{\Gamma(M+1-s)}$$

Dans ces expressions, on a introduit trois grandeurs $(M, N, \mu)^1$: certains peuvent être interprétées comme des facteurs de forme (M, N) , μ peut être vue comme une valeur “moyenne” et dépend toujours du mode $-a$ (μ). D’une part, on a ainsi retrouvé les expressions analytiques introduites précédemment au chapitre 2. D’autre part, on peut déduire les expressions analytiques des cumulants de seconde espèce – et donc obtenir des estimées des grandeurs M, N, μ – sans pour autant connaître la forme analytique de la solution.

Par simple identification, on peut relier les coefficients du système de Pearson a, c_1, c_2 et les paramètres μ, M, N des lois, relations qui sont reprises dans les tableaux C.1 et C.2, toujours sans connaître la forme analytique de la solution.

Une transformée de Mellin inverse (que fournit les tables) permet bien évidemment d’obtenir l’expression analytique des fonctions vérifiant le système de Pearson : on a donc retrouvé les solutions du système

¹C’est pour simplifier les expressions du paragraphe suivant qu’ont été introduites, pour la loi de Fisher et la loi Beta de première espèce, les variables (M, N) plutôt que le couple (L, M) des paragraphes 2.3.4 et 2.3.5. En effet, le paramètre L sera dédié au chatoiement, les paramètres M et N à la texture de l’image sous jacente.

Texture “sol”	Loi globale Image	type de solution
Loi Gamma	loi \mathcal{K}	K
Loi Beta de première espèce		W
Loi Gamma Inverse	loi de Fisher	B
Loi de Fisher		U
Loi Beta Inverse de première espèce		Z

TAB. C.3 – Divers modèles de texture “sol” et lois résultantes

C.1 en se fondant uniquement sur les propriétés des transformées de Mellin et des tables de transformées de Mellin, et sans utiliser directement la convolution de Mellin.

C.4 Le système KWBUZ

C.4.1 Modélisation d’images RSO

Delignon propose donc de modéliser les images RSO d’une part par une texture “sol” dont la densité de probabilité vérifie 4 solutions du système de Pearson (loi Gamma, loi Gamma Inverse, loi Beta, loi de Fisher), et d’autre part par un bruit multiplicatif correspondant à un chatoisement pleinement développé et dont la densité de probabilité est une loi Gamma Généralisée de facteur de forme L (par simplification, on se place dans le cas de données en intensité).

Ce sont donc quatre cas, appelé système KWBU, qui sont à étudier, auxquels on va rajouter un cas faisant intervenir loi Beta Inverse, cas non étudié par Delignon, et qui conduira à définir le système KWBUZ. En fait tous ces cas ont déjà été rencontrés au chapitre 2 grâce à une utilisation systématique de la convolution de Mellin, ce qui nous permet d’en deviner la solution analytique :

- La texture suit une loi Gamma (solution de type III). Nous avons vu que l’on obtient alors une loi \mathcal{K} , et on dira que l’image est de type K.
- La texture suit une loi Gamma Inverse (solution de type V). Nous avons vu que l’on obtient alors une loi de Fisher, et on dira que l’image est de type B.
- La texture suit une loi Beta de première espèce (solution de type I). On dira que l’image est de type W.
- La texture suit une loi de Fisher (solution de type VI). On dira que l’image est de type U.
- La texture suit une loi Beta Inverse de première espèce (solution de type I, Inverse). On dira que l’image est de type Z.

Ce découpage est repris dans le tableau C.3.

Comme la fonction caractéristique d’une loi Gamma Généralisée ϕ_C (qui représente le Chatoisement) vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\phi_C(s+1) = \left(\frac{L-1}{L} + \frac{s}{L} \right) \phi_C(s)$$

et en utilisant la relation C.4, on a la relation de récurrence vérifiée par la fonction caractéristique de la loi de l’image RSO :

$$\phi_T(s+1) = \frac{-a\frac{L-1}{L} + \frac{c_1(L-1)-a}{L}s + \frac{c_1}{L}s^2}{(1-c_2) - c_2s} \phi_T(s)$$

i.e.

$$\phi_T(s+1) = \frac{B_0 + B_1s + B_2s^2}{(1+C) + Cs} \phi_T(s) \quad (\text{C.6})$$

avec $C = -c_2$, $B_0 = -\frac{a(L-1)}{L}$, $B_1 = \frac{c_1(L-1)-a}{L}$ et $B_2 = \frac{c_1}{L}$.

