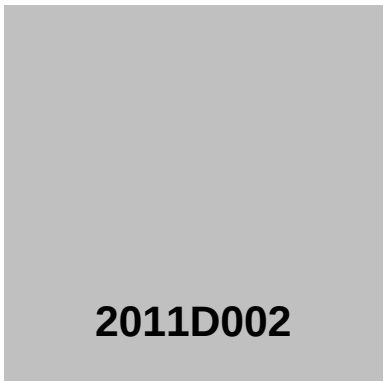




Les distributions de Meijer et leurs propriétés en statistiques de Mellin

Jean-Marie Nicolas

A large, solid gray square that serves as a background for the text "2011D002".

2011D002

janvier 2011

Département Traitement du Signal et des Images
Groupe TII : Traitement et Interprétation des Images

Les distributions de Meijer et leurs propriétés en statistiques de Mellin

Jean Marie Nicolas
Institut Télécom, Télécom ParisTech, CNRS LTCI
46 rue Barrault, 75634 PARIS Cedex 13
jean-marie.nicolas@telecom-paristech.fr

Résumé

C.S.Meijer a introduit les “fonctions de Meijer” comme une généralisation des fonctions hypergéométriques. Or certaines fonctions de Meijer s’expriment comme des transformées inverse de Mellin. Aussi est-il tentant d’aborder ces fonctions sous l’angle des statistiques de Mellin, ce qui conduit naturellement à la définition des “distributions de Meijer”. Ces distributions, définies sur $\mathbb{R}^+$, sont idéalement adaptées au concept de bruit multiplicatif et généralisent la quasi totalité des lois utilisées en imagerie cohérente. Elles forment une classe stable par convolution de Mellin et pour l’opération “loi inverse”. De plus, dérivée et primitive s’expriment aussi sous la forme de fonction de Meijer, ce qui permet en particulier d’avoir une expression analytique de la fonction de répartition.

Abstract

C.S. Meijer proposed a generalisation of hypergeometrical functions : the Meijer’s functions. Yet, some of Meijer’s functions can be defined as an inverse Mellin transform so that it is possible to deal with these functions in the Mellin statistics framework. By this way, it is possible to define “Meijer’s distributions”. As they are defined on $\mathbb{R}^+$, they match well with multiplicative noise and they generalize almost all the probability density functions used in coherent imagery. More, they define a stable set for the Mellin convolution and for the inverse transform. Their derivative and their primitive can be also expressed as Meijer’s functions. By this way, cumulative functions of Meijer’s distributions can always be analytically defined.

Table des matières

1	Introduction	6
2	Définitions et propriétés fondamentales	7
2.1	Définition des fonctions de Meijer définies sur $\mathbb{R}^+$	7
2.2	Notation des fonctions de Meijer	7
2.3	Propriétés de base : réduction/augmentation du nombre de paramètres	8
2.4	Relations fondamentales fondées sur la transformée de Mellin et la convolution de Mellin	9
2.4.1	Multiplication par la variable x	9
2.4.2	Convolutions de Mellin de deux fonctions de Meijer	9
2.5	Propriété fondamentale de la fonction “inverse”	9
2.6	Cas particuliers de fonctions de Meijer définies sur $\mathbb{R}^+$	10
2.6.1	Distribution “Mellin-Dirac” $\delta^{\mathcal{M}}$	10
2.6.2	Exponentielle décroissante	11
2.6.3	Exponentielle décroissante “inverse”	11
2.6.4	Fonction de Bessel modifiée de seconde espèce K	12
2.6.5	Fonction de Fisher	12
2.6.6	Fonction Beta et fonction Beta inverse	13
2.6.7	Fonction de Whittaker	13
2.6.8	Fonctions hypergéométrique	14
2.7	Une nouvelle propriété de permutation des paramètres	15
2.8	Programmation en Maple V13	15
3	Dérivation de fonctions de Meijer	16
3.1	Expressions générales	16
3.2	Exemples	16
3.3	Nouvelles formulations de la dérivation	17
3.3.1	Cas général	17
3.3.2	Cas particulier de fonction de Meijer $\overline{G}_{p,q}^{m,n} : a_1 = 1$ et $b_{m+1} = 0$	19
3.3.3	Cas particulier de fonction de Meijer $\overline{G}_{p,q}^{m,n} : a_{n+1} = 1$ et $b_1 = 0$	19
3.3.4	Cas particulier : $b_1 = 0$	19
3.4	Autre formulation de la dérivation : utilisation de la transformée de Mellin	20
3.5	Exemples de dérivation de fonctions de Meijer	22
3.5.1	Exponentielle décroissante	22
3.5.2	Exponentielle décroissante “inverse”	23
3.5.3	Dérivation des fonctions de Bessel modifiées de seconde espèce $\mathcal{K}$	24
3.5.4	Dérivation des fonctions de Fisher	24
3.5.5	Dérivation des fonctions Beta	24
3.5.6	Dérivation des fonctions de Whittaker	25
3.5.7	Dérivation des fonctions hypergéométriques : cas ${}_1F_1$	25
3.5.8	Dérivation des fonctions hypergéométriques : cas général	26
4	Intégration des fonctions de Meijer	26
4.1	Première expression de la primitive d’une fonction de Meijer	26
4.2	Seconde expression de la primitive d’une fonction de Meijer	27
4.3	Exemples d’intégration de fonctions de Meijer	28
4.3.1	Intégration de l’exponentielle décroissante	28
4.3.2	Intégration de l’exponentielle décroissante “inverse”	29
4.3.3	Intégration des fonctions de Bessel modifiées de seconde espèce K	30

4.3.4	Intégration des fonctions de Fisher	30
4.3.5	Intégration des fonctions Beta	31
4.3.6	Intégration des fonctions hypergéométriques (cas général)	31
5	Récapitulatifs	32
5.1	Propriétés essentielles des fonctions de Meijer	32
5.2	Tableau récapitulatif des fonctions usuelles	34
5.3	Taxonomie des fonctions usuelles	36
5.4	Tableau récapitulatifs des dérivées de fonctions usuelles	37
5.5	Tableaux récapitulatifs des primitives des fonctions usuelles	39
6	Les lois de Meijer	41
6.1	Fonctions de Meijer et lois de probabilités	41
6.2	Les lois de Meijer $\mathcal{LM}$	43
6.2.1	Cas particulier : lois Gamma et Gamma Inverse	43
6.2.2	Cas général des lois de Meijer	44
6.2.3	Propriétés des lois de Meijer	45
6.2.4	Fonction caractéristique de deuxième espèce des lois de Meijer	45
6.2.5	Moments et mode des lois de Meijer	45
6.2.6	log-moments et log-cumulants des lois de Meijer	46
6.2.7	Lois de Meijer et lois de Meijer inverse	46
6.3	Lois de Meijer généralisées	46
6.3.1	Définition des lois généralisées [11]	46
6.3.2	Exemples de lois généralisées	47
6.3.3	Définition des lois de Meijer généralisées $\mathcal{LMG}$	48
6.3.4	Fonction caractéristique de deuxième espèce des lois de Meijer généralisées	48
6.3.5	Propriétés des lois de Meijer généralisées	49
6.4	Tableau récapitulatif des lois usuelles exprimées comme lois de Meijer	50
6.4.1	Lois à deux paramètres	50
6.4.2	Lois à trois paramètres	51
6.4.3	Lois à quatre paramètres	52
6.4.4	Lois en amplitude	53
6.4.5	Lois généralisées usuelles	54
7	Fonctions de répartition des lois de Meijer	55
7.1	Cas général	55
7.2	Fonctions de répartition des lois usuelles	56
7.3	Exemples de fonction de répartition	57
8	Applications : produits, quotient et moyenne géométrique	59
8.1	Produit de variables aléatoires	59
8.1.1	Cas général	59
8.1.2	Produits de variables aléatoires suivant la même loi de distribution	60
8.1.3	Produits de variables aléatoires suivant des lois de Meijer	60
8.1.4	Produits de deux variables aléatoires suivant la même loi de distribution	62
8.2	Rapport de deux variables aléatoires	63
8.2.1	Cas général	63
8.2.2	Rapport de deux variables aléatoires suivant une loi de Fisher	63
8.3	Moyenne géométrique de variables aléatoires suivant la même loi de distribution	64
8.3.1	Exemple de la loi log-normale	65
8.3.2	Exemple de la loi Gamma	65