Les relations entre les paramètres spécifiques des lois KWUBZ et C, B_0, B_1, B_2 sont donnés dans le tableau C.4.

La relation C.6 va nous permettre d’écrire directement les moments de la loi de texture. Nous verrons aussi qu’il est possible de déduire, à partir de cette relation, la loi de texture comme solution d’une équation différentielle du second degré.

	$C = -c_2$	$B_0 = -a \frac{L-1}{L}$	$B_1 = \frac{c_1(L-1)-a}{L}$	$B_2 = \frac{c_1}{L}$
K (loi \mathcal{K}) (texture Gamma : P_{III})	0	$\mu \frac{L-1}{L} \frac{M-1}{M}$	$\frac{\mu}{L} \frac{L+M-2}{M}$	$\frac{\mu}{LM}$
W (texture Beta : P_I)	$\frac{1}{N-2}$	$\mu \frac{L-1}{L} \frac{M-1}{M} \frac{N}{N-2}$	$\frac{\mu}{L} \frac{L+M-2}{M} \frac{N}{N-2}$	$\frac{\mu}{LM} \frac{N}{N-2}$
U (texture Fisher : P_{VI})	$-\frac{1}{M+1}$	$\mu \frac{L-1}{L} \frac{M-1}{M} \frac{N}{N+1}$	$\frac{\mu}{L} \frac{(L+M-2)}{M} \frac{N}{N+1}$	$\frac{\mu}{LM} \frac{N}{N+1}$
B (loi de Fisher) (texture Gamma inverse : P_V)	$-\frac{1}{M+1}$	$\mu \frac{L-1}{L} \frac{M}{M+1}$	$\frac{\mu}{L} \frac{M}{M+1}$	0
Z (texture Beta inverse : $P_{I,Inverse}$)	$-\frac{1}{M+1}$	$\mu \frac{L-1}{L} \frac{M}{M+1}$	$-\frac{\mu}{L} \frac{L-1-N}{N} \frac{M}{M+1}$	$-\frac{\mu}{LN} \frac{M}{M+1}$

TAB. C.4 – Relation entre les paramètres des lois KWUB et les coefficients C, B_0, B_1, B_2 de la loi de récurrence. On a rajouté le cas “Z”.

C.4.2 Les moments de la loi de texture

La relations (C.6) permet donc de donner directement les valeurs des moments centrés uniquement en fonction du paramètre de chatoisement L et des paramètres du système de Pearson a, c_1, c_2 , i.e. les paramètres B_0, B_1, B_2 et C . Il n'est donc pas nécessaire de connaître la formulation exacte de la loi pour connaître les moments². En effet, puisque nous avons des densités de probabilités, la fonction caractéristique de deuxième espèce vérifie

$$\phi_T(s)|_{s=1} = 1$$

De la relation C.6, on déduit les premiers moments :

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{B_0 + B_1 + B_2}{1 + 2C} \\ m_2 &= \frac{B_0 + 2B_1 + 4B_2}{1 + 3C} m_1 \\ m_3 &= \frac{B_0 + 3B_1 + 9B_2}{1 + 4C} m_2 \\ m_4 &= \frac{B_0 + 4B_1 + 16B_2}{1 + 5C} m_3 \end{aligned}$$

On peut vérifier, à l'aide du tableau (C.4) que l'on retrouve

– pour la solution de type K

$$\begin{aligned} m_1 &= \mu \\ m_2 &= \mu^2 \frac{L+1}{L} \frac{M+1}{M} \\ m_3 &= \mu^3 \frac{(L+1)(L+2)}{L^2} \frac{(M+1)(M+2)}{M^2} \end{aligned}$$

On retrouve exactement les expressions obtenues pour la loi \mathcal{K} (paragraphe 2.3.2).

– pour la solution de type B

$$\begin{aligned} m_1 &= \mu \frac{M}{M-1} \\ m_2 &= \mu^2 \frac{L+1}{L} \frac{M^2}{(M-1)(M-2)} \\ m_3 &= \mu^3 \frac{(L+1)(L+2)}{L^2} \frac{M^3}{(M-1)(M-2)(M-3)} \end{aligned}$$

²Il faut noter que l'hypothèse de “bruit multiplicatif” donne aussi directement les moments : encore faut-il connaître explicitement les moments des lois de texture et de la loi Gamma correspondant au chatoisement

- on retrouve exactement les expressions obtenues pour la loi de Fisher (paragraphe 2.3.4).
- De manière identique, on retrouvera exactement les expressions des moments
 - de la loi U (paragraphe 2.4.2) dans le cas “type U”
 - de la loi W (paragraphe 2.4.1) dans le cas “type W”
 - de la loi Z (paragraphe 2.4.3) dans le cas “type Z”