9	Généralisation dans $\mathbb{R}$: les “exp-lois”	68
9.1	Lois définies sur $\mathbb{R}$: passage en échelle exponentielle	68
9.1.1	Définition et propriété	68
9.1.2	Un exemple : la loi lognormale	69
9.1.3	Les log-lois	69
9.2	Lois définies sur $\mathbb{R}^+$: passage en échelle logarithmique	70
9.2.1	Définition et propriétés	70
9.2.2	Les exp-lois	71
9.2.3	Exp-lois fondamentale : la loi de Fisher Tipett	71
9.2.4	Définition (à partir de la loi Gamma Inverse) de la loi de Fisher Tipett “opposée”	72
9.2.5	Convolution de lois de Fisher-Tipett : la loi z de Fisher	73
9.3	Les lois Meijer- z définies sur $\mathbb{R}$	74
A	Distribution de Mellin-Dirac	78
A.1	Analyse de l’intégrale de Barnes	78
A.2	Analyse générale	78
A.3	Recherche de $-\delta^{\mathcal{M}}$	80
B	Moyenne arithmétique	81
B.1	Somme de variables aléatoires suivant la même loi de distribution	81
B.2	Moyenne arithmétique de variables aléatoires suivant la même loi de distribution	81
B.3	Exemple de la loi normale	82
B.4	Exemple de la loi Gamma	83
C	Correspondances avec d’autres lois “classiques”	85
C.1	Prologomène	85
C.2	Diverses lois rencontrées dans la littérature	85
C.2.1	La distribution d’Amoroso	85
C.2.2	La loi Beta	86
C.2.3	La loi Beta Inverse	86
C.2.4	La loi Beta Généralisée	86
C.2.5	La distribution Beta Prime	86
C.2.6	Loi de Burr	87
C.2.7	Distribution Chi	87
C.2.8	Distribution Chi-2	87
C.2.9	Distribution de Dagum	87
C.2.10	Distribution d’Erlang	88
C.2.11	F-distribution	88
C.2.12	La loi de Fisher	89
C.2.13	La loi de Fisher Généralisée	89
C.2.14	La distribution de Fréchet	89
C.2.15	La loi Gamma	90
C.2.16	La loi Gamma Généralisée	90
C.2.17	La loi Gamma Inverse	90
C.2.18	La loi K	90
C.2.19	La loi K Inverse	90
C.2.20	La distribution de Kumaraswamy	91
C.2.21	La distribution de Lévy	91
C.2.22	La distribution Log-Logistique	91

C.2.23	La distribution de Maxwell	91
C.2.24	La loi de Nakagami	91
C.2.25	La loi de Nakagami Inverse	92
C.2.26	La distribution de Pareto-2	92
C.2.27	La distribution de Rayleigh	92
C.2.28	La distribution de Singh Maddala	92
C.2.29	La distribution “Student-t”	93
C.2.30	La loi de Weibull	93
C.3	Tableau récapitulatif des lois usuelles définies sur $\mathbb{R}^+$ et exprimées comme lois de Meijer	94

1 Introduction

Cornelis Simon Meijer propose en 1936 la définition des G-fonctions [2], qui se veulent être la forme la plus générale possible des intégrales de Barnes et qui peuvent être vues comme une généralisation des fonctions hypergéométriques. Elle sont définies dans le plan complexe sur un parcours $\mathcal{L}$ par la relation :

$$G_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)} x^s ds$$

Ce parcours $\mathcal{L}$ doit être bien évidemment précisé. Meijer propose trois types de parcours dans le plan complexe : deux qui sont constitués par des boucles dans le plan complexe, le troisième qui consiste en une droite du plan complexe parallèle à l'axe des ordonnées.

C'est ce troisième type de fonctions de Meijer qui fait l'objet de ce rapport. Les fonctions de Meijer de ce type, notées $\overline{G}_{p,q}^{m,n}$ dans ce document, sont définies par :

$$\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)} x^s ds$$

la valeur de c devant vérifier des conditions d'existence spécifiques.

Il est intéressant de remarquer que cette dernière expression s'apparente, comme nous le verrons, à une transformée de Mellin : une conséquence immédiate de cette propriété est que ces fonctions de Meijer $\overline{G}_{p,q}^{m,n}$ sont définies sur $\mathbb{R}^+$. Or il semble qu'il n'existe aucune trace écrite sur les liens entre les fonctions de Meijer et les approches de type Mellin : transformée de Mellin, convolution de Mellin, distribution de "Mellin-Dirac", . . . C'est pourquoi ce document a tout d'abord pour objectif de montrer comment les outils de type "transformée de Mellin" et "convolution de Mellin" apportent un éclairage nouveau à l'utilisation et l'interprétation des fonctions de Meijer. Outre les définitions de fonctions usuelles sous forme de fonction de Meijer, les aspects de dérivation et d'intégration seront abordés par le biais de la transformée de Mellin. Un paragraphe spécifique tentera de résumer l'essentiel sous forme de tableaux récapitulatifs (section 5).

Cette analyse nouvelle sera ensuite appliquée aux lois de probabilités définies sur $\mathbb{R}^+$ dans le cadre des **statistiques de Mellin**¹ : dans ce cadre, nous verrons qu'il est possible de définir les lois de Meijer à partir des fonctions de Meijer et montrerons comment elles sont bien adaptées à l'étude des lois définies sur $\mathbb{R}^+$ et plus particulièrement aux lois spécifiques à l'imagerie cohérente. En particulier, pratiquement toutes les lois de probabilités utilisées pour traiter le chatoiement et prenant en compte la notion de bruit multiplicatif s'expriment comme des lois de Meijer. De part les liens extrêmement étroits entre fonction de Meijer et transformée de Mellin, nous verrons que, même si l'expression des lois de Meijer est fondée sur les fonctions de Meijer (dont l'expression analytique explicite n'est pas triviale), les moments et les log-moments ont des expressions analytiques assez faciles à écrire et à comprendre, et simples à utiliser. Un dernier point intéressant des lois de Meijer est qu'il est alors possible, grâce aux propriétés des fonctions de Meijer, de trouver l'expression analytique de leur fonction de répartition (ce qui peut s'avérer utile en simulation).

Enfin nous montrerons comment les lois de Meijer apportent des solutions simples à trois problèmes ouverts : la détermination de la loi suivie par un produit ou un rapport de variables aléatoires suivant des lois de Meijer, et l'analyse de la moyenne géométrique de variables aléatoires suivant des lois de Meijer.

¹appelées originellement log-statistiques ou statistiques de deuxième espèce.

L'objectif de ce document est donc de proposer un cadre formel pour ce nouveau formalisme que sont les lois de Meijer. Ces dernières sont définies par un certain nombre de paramètres qui peuvent conditionner l'existence de ces lois. Précisons tout de suite que, pour alléger la lecture, ces conditions ne seront pratiquement jamais explicitées.

Un certain nombre de démonstrations (aboutissant parfois à des résultats identiques) sont donc proposées tout au long du document, qui est de ce fait assez rébarbatif. Aussi, pour permettre une relecture rapide, un paragraphe spécifique tentera de résumer l'essentiel des propriétés des fonctions de Meijer, principalement sous forme de tableaux récapitulatifs (section 5). Un tableau résumant les expressions analytiques des lois de Meijer fera l'objet du paragraphe 6.4. Enfin l'annexe C proposera une ménagerie² des lois usuelles converties en lois de Meijer.

Signalons que cette approche, issue principalement de travaux autour de l'imagerie cohérente (échographie médicale, sonar, radar à synthèse d'ouverture), pourrait apporter un nouvel éclairage à des problèmes actuels liés à la propagation des ondes puisque, par exemple, Vikas et al. ont récemment utilisé les fonctions de Meijer pour résoudre leur problème de fading [15].

2 Définitions et propriétés fondamentales

2.1 Définition des fonctions de Meijer définies sur $\mathbb{R}^+$

Soit la fonction de Meijer définie dans le plan complexe par l'intégrale de Barnes suivante :

$$\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)} x^s ds$$

En effectuant le changement de variable $s \rightarrow -s$, on obtient :

$$\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} x^{-s} ds \quad (1)$$

expression qui montre que la fonction $\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right)$ est la transformée de Mellin inverse de la fonction

$$\frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} \quad (2)$$

On retrouve ainsi la relation des tables de transformée de Mellin inverse du Bateman[3].