C.4.3 Les solutions analytiques de la loi de texture

Pour effectuer la transformée inverse, il faut réécrire l’expression (C.6) sous la formes suivante :

$$((1 + C) + Cs) \mathcal{M}_T(s + 1) = (B_0 + B_1s + B_2s^2) \mathcal{M}_T(s)$$

ce qui donne :

$$((1 + C) - C) \mathcal{M}_T(s + 1) + C(s + 1) \mathcal{M}_T(s + 1) = B_0 \mathcal{M}_T(s) + (B_1 - B_2)s \mathcal{M}_T(s) + B_2(s + 1)s \mathcal{M}_T(s)$$

On en déduit alors la relation dans l’espace direct :

$$\sigma f(\sigma) - C\sigma^2 f'(\sigma) = B_0 f(\sigma) - (B_1 - B_2)\sigma f'(\sigma) + B_2\sigma^2 f''(\sigma)$$

La fonction globale vérifie donc l’équation différentielle suivante :

$$B_2\sigma^2 f''(\sigma) + (C\sigma^2 + (B_2 - B_1)\sigma) f'(\sigma) + (-\sigma + B_0) f(\sigma) = 0$$

Dans le cas où $B_2 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$ (cas du système B), l’équation différentielle devient du premier ordre et s’écrit :

$$(C\sigma^2 - B_1\sigma) f'(\sigma) + (-\sigma + B_0) f(\sigma) = 0 \quad (\text{C.7})$$

On reconnait un système de Pearson, puisque cette équation se réécrit :

$$\frac{1}{f(\sigma)} f'(\sigma) = -\frac{B_0 - \sigma}{-B_1\sigma + C\sigma^2}$$

et on connaît les formes analytiques des solutions.

Dans le cas où $B_2 = \frac{c_1}{L} \neq 0$, on obtient la relation suivante :

$$f''(\sigma) + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{\sigma} \right) f'(\sigma) + \left(\frac{\mu_1}{\sigma} + \frac{\mu_2}{\sigma^2} \right) f(\sigma) = 0 \quad (\text{C.8})$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{C}{B_2} = \frac{c_2 L}{c_1} \\ \lambda_2 &= \frac{B_2 - B_1}{B_2} = 2 - L + \frac{a}{c_1} \\ \mu_1 &= -\frac{1}{B_2} = -\frac{L}{c_1} \\ \mu_2 &= \frac{B_0}{B_2} = -\frac{a(L - 1)}{c_1} \end{aligned}$$

Ce cas est celui des systèmes KWBUZ pour lesquels les paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ sont donnés dans le tableau C.5.

Le problème est donc de trouver les solutions de l’équation différentielle (C.8) : connaître ces solutions permet de donner, dans le cas où la texture vérifie le système de Pearson, la loi du chatolement de l’image.

Pour cela, on va chercher la solution sous la forme

$$f(\sigma) = g(\sigma) h(\sigma)$$

	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2
K	0	$3 - L - M$	$-\frac{LM}{\mu}$	$(M - 1)(L - 1)$
W	$-\frac{LM}{\mu}$	$3 - L - M$	$-\frac{LM(N-2)}{M\mu}$	$(M - 1)(L - 1)$
U	$\frac{LM}{N\mu}$	$3 - L - M$	$-\frac{LM(N+1)}{NM\mu}$	$(M - 1)(L - 1)$
Z	$\frac{NL}{M\mu}$	$2 - L - N$	$-\frac{LN(M+1)}{M\mu}$	$N(L - 1)$

TAB. C.5 – Paramètres λ_1 , λ_2 , μ_1 et μ_2 de l'équation différentielle C.8 dans les cas K,W,U,Z

L'équation C.8 devient alors

$$g''(\sigma)h(\sigma) + h''(\sigma)g(\sigma) + h'(\sigma) \left(2g'(\sigma) + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{\sigma} \right) g(\sigma) \right) + \left(\left(\frac{\mu_1}{\sigma} + \frac{\mu_2}{\sigma^2} \right) g(\sigma) + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{\sigma} \right) g'(\sigma) \right) h(\sigma) = 0 \quad (\text{C.9})$$

et on choisit g tel que

$$2g'(\sigma) + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{\sigma} \right) g(\sigma) = 0$$

i.e.

$$g(\sigma) = \text{Cste} \frac{e^{-\frac{\lambda_1}{2}\sigma}}{\sqrt{\sigma^{\lambda_2}}}$$

Dans ce cas, l'équation C.9 devient

$$h''(\sigma) + \frac{1}{4} h(\sigma) \left(-\lambda_1^2 + \frac{4\mu_1 - 2\lambda_1\lambda_2}{\sigma} + \frac{4\mu_2 + 2\lambda_2 - \lambda_2^2}{\sigma^2} \right) = 0 \quad (\text{C.10})$$

Si $\lambda_1 \neq 0$, on effectue le changement de variable $z = \lambda_1\sigma$, avec $h(\sigma) = y(z)$. L'équation C.10 devient

$$y''(z) + y(z) \left(-\frac{1}{4} + \frac{\mu_1 - \frac{\lambda_2}{2}}{z} + \frac{4\mu_2 + 2\lambda_2 - \lambda_2^2}{4\lambda_1^2 z^2} \right) \quad (\text{C.11})$$

Par identification avec la relation B.6 de l'annexe B, la solution de l'équation C.11 est une fonction de Whittaker $W_{k,m}$, avec

$$k = \frac{2\mu_1 - \lambda_1\lambda_2}{2\lambda_1}$$

$$m = \frac{1}{2\lambda_1} \sqrt{\lambda_1^2 - 4\mu_2 - 2\lambda_2 + \lambda_2^2}$$

On en déduit la solution de l'équation C.8 :

$$\text{Cste} \frac{e^{-\frac{\lambda_1}{2}\sigma}}{\sqrt{\sigma^{\lambda_2}}} W_{k,m}(\lambda_1\sigma)$$

Si $\lambda_1 = 0$, l'équation C.10 s'écrit

$$h''(\sigma) + \frac{1}{4} h(\sigma) \left(\frac{4\mu_1}{\sigma} + \frac{4\mu_2 + 2\lambda_2 - \lambda_2^2}{\sigma^2} \right) = 0$$

et sa solution est une fonction de Bessel Z_ν (voir [26], relation 8.491.4). On en déduit la solution de l'équation C.8 :

$$\text{Cste} \frac{1}{\sqrt{\sigma^{\lambda_2}}} Z_{\sqrt{1-4\mu_2-2\lambda_2+\lambda_2^2}}(2\sqrt{\mu_1\sigma})$$

Le tableau C.5 permet de retrouver les solutions déjà déterminées au chapitre 2. La détermination de la constante d'intégration (ainsi que le type de fonction de Bessel) se fait en prenant en compte la propriété fondamentale d'une loi de probabilité, i.e. $\int_0^\infty f(\sigma)d\sigma = 1$.

Annexe D

Particularismes de la loi log-normale

Nous avons donc vu que la loi log-normale s'exprime comme (équation 2.12) :

$$\mathcal{L}[\mu, \sigma](u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}u} e^{\left(-\frac{(\log u - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \quad u > 0$$

et que sa fonction caractéristique de deuxième espèce était définie pour tout $s \in \mathbb{C}$ (équation 2.13) :

$$\phi_x(s) = e^{\mu(s-1)} e^{\left(\sigma^2 \frac{(s-1)^2}{2}\right)}.$$

Tous les moments, aussi bien positifs que négatifs, de cette loi sont donc définis.

Or il se trouve que sa fonction caractéristique "classique" n'est pas définie : en effet, on ne peut établir la transformée de Fourier de $\mathcal{L}[\mu, \sigma]$. Aussi, la connaissance des moments ne permet pas d'avoir une connaissance biunivoque de la loi sous jacente.

Pour s'en convaincre, Feller [22] propose un exemple (du à Heyde) qui met en jeu deux lois :

– $f(u)$ qui est une loi lognormale avec $\mu = 1$ et $\sigma = 1$:

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}u} e^{\left(-\frac{(\log u)^2}{2}\right)}$$

– $g(u)$ définie par

$$g(u) = f(u) (1 + a \sin(2\pi \log(u)))$$

Ces deux lois ont exactement les mêmes moments à tous les ordres, mais puisque ni l'une ni l'autre n'ont de fonction caractéristique, la seule connaissance de tous ces moments ne permet pas de les différencier.

En fait, un théorème du à Carleman (voir par exemple Feller [22]) affirme qu'une distribution peut être déterminée par ses moments si la série

$$\sum m_{2n}^{-\frac{1}{2n}}$$

diverge.