On a donc la relation fondamentale suivante définissant les fonctions de Meijer $\overline{G}_{p,q}^{m,n}$:

$$\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \mathcal{M}^{-1} \left[\frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} \right] \quad (3)$$

2.2 Notation des fonctions de Meijer

Dans ce document, nous proposons une légère modification typographique à la définition 1 pour en permettre une lecture plus aisée. La fonction $\overline{G}$ va être écrite en s'inspirant des notations des fonctions hypergéométriques (introduction du séparateur “;” entre a_n et a_{n+1} , et entre b_m et b_{m+1}) :

$$\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_n & ; & a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; & b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right)$$

²pour reprendre l'expression de Crooks [5]

La définition fondamentale de cette fonction s'écrit alors :

$$\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = \mathcal{M}^{-1} \left[\frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} \right]$$

La relation 2 nous donne alors la transformée de Mellin de $\overline{G}$:

$$\mathcal{M} \left[\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \right] = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} \quad (4)$$

Dans certains cas spécifiques ($n = 0$, $n = p$, $m = 0$, $m = q$), on placera dans le champ vide correspondant un simple point, ce qui donne par exemple :

$$\overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{cc} \cdot & ; \quad \cdot \\ 0 & ; \quad \cdot \end{array} \right. \right) \quad \overline{G}_{0,1}^{0,0} \left(x \left| \begin{array}{cc} \cdot & ; \quad \cdot \\ \cdot & ; \quad 0 \end{array} \right. \right) \quad \overline{G}_{1,0}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{cc} 0 & ; \quad \cdot \\ \cdot & ; \quad \cdot \end{array} \right. \right) \quad \overline{G}_{1,0}^{0,0} \left(x \left| \begin{array}{cc} \cdot & ; \quad 0 \\ \cdot & ; \quad \cdot \end{array} \right. \right)$$

2.3 Propriétés de base : réduction/augmentation du nombre de paramètres

A partir de la définition 4, on peut simplifier de manière triviale une fonction de Meijer

$$\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \text{ dans les deux cas suivants :}$$

- $\exists i \in [1, n], \exists j \in [m+1, q]$ tel que $a_i = b_j$. Dans ce cas, on peut supprimer simultanément le paramètre a_i et le paramètre b_j et on obtient une nouvelle fonction $\overline{G}_{p-1,q-1}^{m,n-1}$:

$$\begin{aligned} & \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_{j-1}, b_j, b_{j+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \\ &= \overline{G}_{p-1,q-1}^{m,n-1} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_{j-1}, b_{j+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

- $\exists i \in [n+1, p], \exists j \in [1, m]$ tel que $a_i = b_j$. Dans ce cas, on peut supprimer simultanément le paramètre a_i et le paramètre b_j et on obtient une nouvelle fonction $\overline{G}_{p-1,q-1}^{m-1,n}$:

$$\begin{aligned} & \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_{j-1}, b_j, b_{j+1}, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \\ &= \overline{G}_{p-1,q-1}^{m-1,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_{j-1}, b_{j+1}, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

De la même manière, on peut rajouter des paramètres égaux :

$$\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = \overline{G}_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n, c & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q, c \end{array} \right. \right)$$

$$\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = \overline{G}_{p+1,q+1}^{m+1,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p, c \\ b_1, \dots, b_m, c & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right)$$

Nous verrons que ces propriétés peuvent se formaliser à l'aide de Mellin-Diracs, c'est à dire de distributions jouant le rôle d'élément neutre pour la convolution de Mellin (paragraphe 2.6.1).

2.4 Relations fondamentales fondées sur la transformée de Mellin et la convolution de Mellin

2.4.1 Multiplication par la variable x

Directement à partir de la transformée de Mellin de la fonction de Meijer (équation 4), et connaissant les propriétés des transformées de Mellin (multiplication par une puissance de la variable), on montre une des relations fondamentales des fonctions de Meijer :

$$x^r \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_n; a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m; b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1 + r, \dots, a_n + r; a_{n+1} + r, \dots, a_p + r \\ b_1 + r, \dots, b_m + r; b_{m+1} + r, \dots, b_q + r \end{matrix} \right. \right) \quad (5)$$

2.4.2 Convolutions de Mellin de deux fonctions de Meijer

La transformée de Mellin d'une fonction de Meijer (relation 4) s'exprime comme un produit qui peut se scinder. Or on sait qu'un produit dans l'espace Mellin se traduit par une convolution de Mellin dans l'espace d'origine. On a alors :

$$\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_n; a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m; b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \overline{G}_{p',q'}^{m',n'} \left(x \left| \begin{matrix} a'_1, \dots, a'_{n'}; a'_{n'+1}, \dots, a'_{p'} \\ b'_1, \dots, b'_{m'}; b'_{m'+1}, \dots, b'_{q'} \end{matrix} \right. \right) \hat{\star} \overline{G}_{p'',q''}^{m'',n''} \left(x \left| \begin{matrix} a''_1, \dots, a''_{n''}; a''_{n''+1}, \dots, a''_{p''} \\ b''_1, \dots, b''_{m''}; b''_{m''+1}, \dots, b''_{q''} \end{matrix} \right. \right) \quad (6)$$

avec :

$$\begin{cases} n' + n'' = n \\ p' + p'' = p \\ m' + m'' = m \\ q' + q'' = q \end{cases}, \begin{cases} a'_i = a_i & \forall i \in [1; n'] \\ a'_{n'+i} = a_{n+i} & \forall i \in [1; p' - n'] \\ b'_i = b_i & \forall i \in [1; m'] \\ b'_{m'+i} = b_{m+i} & \forall i \in [1; q' - m'] \end{cases}, \begin{cases} a''_i = a_{n'+i} & \forall i \in [1; n''] \\ a''_{n''+i} = a_{n+p'-n'+1} & \forall i \in [1; p'' - n''] \\ b''_i = b_{m'+i} & \forall i \in [1; m''] \\ b''_{m''+i} = b_{m+q'-m'+i} & \forall i \in [1; q'' - m''] \end{cases}$$

Cette règle est très simple à appliquer. Par exemple, on a :

$$\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{matrix} a & ; & b \\ c & ; & d \end{matrix} \right. \right) \hat{\star} \overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{matrix} a' & ; & b' \\ c' & ; & d' \end{matrix} \right. \right) = \overline{G}_{4,4}^{2,2} \left(x \left| \begin{matrix} a, a' & ; & b, b' \\ c, c' & ; & d, d' \end{matrix} \right. \right)$$

De manière plus générale, on peut donc utiliser la relation suivante :

$$\begin{aligned} \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_n; a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m; b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \hat{\star} \overline{G}_{p',q'}^{m',n'} \left(x \left| \begin{matrix} a'_1, \dots, a'_{n'}; a'_{n'+1}, \dots, a'_{p'} \\ b'_1, \dots, b'_{m'}; b'_{m'+1}, \dots, b'_{q'} \end{matrix} \right. \right) \\ = \overline{G}_{p+p',q+q'}^{m+m',n+n'} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_{n'}; a_{n+1}, \dots, a_p, a'_{n'+1}, \dots, a'_{p'} \\ b_1, \dots, b_m, b'_1, \dots, b'_{m'}; b_{m+1}, \dots, b_q, b'_{m'+1}, \dots, b'_{q'} \end{matrix} \right. \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Ces deux nouvelles relations (6 et 7) exploitent de manière très simple le formalisme de la convolution de Mellin et montrent une fois de plus l'utilité des outils issus de la transformée de Mellin.