On peut vérifier que pour la loi log-normale, on a :

$$m_{2n} = e^{2n\mu + \frac{(2n\sigma)^2}{2}} = e^{2n\mu} e^{\frac{(2n\sigma)^2}{2}}$$

Or, pour n suffisamment grand, on a :

$$e^{\frac{n^2\sigma^2}{4}} > \left(\frac{n\sigma}{4}\right)^2$$

donc

$$\frac{1}{e^{\frac{n^2\sigma^2}{4}}} < \frac{4}{\sigma^2} \frac{1}{n^2}$$

et, puisque la série $\frac{1}{n^2}$ est convergente, la série de Carleman est convergente aussi · la condition de Carleman n'est donc pas vérifiée.

Pour la loi Gamma (L a été choisi ici égal à 1 par simplification, mais le résultat se généralise pour toute valeur de L), on a :

$$m_{2n} = \mu^{2n} \Gamma(2n)$$

On peut montrer (Maple) que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(\Gamma(x))^{\frac{1}{x}}} = e$$

La série de Carleman possède donc le même comportement que la série $\frac{1}{n}$, qui est divergente : la condition de Carleman est donc vérifiée et la loi Gamma est donc caractérisée de manière biunivoque par ses moments.

Annexe E

Recherche exhaustive des lois à 4 paramètres

E.1 Méthodes

Nous allons nous inspirer directement de la démarche du chapitre 2, mais, au lieu de partir des lois servant à une telle construction (convolution de Mellin et convolution de Mellin inverse), nous allons analyser la forme des log-cumulants d'ordre 2 et 3 en remarquant que le log-cumulant d'ordre 2 doit avoir la forme suivante :

$$\Psi(1, L) \pm \Psi(1, M) \pm \Psi(1, N)$$

et que le log-cumulant d'ordre 3 doit avoir celle qui suit :

$$\pm\Psi(2, L) \pm \Psi(2, M) \pm \Psi(2, N)$$

Le log-cumulant d'ordre 2 devant être positif ou nul, on choisira les lois de sortes que la loi rattachée au paramètre L garantisse ce critère de positivité.

La somme de ces deux log-cumulants donne alors une grandeur, notée χ :

$$\chi = \Psi(1, L) \pm \Psi(2, L) \pm \Psi(1, M) \pm \Psi(2, M) \pm \Psi(1, N) \pm \Psi(2, N)$$

L'analyse de la succession de signes $+$ ou $-$ est une manière de caractériser les lois sous jacentes à cette construction

E.1.1 Cas particulier : lois à trois paramètres μ , L et M

Dans le tableau suivant, pour chaque paramètre, le premier signe correspond à celui du log-cumulant d'ordre 2 et le second à celui du log-cumulant d'ordre 3

	Paramètre L		Paramètre M		Loi résultante	
2.1	+	+	+	+	$\mathcal{G} \hat{\star} \mathcal{G}$	Loi \mathcal{K}
2.2	+	+	+	-	$\mathcal{G} \hat{\star} \mathcal{GI}$	Loi de Fisher
2.3	+	+	-	+	$\mathcal{G} \hat{\star}^{-1} \mathcal{GI}$	<i>Bessel</i>
2.4	+	+	-	-	$\mathcal{G} \hat{\star}^{-1} \mathcal{G}$	Loi Beta
2.5	+	-	+	-	$\mathcal{GI} \hat{\star} \mathcal{GI}$	Loi \mathcal{K} inverse
2.6	+	-	-	+	$\mathcal{GI} \hat{\star}^{-1} \mathcal{GI}$	Loi Beta Inverse
2.7	+	-	-	-	$\mathcal{GI} \hat{\star}^{-1} \mathcal{G}$	<i>Bessel Inverse</i>

Il y a donc seulement 7 cas de figures envisageables, car le log-cumulant d'ordre 2 doit impérativement être positif et parce que la convolution de Mellin est commutative.

De plus cette condition est nécessaire (et non suffisante) pour conclure que les fonctions ainsi décrites sont des d.d.p. : en particulier, la loi $\hat{\star}^{-1}$ n'étant pas une loi interne, on observe que les cas 2.3 et 2.7 ne sont pas des d.d.p. (alors que 2.4 et 2.6 le sont).

E.1.2 Lois à quatre paramètres μ , L , M et N

Il y a donc seulement 16 cas de figures envisageables, car le log-cumulant d'ordre 2 doit impérativement être positif. De plus, la loi $\hat{\star}^{-1}$ n'étant pas une loi interne, plusieurs cas sont théoriquement inclassables et seront marqués dans ce tableau “*Cas Bessel*” : une analyse au cas par cas serait requise pour savoir si ces lois sont réellement des d.d.p.

	Paramètre L		Paramètre M		Paramètre N		Loi résultante	
3.1	+	+	+	+	+	+	$\mathcal{K} \hat{\star} \mathcal{G}$	
3.2	+	+	+	+	+	-	$\mathcal{K} \hat{\star} \mathcal{GI} = \mathcal{F} \hat{\star} \mathcal{G}$	Loi U
3.3	+	+	+	+	-	+	$\mathcal{K} \hat{\star}^{-1} \mathcal{GI} = \mathcal{BI} \hat{\star} \mathcal{G}$	
3.4	+	+	+	+	-	-	$\mathcal{B} \hat{\star} \mathcal{G} = \mathcal{K} \hat{\star}^{-1} \mathcal{G}$	Loi W
3.5	+	+	+	-	+	-	$\mathcal{F} \hat{\star} \mathcal{GI} = \mathcal{KI} \hat{\star} \mathcal{G}$	Loi U inverse
3.6	+	+	+	-	-	+	$\mathcal{F} \hat{\star}^{-1} \mathcal{GI}$	Loi Z
3.7	+	+	+	-	-	-	$\mathcal{F} \hat{\star}^{-1} \mathcal{G}$	Loi Z inverse
3.8	+	+	-	+	-	+	$\mathcal{G} \hat{\star}^{-1} \mathcal{KI}$	<i>cas Bessel</i>
3.9	+	+	-	+	-	-	$\mathcal{B} \hat{\star}^{-1} \mathcal{GI}$	<i>cas Bessel</i>
3.10	+	+	-	-	-	-	$\mathcal{B} \hat{\star}^{-1} \mathcal{G}$	<i>cas Bessel</i>
3.11	+	-	+	-	+	-	$\mathcal{KI} \hat{\star} \mathcal{GI}$	inverse de 3.1
3.12	+	-	+	-	-	+	$\mathcal{BI} \hat{\star} \mathcal{GI} = \mathcal{KI} \hat{\star}^{-1} \mathcal{GI}$	Loi W inverse
3.13	+	-	+	-	-	-	$\mathcal{KI} \hat{\star}^{-1} \mathcal{G}$	inverse de 3.3
3.14	+	-	-	+	-	+	$\mathcal{BI} \hat{\star}^{-1} \mathcal{GI}$	<i>cas Bessel</i> inverse de 3.10
3.15	+	-	-	+	-	-	$\mathcal{BI} \hat{\star}^{-1} \mathcal{G}$	<i>cas Bessel</i> inverse de 3.9
3.16	+	-	-	-	-	-	$\mathcal{GI} \hat{\star}^{-1} \mathcal{K}$	<i>cas Bessel</i> inverse de 3.8

- Le cas 3.1 peut être vu comme une “super loi K”. Son expression analytique semble inconnue. Elle peut toujours être vue comme une loi assez localisée dont tous les moments classiques sont définis. Son inverse est catalogué sous le numéro 3.11.
- Le cas 3.3 est une loi \mathcal{BI} , donc à queue lourde, convoluée à une loi Gamma : sa tendance “queue lourde” est donc moins accusée. Son inverse est catalogué sous le numéro 3.13. Son existence – en tant que loi de probabilité – n’est pas assuré puisque la convolution inverse de Mellin n’est pas une loi interne.