2.5 Propriété fondamentale de la fonction “inverse”

Soit une fonction $f(x)$ définie sur $\mathbb{R}^+$. On définit la fonction inverse $g(x)$ par la relation :

$$g(x) = \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) \quad (8)$$

cette définition ayant des propriétés utiles pour définir des lois de probabilités inverses puisque l'on a la propriété :

$$\int_0^\infty g(x)dx = \int_0^\infty f(x)dx$$

Les propriétés de la transformée de Mellin permettent alors de relier la transformée de Mellin de f avec la transformée de Mellin de g [11] :

$$\mathcal{M}[g](s) = \mathcal{M}[f](2-s)$$

Considérons une fonction $f(x)$ s'exprimant comme une fonction de Meijer :

$$f(x) = \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_n; a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m; b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right)$$

Sa transformée de Mellin s'écrit :

$$\mathcal{M}[f] = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)}$$

On en déduit la transformée de Mellin de $g(x)$:

$$\mathcal{M}[g] = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(2 + b_j - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(-1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(-1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(2 + a_j - s)}$$

Par simple identification, on peut alors écrire :

$$g(x) = \overline{G}_{q,p}^{n,m} \left(x \left| \begin{matrix} -b_1 - 1, \dots, -b_m - 1; -b_{m+1} - 1, \dots, -b_q - 1 \\ -a_1 - 1, \dots, -a_n - 1; -a_{n+1} - 1, \dots, -a_p - 1 \end{matrix} \right. \right) \quad (9)$$

On a ainsi démontré une relation spécifique aux fonctions de Meijer :

$$\frac{1}{x^2} \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(\frac{1}{x} \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_n; a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m; b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \overline{G}_{q,p}^{n,m} \left(x \left| \begin{matrix} -b_1 - 1, \dots, -b_m - 1; -b_{m+1} - 1, \dots, -b_q - 1 \\ -a_1 - 1, \dots, -a_n - 1; -a_{n+1} - 1, \dots, -a_p - 1 \end{matrix} \right. \right)$$

que l'on peut simplifier sous la forme :

$$\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(\frac{1}{x} \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_n; a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m; b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \overline{G}_{q,p}^{n,m} \left(x \left| \begin{matrix} -b_1 + 1, \dots, -b_m + 1; -b_{m+1} + 1, \dots, -b_q + 1 \\ -a_1 + 1, \dots, -a_n + 1; -a_{n+1} + 1, \dots, -a_p + 1 \end{matrix} \right. \right) \quad (10)$$

et que l'on ne trouve pas dans les ouvrages traditionnels (comme le Bateman).

2.6 Cas particuliers de fonctions de Meijer définies sur $\mathbb{R}^+$

2.6.1 Distribution “Mellin-Dirac” $\delta^{\mathcal{M}}$

La distribution “Mellin-Dirac” $\delta^{\mathcal{M}}$ vérifie pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ la relation[11] :

$$(f \star \delta^{\mathcal{M}})(u) = f(u)$$

Or on peut exprimer cette distribution de différentes manières sous forme d'une fonction de Meijer. Les démonstrations en sont proposées à l'annexe A. On a ainsi cinq expressions possibles

pour exprimer un Mellin-Dirac par une fonction de Meijer :

$$\overline{G}_{1,1}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{c} a ; \cdot \\ \cdot ; a \end{array} \right. \right) = \delta^{\mathcal{M}} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad (11)$$

$$\overline{G}_{1,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot ; b \\ b ; \cdot \end{array} \right. \right) = \delta^{\mathcal{M}} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad (12)$$

$$\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{c} a ; b \\ b ; a \end{array} \right. \right) = \delta^{\mathcal{M}} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad (13)$$

$$\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{c} c - r ; c \\ c - r ; c \end{array} \right. \right) = (-1)^r \delta^{\mathcal{M}} \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad \forall r \in \mathbb{Z} \quad (14)$$

$$\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{c} c ; c - r \\ c ; c - r \end{array} \right. \right) = (-1)^r \delta^{\mathcal{M}} \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad \forall r \in \mathbb{Z} \quad (15)$$

2.6.2 Exponentielle décroissante

Il est connu que l'exponentielle décroissante peut s'exprimer comme une fonction de Meijer :

$$e^{-x} = \overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot ; \cdot \\ 0 ; \cdot \end{array} \right. \right) \quad (16)$$

puisque sa transformée de Mellin donne une des définitions de la fonction Gamma :

$$\mathcal{M}[e^{-x}] = \Gamma(s).$$

Nous proposerons d'ailleurs une démonstration originale de cette relation fondamentale au paragraphe 3.5.1.

On en déduit de manière triviale la relation :

$$\overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot ; \cdot \\ 0 ; \cdot \end{array} \right. \right) = e^{-x} \quad (17)$$

ainsi que

$$\overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot ; \cdot \\ a ; \cdot \end{array} \right. \right) = x^a e^{-x}$$

2.6.3 Exponentielle décroissante “inverse”

Dans ce document nous définissons l'exponentielle décroissante inverse comme $e^{-\frac{1}{x}}$. On peut l'exprimer comme une fonction de Meijer :

$$e^{-\frac{1}{x}} = \overline{G}_{1,0}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{c} 1 ; \cdot \\ \cdot ; \cdot \end{array} \right. \right) \quad (18)$$

Nous proposerons une démonstration de cette relation au paragraphe 3.5.2.

On en déduit de manière triviale la relation :

$$\overline{G}_{1,0}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{c} 1 ; \cdot \\ \cdot ; \cdot \end{array} \right. \right) = e^{-\frac{1}{x}} \quad (19)$$

ainsi que la relation :

$$\overline{G}_{1,0}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{c} a ; \cdot \\ \cdot ; \cdot \end{array} \right. \right) = x^{a-1} e^{-\frac{1}{x}}$$

2.6.4 Fonction de Bessel modifiée de seconde espèce K

Si l'on effectue la convolution de Mellin de deux exponentielles décroissantes, en appliquant la relation 7, on obtient :

$$\overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ 0 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \star \overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ 0 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right) = \overline{G}_{0,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ 0,0 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right)$$

Le Bateman donne la relation générale suivante ([2], paragraphe 5.6, formule 4) :

$$\overline{G}_{0,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ a,b \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right) = 2 x^{\frac{a+b}{2}} K_{a-b} (2\sqrt{x}) \quad (20)$$

avec K la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce : celle ci peut donc s'écrire comme une fonction de Meijer. On retrouve donc le résultat précurseur d'Epstein comme un cas particulier ($a = 0, b = 0$) :

$$e^{-x} \star e^{-x} = 2K_0 (2\sqrt{x})$$

L'expression 20 peut aussi se déduire des tables de transformée de Mellin (par exemple [3], page 349, formule 17).

Par la suite, dans ce document, nous appellerons fonction $\mathcal{K}$ la fonction :

$$2 x^{\frac{a+b}{2}} K_{a-b} (2\sqrt{x}) = \overline{G}_{0,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ a,b \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right)$$

2.6.5 Fonction de Fisher

Soit la fonction :

$$\overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ a \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \star \overline{G}_{1,0}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{c} 1-b \\ \cdot \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right) = \overline{G}_{1,1}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{c} 1-b \\ a \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right)$$

Sa transformée de Mellin s'exprime donc sous la forme :

$$\Gamma(a+s) \Gamma(b-s)$$

et, à partir des tables de transformées de Mellin inverse (par exemple [3], page 349, formule 15), on retrouve la fonction suivante

$$f(x) = \Gamma(a+b) \frac{x^a}{(1+x)^{a+b}} \quad (21)$$

que nous appellerons dans ce document fonction de Fisher.

On a donc :

$$\overline{G}_{1,1}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{c} 1-b \\ a \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right) = \Gamma(a+b) \frac{x^a}{(1+x)^{a+b}} \quad (22)$$

expression qui n'est curieusement pas répertoriée dans le Bateman.

Si on utilise la relation 9, on a ainsi l'expression de la fonction de Fisher inverse :

$$\overline{G}_{1,1}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{c} -1-a \\ b-2 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right) = \overline{G}_{1,1}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{c} 1-(a+2) \\ b-2 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right)$$

qui est une fonction de Fisher (avec $b' = a+2$ et $a' = b-2$), ce que l'on peut facilement déduire de la définition de la fonction inverse (équation 8) et de la définition de la fonction de Fisher (équation 22). On a donc une propriété fondamentale des fonctions de Fisher pour lesquelles l'opération fonction inverse est une loi interne.

2.6.6 Fonction Beta et fonction Beta inverse

Soit la fonction :

$$\overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ a \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \right) \star \overline{G}_{1,0}^{0,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{c} b \\ \cdot \end{array} \right. \right) = \overline{G}_{1,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ a \end{array} ; \begin{array}{c} b \\ \cdot \end{array} \right. \right)$$

Sa transformée de Mellin s'exprime sous la forme :

$$\frac{\Gamma(a+s)}{\Gamma(b+s)}$$

et, à partir des tables de transformées de Mellin inverse (par exemple [3], page 349, formule 20), on retrouve la fonction suivante

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(b-a)} x^a (1-x)^{b-a-1} \quad x \in [0, 1] \quad (23)$$

que nous appellerons dans ce document fonction Beta.