Bibliographie

- [1] R.A. Altes *The Fourier-Mellin transform and mammalian hearing* J. Acoust. Soc. Am., Vol. 63, pp.174-183(1978)
- [2] Y. Ayant, M. Borg *Fonctions spéciales* Dunod, 1971
- [3] R.Badeau *Transformation de Mellin : aspects numériques et dérivation fractionnaire. Application aux lois des variables aléatoires positives.* Rapport ENST99D009
- [4] Erdélyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi *Tables of Integral Transforms, Vol 1 (Bateman Manuscript Project)* McGraw-Hill - 1954
- [5] A. Beaupère *Classification d'images de radar par mesure de texture* Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 1992.
- [6] D.Blacknell *Comparison of parameters estimators for K-distribution* IEE Proc. Radar, Sonar Navig, Vol 141, no 1, février 1994, pp 45-52
- [7] D.Blacknell, R.J.A. Tough *Parameter estimation for the K-distribution based on $z \log(z)$* IEE Proc. Radar, Sonar Navig, Vol 148, no 6, décembre 2001, pp 309-312
- [8] P. Borgnat *Modèles et outils pour les invariances d'échelle brisées : variations sur la transformation de Lamperti et contributions aux modèles statistiques de vortex en turbulence.* Thèse de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, décembre 2002
- [9] J.P. Brienne, D. Dubois, L. Povy, H. Baussart *The Mellin transform to control system described by an implicit derivative transmittance* UKACC International Conference on control, 1998
- [10] H. Cartan *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes* Hermann, 1961
- [11] S.Chitroub, A.Houacine, B.Sansal *Statistical characterisation and modelling of SAR images* Signal Processing 82, pp 69-92, 2002
- [12] S. Colombo *Les transformations de Mellin et de Hankel* Centre National de la Recherche Scientifique, 1959
- [13] S. Colombo, J. Lavoine *Transformations de Laplace et de Mellin* Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 169 Gauthier-Villars, 1972
- [14] C.Craig *A new exposition and chart for the Pearson system of curves* Annals of Mathematical Statistics, 7 (1936), pp 16-28
- [15] H. Cramér, "Mathematical methods of statistics", *Princeton University Press*, 1946
- [16] Y. Delignon *Etude statistique d'images radar de la surface de la mer* Thèse de doctorat, Université de Rennes-1, 1993
- [17] B.A. Dolan *The Mellin transform for moment generation and for the probability density of products and quotients of random variables* Proceedings of the IEEE, vol 52, no 12, pp 1745 - 1746, Dec. 1964
- [18] A. El Zaart, D. Ziou, S. Wang, Q. Jiang *Segmentation of SAR images* Pattern Recognition, 35 (2002), 713-724
- [19] J. Elschner, I.G. Graham *Numerical methods for integral equations of Mellin type* Journal of Computational and applied mathematics, vol 125, pp 423-437, 2000
- [20] B. Epstein *Some applications of the Mellin transform in statistics* Annals of Mathematical Statistics, 19 (1948), pp 370-379
- [21] B. Escudié, A. Grossman *Une représentation bilinéaire en temps et en échelle* GRETSI'91, 1991, pp 33-35
- [22] W. Feller *An introduction to probability theory and its applications, vol II* Wiley, 1971

- [23] R. Godement *Analyse mathématique I : Convergence, fonctions élémentaires* Springer Verlag 1998
- [24] R. Godement *Analyse mathématique III : Fonctions analytiques, différentielles et variétés, surfaces de Riemann* Springer Verlag 2002
- [25] J. Goodman *Some fundamental properties of speckle* Journal Optical Society of America, 66(11) :1145-1150, 1976
- [26] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik *Table of integrals, series and product* Academic Press, 1980
- [27] H.L. Gray et N.F. Zhang *On a class of non stationary processes* Journal of time series analysis, vol 9, no 2, 1988
- [28] L. Hellequin *Analyse statistique et spectrale des signaux de sondeurs multifaisceaux EM950, application à l'identification des fonds sous marins* Thèse de doctorat, Université Rennes I, 1998.
- [29] A.Hillion, JM Boucher *Filtrages des images radar (SAR)* Statistiques et analyse des données, 1991, Vol. 16, no 2, pp 35-57
- [30] H.Hochstadt *Les fonctions de la physique mathématique* Masson, 1973
- [31] D.H. Hoekman *Speckle ensemble statistics of logarithmically scaled data* IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing, Vol 29, no 1, Jan. 1991, pp 180-182
- [32] WW.C. Hoffman *Statistical methods in radio wave propagation* Pergamon Press, 1960
- [33] D.R. Iskander, A.M. Zoubir *Estimation of the parameters of the K-distribution using higher order and fractional moments* Iskander, D.R. ; Zoubir, A.M. ; IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, Vol 35, no 4, Oct. 1999 pp 1453-1457
- [34] E. Jakeman, N. Pusey *A model for non Rayleigh sea echo* IEEE Trans. on AP, Vol 24, no 6, 1976, pp 806-814
- [35] Norman N. Johnson, Samuel Klotz *Continuous univariate distributions-1* John Wiley & Sons, 1970
- [36] G. Kaiser *Wavelet filtering with the Mellin transform* Applied Mathematics Letters, vol 9, no 5, pp 69-74, 1996
- [37] D. Kaplan, Q. Ma *On the statistical characteristics of log-compressed Rayleigh signals* IEEE Ultrasonics Symposium, 1993 pp 961-964
- [38] E. Kuruoğlu, J.Zerubia *Modelling SAR images with a generalisation of the Rayleigh distribution* INRIA, rapport 4121, Février 2001
- [39] W. Kryszicki *On some new properties of the beta distribution* Statistics & probability letters, vol 42, pp 131-137, 1999
- [40] J-L Lacoume, P. Amblard, P. Comon *Statistiques d'ordre supérieur pour le traitement du signal* Masson, 1997
- [41] H. Laur *Analyse d'images radar en télédétection : discriminateurs radiométriques et texturaux* Thèse de doctorat, Université de Toulouse, 1989
- [42] F. Le Chevalier *Principe de traitement des signaux Radar et Sonar* Masson, 1989
- [43] V. Le Moigne, F. Galland, J.-M. Nicolas, F. Tupin *Statistical polygonal Snakes with Fisher distribution* EUSAR 2006, Dresde
- [44] P. Lévy *Esquisse d'une théorie de la multiplication des variables aléatoires* Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 76 (1959), pp 59-82
- [45] Z.A. Lomnicki *On the distribution of products of random variables* Journal of the Royal Statistical Society, series B, 29, pp 513-524
- [46] A.Lopès, H.Laur, E.Nezry *Statistical distribution and texture in multilook and complex SAR images* IGARRS'90, PP20-24, Washington, 1990
- [47] James B. McDonald *Some generalized functions for the size distribution of income* Econometrica, Vol 52, No 3 (mai 1984), pp 647-664
- [48] M.V. Menon *Estimation of the shape and scale parameters of the Weibull distribution* Technometrics 5 (1963) 175-182
- [49] M. Auphan, J.M. Nicolas *Tissue ultrasonic attenuation well modeled by a Mellin convolution* Acoustical Imaging 12. Plenum Press, 1982
- [50] J.M. Nicolas, J.L. Bernatets *Attenuation correction using Mellin transform* Acoustical Imaging 14. Plenum Press, 1985