On a donc :

$$\overline{G}_{1,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ a \end{array} ; \begin{array}{c} b \\ \cdot \end{array} \right. \right) = \frac{1}{\Gamma(b-a)} x^a (1-x)^{b-a-1} \quad x \in [0, 1] \quad (24)$$

Si on utilise la relation 9, on a ainsi l'expression de la fonction Beta inverse :

$$\overline{G}_{1,1}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{c} -1-a \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ -1-b \end{array} \right. \right) = \frac{1}{\Gamma(b-a)} x^{-b-1} (1-x)^{b-a-1} \quad x \in [1, \infty[$$

peu usitée et qui n'est pas répertoriée dans le Bateman.

2.6.7 Fonction de Whittaker

Le Bateman donne la relation générale suivante (paragraphe 5.6, formule 6) :

$$\overline{G}_{1,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ b, c \end{array} ; \begin{array}{c} a \\ \cdot \end{array} \right. \right) = x^{\frac{b+c-1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} W_{\frac{1+b+c}{2}-a, \frac{b-c}{2}}(x) \quad (25)$$

dont la transformée de Mellin s'écrit :

$$\frac{\Gamma(b+s) \Gamma(c+s)}{\Gamma(a+s)}$$

On peut aussi réécrire cette expression sous la forme :

$$x^a e^{-\frac{x}{2}} W_{b,c}(x) = \overline{G}_{1,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ a+c+\frac{1}{2}, a-c+\frac{1}{2} \end{array} ; \begin{array}{c} a-b+1 \\ \cdot \end{array} \right. \right) \quad (26)$$

Vu sous cet angle, la fonction de Whittaker généralise la fonction Beta.

2.6.8 Fonctions hypergéométrique

Ces fonctions ont une expression très simple puisque on trouve dans le Bateman la relation suivante ([2], 5.6, formule 1, et en prenant en compte l'errata signalé au début de l'ouvrage au paragraphe "ERRATA") :

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x) = \frac{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j)}{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j)} \overline{G}_{p,q+1}^{1,p} \left(-x \left| \begin{array}{c} 1-a_1, \dots, 1-a_p \\ 0 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ 1-b_1, \dots, 1-b_q \end{array} \right)$$

On a donc le résultat que toute fonction hypergéométrique s'exprime comme une fonction de Meijer. La réciproque est bien évidemment fautive : seules les fonctions de Meijer $\overline{G}_{p,q}^{m,n}$ avec $m = 1$ (et $q > 1$) et $n = p$, c'est à dire les fonctions de Meijer $\overline{G}_{n,q}^{1,n}$ sont des fonctions hypergéométriques³ (en fait, comme le suggère les formules 5 et 6 du paragraphe 5.3 du Bateman[2], on peut sous certaines conditions décomposer une fonction de Meijer en séries faisant intervenir comme coefficients des fonctions hypergéométriques).

Les cas particuliers suivants présentent un certain intérêt pour aborder les fonctions de répartition :

$${}_1F_1(a; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \overline{G}_{1,2}^{1,1} \left(-x \left| \begin{array}{c} 1-a \\ 0 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ 1-c \end{array} \right) \quad (27)$$

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \overline{G}_{2,2}^{1,2} \left(-x \left| \begin{array}{c} 1-a, 1-b \\ 0 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ 1-c \end{array} \right) \quad (28)$$

On en déduit les deux relations suivantes :

$$\overline{G}_{1,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{c} a \\ 0 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ c \end{array} \right) = \frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-c)} {}_1F_1(1-a; 1-c; -x) \quad (29)$$

$$\overline{G}_{2,2}^{1,2} \left(x \left| \begin{array}{c} a, b \\ 0 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ c \end{array} \right) = \frac{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}{\Gamma(1-c)} {}_2F_1(1-a, 1-b; 1-c; -x) \quad (30)$$

ainsi que le cas général :

$$\overline{G}_{n,q}^{1,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \\ 0 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ b_2, \dots, b_q \end{array} \right) = \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(1-a_j)}{\prod_{j=2}^q \Gamma(1-b_j)} {}_nF_{q-1}(1-a_1, \dots, 1-a_n; 1-b_2, \dots, 1-b_q; -x) \quad (31)$$

En utilisant la propriété 5, on en déduit :

$$\overline{G}_{n,q}^{1,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1 + r, \dots, a_n + r \\ r \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ b_2 + r, \dots, b_q + r \end{array} \right) = \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(1-a_j)}{\prod_{j=2}^q \Gamma(1-b_j)} x^r {}_nF_{q-1}(1-a_1, \dots, 1-a_n; 1-b_2, \dots, 1-b_q; -x) \quad (32)$$

³N'oublions pas que l'objectif de Meijer était de généraliser les fonctions hypergéométriques.

On peut réécrire cette expressions sous une forme plus aisée à manipuler :

$$\overline{G}_{n,q}^{1,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; & . \\ r & ; & b_2, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(r+1-a_j)}{\prod_{j=2}^q \Gamma(r+1-b_j)} x^r {}_nF_{q-1}(r+1-a_1, \dots, r+1-a_n; r+1-b_2, \dots, r+1-b_q; -x) \quad (33)$$

On en déduit deux cas utiles :

$$\begin{aligned} \overline{G}_{1,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{cc} a & ; & . \\ r & ; & c \end{array} \right. \right) &= \frac{\Gamma(r+1-a)}{\Gamma(r+1-c)} x^r {}_1F_1(r+1-a; r+1-c; -x) \\ \overline{G}_{2,2}^{1,2} \left(x \left| \begin{array}{cc} a, b & ; & . \\ r & ; & c \end{array} \right. \right) &= \frac{\Gamma(r+1-a) \Gamma(r+1-b)}{\Gamma(r+1-c)} x^r {}_2F_1(r+1-a, r+1-b; r+1-c; -x) \end{aligned} \quad (34)$$

Pour la fonction hypergéométrique ${}_2F_1$, on retrouve d'ailleurs cette expression directement dans le Bateman ([2], paragraphe 5.6, formule 34, et en tenant compte des pages d'errata) :

$$\overline{G}_{2,2}^{1,2} \left(x \left| \begin{array}{cc} -c_1, -c_2 & ; & . \\ a-1 & ; & -b \end{array} \right. \right) = \frac{\Gamma(a+c_1) \Gamma(a+c_2)}{\Gamma(a+b)} x^{a-1} {}_2F_1(a+c_1, a+c_2; a+b; -x)$$

2.7 Une nouvelle propriété de permutation des paramètres

Considérons l'expression 15 :

$$\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{cc} c; c-r & \\ c; c-r & \end{array} \right. \right) = (-1)^r \delta^{\mathcal{M}} \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad \forall r \in \mathbb{Z}$$

et soit une fonction de Meijer $\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} \dots a \dots & ; & \dots \\ \dots & ; & \dots b \dots \end{array} \right. \right)$ telle que $a-b \in \mathbb{Z}$. On a alors :

$$\begin{aligned} &\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} \dots a \dots & ; & \dots \\ \dots & ; & \dots b \dots \end{array} \right. \right) \\ &= \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} \dots a \dots & ; & \dots \\ \dots & ; & \dots b \dots \end{array} \right. \right) \hat{\star} (-1)^{b-a} \overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{cc} b; a & \\ b; a & \end{array} \right. \right) \\ &= (-1)^{b-a} \overline{G}_{p+2,q+2}^{m+1,n+1} \left(x \left| \begin{array}{cc} \dots a, b \dots & ; & \dots a \dots \\ \dots b \dots & ; & \dots a, b \dots \end{array} \right. \right) \\ &= (-1)^{b-a} \overline{G}_{p,q}^{m+1,n-1} \left(x \left| \begin{array}{cc} \dots & ; & \dots a \dots \\ \dots b \dots & ; & \dots \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

On voit donc que si $b-a \in \mathbb{Z}$, on peut permuter la position des paramètres a et b d'une diagonale à son anti-diagonale.

2.8 Programmation en Maple V13

La programmation des fonctions de Meijer est simplissime sous Maple V13 puisqu'il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} &\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; & a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; & b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \\ &= \text{MeijerG}([a_1, \dots, a_n], [a_{n+1}, \dots, a_p], [[b_1, \dots, b_m], [b_{m+1}, \dots, b_q]], x) \end{aligned}$$

3 Dérivation de fonctions de Meijer

3.1 Expressions générales

La dérivation des fonctions de Meijer n'est apparemment pas chose simple dans le cas général, en particulier si on prend comme point de départ l'équation différentielle que ces fonctions vérifient (formule 1 du paragraphe 5.4 du Bateman [2]). Il est plus efficace d'exploiter la formule (12) du paragraphe 5.3.1 du Bateman, valable pour toutes les fonctions de Meijer :

$$x \frac{d}{dx} G_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_n & ; & a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; & b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = G_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1 - 1, \dots, a_n & ; & a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; & b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \\ + (a_1 - 1) G_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_n & ; & a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; & b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \quad (35)$$

On peut bien évidemment réécrire cette expression sous la forme :

$$\frac{d}{dx} G_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_n & ; & a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; & b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \frac{1}{x} G_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1 - 1, \dots, a_n & ; & a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; & b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \\ + (a_1 - 1) \frac{1}{x} G_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_n & ; & a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; & b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \quad (36)$$

En utilisant la relation 5, on peut alors écrire pour les fonctions de Meijer $\overline{G}$ définies sur $\mathbb{R}^+$:

$$\frac{d}{dx} \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_n & ; & a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; & b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \\ \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1 - 2, a_2 - 1, \dots, a_n - 1 & ; & a_{n+1} - 1, \dots, a_p - 1 \\ b_1 - 1, b_2 - 1, \dots, b_m - 1 & ; & b_{m+1} - 1, \dots, b_q - 1 \end{matrix} \right. \right) \\ + (a_1 - 1) \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1 - 1, a_2 - 1, \dots, a_n - 1 & ; & a_{n+1} - 1, \dots, a_p - 1 \\ b_1 - 1, b_2 - 1, \dots, b_m - 1 & ; & b_{m+1} - 1, \dots, b_q - 1 \end{matrix} \right. \right) \quad (37)$$

3.2 Exemples

Dans certains cas particuliers, il est possible de trouver une expression apparemment plus simple à utiliser que celle issue des caractéristiques des fonctions de Meijer.

– Pour la fonction exponentielle décroissant, l'utilisation de la relation 17 permet d'écrire :

$$\frac{d}{dx} \overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{matrix} \cdot & ; & \cdot \\ 0 & ; & \cdot \end{matrix} \right. \right) = -\overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{matrix} \cdot & ; & \cdot \\ 0 & ; & \cdot \end{matrix} \right. \right)$$

– Pour la fonction $\overline{G}_{1,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{matrix} a & ; & \cdot \\ 0 & ; & b \end{matrix} \right. \right)$, la relation 29 montre qu'elle peut s'exprimer comme une fonction hypergéométrique ${}_1F_1$. Si on dérive cette fonction en utilisant la formule générale 37, on obtient :

$$\frac{d}{dx} \overline{G}_{1,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{matrix} a & ; & \cdot \\ 0 & ; & b \end{matrix} \right. \right) = \overline{G}_{1,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{matrix} a - 2 & ; & \cdot \\ -1 & ; & b - 1 \end{matrix} \right. \right) + (a - 1) \overline{G}_{1,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{matrix} a - 1 & ; & \cdot \\ -1 & ; & b - 1 \end{matrix} \right. \right)$$

D'autre part, la relation 29 montre qu'elle peut s'exprimer comme une fonction hypergéométrique ${}_1F_1$. on sait que :

$$\frac{d}{dx} {}_1F_1(a; b; x) = \frac{a}{b} {}_1F_1(a + 1; b + 1; x)$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \overline{G}_{1,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{c} a \quad ; \quad . \\ 0 \quad ; \quad b \end{array} \right. \right) &= -\frac{\Gamma(2-a)}{\Gamma(2-b)} {}_1F_1(2-a; 2-b; -x) \\ &= -\overline{G}_{1,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{c} a-1 \quad ; \quad . \\ 0 \quad ; \quad b-1 \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

expression plus simple que la précédente.

- Pour la fonction $\overline{G}_{2,2}^{1,2} \left(x \left| \begin{array}{c} a, b \quad ; \quad . \\ 0 \quad ; \quad c \end{array} \right. \right)$, la relation 30 montre qu'elle peut s'exprimer comme une fonction hypergéométrique ${}_2F_1$. Or on sait que :

$$\frac{d}{dx} {}_2F_1(a, b; c; x) = \frac{ab}{c} {}_2F_1(a+1, b+1; c+1; x)$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \overline{G}_{2,2}^{1,2} \left(x \left| \begin{array}{c} a, b \quad ; \quad . \\ 0 \quad ; \quad c \end{array} \right. \right) &= -\frac{\Gamma(2-a)\Gamma(2-b)}{\Gamma(2-c)} {}_2F_1(2-a, 2-b; 2-c; -x) \\ &= -\overline{G}_{2,2}^{1,2} \left(x \left| \begin{array}{c} a-1, b-1 \quad ; \quad . \\ 0 \quad ; \quad c-1 \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

- On pourrait aisément, à partir de la relation 31, généraliser ce résultat pour toute fonction de Meijer s'écrivant sous la forme

$$\overline{G}_{n,q}^{1,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1, a_2, \dots, a_n \quad ; \quad . \\ 0 \quad ; \quad b_2, \dots, b_q \end{array} \right. \right)$$

3.3 Nouvelles formulations de la dérivation

3.3.1 Cas général

La formule de la dérivation de fonctions de Meijer (expression 37) semble a priori lourde à appliquer car le terme de droite est une somme de deux fonctions de Meijer la première ayant un coefficient différent ($a'_1 = a_1 - 1$), la seconde identique. Or l'utilisation de la convolution de Mellin par des Mellin-Dirac astucieusement choisis permet d'alléger l'expression –le terme de droite étant alors égal à une seule fonction de Meijer–, au prix d'un accroissement d'indice dans la fonction de Meijer initiale.

Pour cela, considérons l'expression 37 : elle donne au paramètre a_1 un rôle clé puisque, dans le cas $a_1 = 1$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1 = 1, \dots, a_n \quad ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m \quad ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \\ = \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} -1, \dots, a_n - 1 \quad ; \quad a_{n+1} - 1, \dots, a_p - 1 \\ b_1 - 1, \dots, b_m - 1 \quad ; \quad b_{m+1} - 1, \dots, b_q - 1 \end{array} \right. \right) \end{aligned} \quad (38)$$

Ce résultat peut s'appliquer à toute fonction de Meijer, moyennant une convolution avec un Mellin-Dirac.

En effet, soit une fonction de Meijer $\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \quad ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m \quad ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right)$.

- En effectuant sur cette fonction une convolution de Mellin avec un Mellin-Dirac sous la forme 11 avec $a = 1$, c'est à dire $\overline{G}_{1,1}^{0,1} \left(x \left| \begin{matrix} 1 ; \cdot \\ \cdot ; 1 \end{matrix} \right. \right) = \delta^{\mathcal{M}}$, on obtient une autre expression de cette fonction de Meijer sous la forme $\overline{G}_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(x \left| \begin{matrix} 1, a_1, \dots, a_n & ; & a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; & 1, b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right)$. Puisque dans cette dernière expression on a $a_1 = 1$, on peut d'appliquer la formule 38, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx} \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_n & ; & a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; & b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \\
&= \frac{d}{dx} \overline{G}_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(x \left| \begin{matrix} 1, a_1, \dots, a_n & ; & a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; & 1, b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \\
&= \overline{G}_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(x \left| \begin{matrix} -1, a_1 - 1, \dots, a_n - 1 & ; & a_{n+1} - 1, \dots, a_p - 1 \\ b_1 - 1, \dots, b_m - 1 & ; & 0, b_{m+1} - 1, \dots, b_q - 1 \end{matrix} \right. \right)
\end{aligned} \tag{39}$$