- [51] J.M. Nicolas, M. Sigelle, C. Thuillier, F. Tupin *Images de Radar à Ouverture Synthétique : transformée de Mellin et multirésolution* GRETSI 1997, Grenoble
- [52] J.M. Nicolas *Lower Order Statistics : A new approach for probability density functions defined on R^+* EUSIPCO 2000, Tampere
- [53] J.M. Nicolas *Filtrage homomorphe optimal d'images RSO* GRETSI 2001, Toulouse
- [54] J.M. Nicolas *α -stable positive distributions : a new approach based on second kind statistics* EUSIPCO 2002, Toulouse
- [55] J.M. Nicolas *Gamma mixture modeled with "second kind statistics" : Application to SAR image processing* IGARSS 2002, Toronto
- [56] J.M. Nicolas *A Fisher-MAP filter for SAR image processing* IGARSS 2003, Toulouse
- [57] F. Oberhettinger *Tables of Mellin Transform* Springer Verlag, 1974
- [58] C.J. Oliver *Optimum texture estimators for SAR clutter* J.Phys. D : Appl. Phys. 26 (1993) 1824-1835
- [59] R.D. Pierce, *Application of the positive Alpha-Stable Distribution, Proceedings of the IEEE Signal Processing Workshop on Higher-Order Statistics*, pp 420-424, 1997
- [60] M. Shao, C.L. Nikias *Signal processing with fractional lower order moments : stable process and their applications* Proceedings of the IEEE, vol. 81, no 7, pp 986-1010, juillet 1993
- [61] M.D. Springer, W.E. Thompson *The distribution of products of independent random variables* J. SIAM Appl. Math., vol. 14, no 3, pp 511-526, Mai 1966
- [62] K. Subrahmaniam *On some applications of Mellin transform to statistics : dependent random variables* J. SIAM Appl. Math., vol. 19, no 4, pp 658-662, Dec. 1970
- [63] A. Tagliani *Recovering a probability density function from its Mellin transform* Applied Mathematics and Computation 118 (2001) pp 151-159
- [64] A. Tagliani *Entropy estimate of a probability density from its Mellin transform* Applied Mathematics and Computation 123 (2001) pp 275-284
- [65] A.Stuart, J.Keith *Kendall's Advanced Theory of Statistics, Vol.1 Distribution Theory* Griffin, 1987 (Fifth edition)
- [66] C. Valade *Homomorphic wavelet transform and new subband statistics models for SAR image compression* IGARRS2004, Anchorage, 2004.
- [67] M.J. Wasilewski *Sur certaines propriétés de la distribution Gamma Généralisée* Revue de statistiques appliquées, 15, No 1, pp 95-105, 1967
- [68] A.H. Zemanian *An Introduction to Generalized Functions, with Applications* Dover, 1965
- [69] Zwicke, P.E. and I. Kiss, Jr, *A new implementation of the Mellin transform and its application to radar classification of ships* IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, volume 5 (1983), number 2, pp. 191-199.