- On peut aussi effectuer sur cette fonction une convolution de Mellin avec un Mellin-Dirac sous la forme 15 avec $c = 1$, c'est à dire $\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{matrix} 1; 0 \\ 1; 0 \end{matrix} \right. \right) = -\delta^{\mathcal{M}}$, on obtient une autre expression de cette fonction de Meijer sous la forme $-\overline{G}_{p+2,q+2}^{m+1,n+1} \left(x \left| \begin{matrix} 1, a_1, \dots, a_n & ; & 0, a_{n+1}, \dots, a_p \\ 1, b_1, \dots, b_m & ; & 0, b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right)$. Puisque dans cette dernière expression on a $a_1 = 1$, on peut d'appliquer la formule 38, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx} \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_n & ; & a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; & b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \\
&= -\frac{d}{dx} \overline{G}_{p+2,q+2}^{m+1,n+1} \left(x \left| \begin{matrix} 1, a_1, \dots, a_n & ; & 0, a_{n+1}, \dots, a_p \\ 1, b_1, \dots, b_m & ; & 0, b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \\
&= -\overline{G}_{p+2,q+2}^{m+1,n+1} \left(x \left| \begin{matrix} -1, a_1 - 1, \dots, a_n - 1 & ; & -1, a_{n+1} - 1, \dots, a_p - 1 \\ 0, b_1 - 1, \dots, b_m - 1 & ; & -1, b_{m+1} - 1, \dots, b_q - 1 \end{matrix} \right. \right)
\end{aligned}$$

et après simplification :

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx} \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_n & ; & a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; & b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \\
&= -\overline{G}_{p+1,q+1}^{m+1,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1 - 1, \dots, a_n - 1 & ; & -1, a_{n+1} - 1, \dots, a_p - 1 \\ 0, b_1 - 1, \dots, b_m - 1 & ; & b_{m+1} - 1, \dots, b_q - 1 \end{matrix} \right. \right)
\end{aligned} \tag{40}$$

Notons que ces deux expressions sont strictement équivalentes puisque :

- la convolution de l'expression 40 avec le Mellin-Dirac $\delta^{\mathcal{M}} = -\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{matrix} -1; 0 \\ -1; 0 \end{matrix} \right. \right)$ permet, après simplification, de retrouver l'expression 39.
- la convolution de l'expression 39 avec le Mellin-Dirac $\delta^{\mathcal{M}} = -\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{matrix} 0; -1 \\ 0; -1 \end{matrix} \right. \right)$ permet, après simplification, de retrouver l'expression 40.

On voit donc que, dans ce contexte des fonctions de Meijer $\overline{G}$ définies sur $\mathbb{R}^+$, la dérivée d'une fonction de Meijer $\overline{G}_{p,q}^{m,n}$ est une fonction de Meijer qui s'exprime soit sous la forme $\overline{G}_{p+1,q+1}^{m,n+1}$, soit sous la forme $\overline{G}_{p+1,q+1}^{m+1,n}$.

3.3.2 Cas particulier de fonction de Meijer $\overline{G}_{p,q}^{m,n} : a_1 = 1$ et $b_{m+1} = 0$

Soit une fonction de Meijer $\overline{G}_{p,q}^{m,n}$ telle que $a_1 = 1$. On applique alors la relation 38 :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1 = 1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1} = 0, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \\ &= \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} -1, \dots, a_n - 1 & ; \quad a_{n+1} - 1, \dots, a_p - 1 \\ b_1 - 1, \dots, b_m - 1 & ; \quad -1, \dots, b_q - 1 \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

Cette dernière expression peut se simplifier puisque l'on reconnaît un Mellin-Dirac $\delta^{\mathcal{M}} = \overline{G}_{1,1}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{c} -1; . \\ .; -1 \end{array} \right. \right)$. On a finalement :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1 = 1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1} = 0, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \\ &= \overline{G}_{p-1,q-1}^{m,n-1} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_2 - 1, \dots, a_n - 1 & ; \quad a_{n+1} - 1, \dots, a_p - 1 \\ b_1 - 1, \dots, b_m - 1 & ; \quad b_{m+2} - 1, \dots, b_q - 1 \end{array} \right. \right) \end{aligned} \quad (41)$$

3.3.3 Cas particulier de fonction de Meijer $\overline{G}_{p,q}^{m,n} : a_{n+1} = 1$ et $b_1 = 0$

En utilisant le Mellin-Dirac $\delta^{\mathcal{M}} = -\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{c} 1; 0 \\ 1; 0 \end{array} \right. \right)$, il est facile de déduire de la précédente relation une expression spécifique au cas $a_{n+1} = 1$ et $b_1 = 0$:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1} = 1, \dots, a_p \\ b_1 = 0, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \\ &= -\overline{G}_{p-1,q-1}^{m,n-1} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1 - 1, \dots, a_n - 1 & ; \quad a_{n+2} - 1, \dots, a_p - 1 \\ b_2 - 1, \dots, b_m - 1 & ; \quad b_{m+1} - 1, \dots, b_q - 1 \end{array} \right. \right) \end{aligned} \quad (42)$$

3.3.4 Cas particulier : $b_1 = 0$

Si on est dans un cas particulier tel que l'un des coefficients $b_i, i \in [1; p]$ soit égal à 0, il est toujours possible de regrouper les indices de sorte que $b_1 = 0$, ce qui donne la fonction de Meijer $\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ 0, b_2, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right)$. On peut alors introduire un Mellin-Dirac sous la forme 13 avec $a = 1$, c'est à dire $\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{c} 1; 1 \\ 1; 1 \end{array} \right. \right) = \delta^{\mathcal{M}}$, la fonction de Meijer initiale s'écrit alors $\overline{G}_{p+2,q+2}^{m+1,n+1} \left(x \left| \begin{array}{cc} 1, a_1, \dots, a_n & ; \quad 1, a_{n+1}, \dots, a_p \\ 0, 1, b_2, \dots, b_m & ; \quad 1, b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right)$.

En appliquant la formule 37, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ 0, b_2, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \\ &= \frac{d}{dx} \overline{G}_{p+1,q+1}^{m+1,n+1} \left(x \left| \begin{array}{cc} 1, a_1, \dots, a_n & ; \quad 1, a_{n+1}, \dots, a_p \\ 1, 0, b_2, \dots, b_m & ; \quad 1, b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \\ &= \overline{G}_{p+1,q+1}^{m+1,n+1} \left(x \left| \begin{array}{cc} -1, a_1 - 1, \dots, a_n - 1 & ; \quad 0, a_{n+1} - 1, \dots, a_p - 1 \\ 0, -1, b_2 - 1, \dots, b_m - 1 & ; \quad 0, b_{m+1} - 1, \dots, b_q - 1 \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

Cette dernière expression peut se simplifier en utilisant un Mellin-Dirac sous la forme 14 avec $c = 0$, c'est à dire $\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{smallmatrix} -1; 0 \\ -1; 0 \end{smallmatrix} \right. \right) = -\delta^{\mathcal{M}}$. On a alors le résultat final :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{smallmatrix} a_1, \dots, a_n & ; & a_{n+1}, \dots, a_p \\ 0, b_2, \dots, b_m & ; & b_{m+1}, \dots, b_q \end{smallmatrix} \right. \right) \\ &= -\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{smallmatrix} a_1 - 1, \dots, a_n - 1 & ; & a_{n+1} - 1, \dots, a_p - 1 \\ 0, b_2 - 1, \dots, b_m - 1 & ; & b_{m+1} - 1, \dots, b_q - 1 \end{smallmatrix} \right. \right) \end{aligned} \quad (43)$$

On voit donc que la dérivée d'une fonction de Meijer $\overline{G}_{p,q}^{m,n}$ avec $b_1 = 0$ est une fonction de Meijer $\overline{G}_{p,q}^{m,n}$ avec $b_1 = 0$.

3.4 Autre formulation de la dérivation : utilisation de la transformée de Mellin

Soit une fonction de Meijer s'exprimant comme transformée inverse de Mellin (relation 2) :

$$\mathcal{M} \left[\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{smallmatrix} a_1, \dots, a_n & ; & a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; & b_{m+1}, \dots, b_q \end{smallmatrix} \right. \right) \right] (s) = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)}$$

Pour en connaître la dérivée, il suffit d'utiliser la relation fondamentale liant la transformée de Mellin d'une fonction et la transformée de Mellin de sa dérivée :

$$\mathcal{M} [f'(u)] (s) = -(s-1) \mathcal{M} [f(u)] (s-1)$$

Etant donnée l'expression de la transformée de Mellin des fonctions de Meijer, on a :

$$\begin{aligned} & \mathcal{M} \left[\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{smallmatrix} a_1, \dots, a_n & ; & a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; & b_{m+1}, \dots, b_q \end{smallmatrix} \right. \right) \right] (s-1) \\ &= \mathcal{M} \left[\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{smallmatrix} a_1 - 1, \dots, a_n - 1 & ; & a_{n+1} - 1, \dots, a_p - 1 \\ b_1 - 1, \dots, b_m - 1 & ; & b_{m+1} - 1, \dots, b_q - 1 \end{smallmatrix} \right. \right) \right] (s) \end{aligned}$$

– D'autre part, on peut écrire :

$$s-1 = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-1)} = \overline{G}_{1,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{smallmatrix} \cdot & ; & -1 \\ 0 & ; & \cdot \end{smallmatrix} \right. \right)$$

Ceci conduit aux égalités suivantes :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{smallmatrix} a_1, \dots, a_n & ; & a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; & b_{m+1}, \dots, b_q \end{smallmatrix} \right. \right) \\ &= -\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{smallmatrix} a_1 - 1, \dots, a_n - 1 & ; & a_{n+1} - 1, \dots, a_p - 1 \\ b_1 - 1, \dots, b_m - 1 & ; & b_{m+1} - 1, \dots, b_q - 1 \end{smallmatrix} \right. \right) \star \overline{G}_{1,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{smallmatrix} \cdot & ; & -1 \\ 0 & ; & \cdot \end{smallmatrix} \right. \right) \\ &= -\overline{G}_{p+1,q+1}^{m+1,n} \left(x \left| \begin{smallmatrix} a_1 - 1, \dots, a_n - 1 & ; & -1, a_{n+1} - 1, \dots, a_p - 1 \\ 0, b_1 - 1, \dots, b_m - 1 & ; & b_{m+1} - 1, \dots, b_q - 1 \end{smallmatrix} \right. \right) \end{aligned} \quad (44)$$

On reconnaît l'expression 40 précédemment démontrée dans le cadre général de la dérivation des fonctions de Meijer. En effectuant une convolution de cette dernière expression avec un Mellin-Dirac de la forme 14 avec $c = 0$, c'est à dire $\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{smallmatrix} -1; 0 \\ -1; 0 \end{smallmatrix} \right. \right) = -\delta^{\mathcal{M}}$ et après

simplifications, on a alors le résultat final :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \\ &= \overline{G}_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(x \left| \begin{array}{cc} -1, a_1 - 1, \dots, a_n - 1 & ; \quad a_{n+1} - 1, \dots, a_p - 1 \\ b_1 - 1, \dots, b_m - 1 & ; \quad 0, b_{m+1} - 1, \dots, b_q - 1 \end{array} \right. \right) \end{aligned} \quad (45)$$

On reconnaît dans cette dernière expression la relation 39 précédemment démontrée dans le cas général.

– On peut aussi écrire :

$$s - 1 = -\frac{\Gamma(2-s)}{\Gamma(1-s)} = -\overline{G}_{1,1}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{cc} -1 & ; \quad . \\ . & ; \quad 0 \end{array} \right. \right)$$

Ceci conduit aux égalités suivantes :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \\ &= \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1 - 1, \dots, a_n - 1 & ; \quad a_{n+1} - 1, \dots, a_p - 1 \\ b_1 - 1, \dots, b_m - 1 & ; \quad b_{m+1} - 1, \dots, b_q - 1 \end{array} \right. \right) \star \overline{G}_{1,1}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{cc} -1 & ; \quad . \\ . & ; \quad 0 \end{array} \right. \right) \\ &= \overline{G}_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(x \left| \begin{array}{cc} -1, a_1 - 1, \dots, a_n - 1 & ; \quad a_{n+1} - 1, \dots, a_p - 1 \\ b_1 - 1, \dots, b_m - 1 & ; \quad 0, b_{m+1} - 1, \dots, b_q - 1 \end{array} \right. \right) \end{aligned} \quad (46)$$

On reconnaît dans cette dernière expression la relation 39 précédemment démontrée dans le cas général. On peut aisément en déduire l'expression 40

Une jonglerie algébrique peut aussi se mener à partir de l'expression 39 :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \\ &= -\overline{G}_{p+1,q+1}^{m+1,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1 - 1, \dots, a_n - 1 & ; \quad -1, a_{n+1} - 1, \dots, a_p - 1 \\ 0, b_1 - 1, \dots, b_m - 1 & ; \quad b_{m+1} - 1, \dots, b_q - 1 \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

puisque l'on remarque que le premier coefficient "b" est égal à 0. Or nous avons vu que si une fonction de Meijer avait un coefficient "b" égal à 0, on avait une relation spécifique pour la dérivation (relation 43) :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ 0, b_2, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \\ &= -\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1 - 1, \dots, a_n - 1 & ; \quad a_{n+1} - 1, \dots, a_p - 1 \\ 0, b_2 - 1, \dots, b_m - 1 & ; \quad b_{m+1} - 1, \dots, b_q - 1 \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

Pour permettre une analogie facile avec l'expression 39, on réécrit cette dernière équation sous la forme :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \overline{G}_{p+1,q+1}^{m+1,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad 0, a_{n+1}, \dots, a_p \\ 0, b_1, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \\ &= -\overline{G}_{p+1,q+1}^{m+1,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1 - 1, \dots, a_n - 1 & ; \quad -1, a_{n+1} - 1, \dots, a_p - 1 \\ 0, b_1 - 1, \dots, b_m - 1 & ; \quad b_{m+1} - 1, \dots, b_q - 1 \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

Sachant que $\overline{G}_{1,1}^{0,1} \left(x \left| \begin{smallmatrix} \cdot; 0 \\ 0; \cdot \end{smallmatrix} \right. \right) = \delta^{\mathcal{M}}$, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \overline{G}_{p+1,q+1}^{m+1,n} \left(x \left| \begin{smallmatrix} a_1, \dots, a_n & ; & 0, a_{n+1}, \dots, a_p \\ 0, b_1, \dots, b_m & ; & b_{m+1}, \dots, b_q \end{smallmatrix} \right. \right) \\ &= \frac{d}{dx} \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{smallmatrix} a_1, \dots, a_n & ; & a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; & b_{m+1}, \dots, b_q \end{smallmatrix} \right. \right) \end{aligned}$$

On voit sur cet exemple que l'on peut opérer de diverses manières une dérivation sur une fonction de Meijer, mais que le résultat est bien évidemment le même.

3.5 Exemples de dérivation de fonctions de Meijer

3.5.1 Exponentielle décroissante

Nous allons maintenant démontrer, d'une manière inédite, que :

$$\overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{smallmatrix} \cdot; \cdot \\ 0; \cdot \end{smallmatrix} \right. \right) = e^{-x}$$

Pour cela, écrivons :

$$\overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{smallmatrix} \cdot; \cdot \\ 0; \cdot \end{smallmatrix} \right. \right) = \overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{smallmatrix} \cdot; \cdot \\ 0; \cdot \end{smallmatrix} \right. \right) \star \delta^{\mathcal{M}}$$

et choisissons $\delta^{\mathcal{M}} = \overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{smallmatrix} 1; 1 \\ 1; 1 \end{smallmatrix} \right. \right)$. On obtient alors la fonction de Meijer suivante :

$$f(x) = \overline{G}_{2,3}^{2,1} \left(x \left| \begin{smallmatrix} 1 & ; & 1 \\ 1, 0 & ; & 1 \end{smallmatrix} \right. \right)$$

Dérivons la fonction $f(x)$ en utilisant la relation 37 (c'est le cas "favorable" $a_1 = 1$). On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x) &= \overline{G}_{2,3}^{2,1} \left(x \left| \begin{smallmatrix} -1 & ; & 0 \\ 0, -1 & ; & 0 \end{smallmatrix} \right. \right) \\ &= \overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{smallmatrix} \cdot; \cdot \\ 0; \cdot \end{smallmatrix} \right. \right) \star \overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{smallmatrix} -1; 0 \\ -1; 0 \end{smallmatrix} \right. \right) \end{aligned}$$

Or la relation 14 permet d'écrire :

$$\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{smallmatrix} -1; 0 \\ -1; 0 \end{smallmatrix} \right. \right) = -\delta^{\mathcal{M}}$$

On a donc :

$$\frac{d}{dx} \overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{smallmatrix} \cdot; \cdot \\ 0; \cdot \end{smallmatrix} \right. \right) = -\overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{smallmatrix} \cdot; \cdot \\ 0; \cdot \end{smallmatrix} \right. \right)$$

qui est l'équation différentielle vérifiée par l'exponentielle décroissante (et que l'on aurait retrouvé directement en appliquant la relation générale 43). CQFD.

Le cas plus général de la fonction $x^a e^{-x} = \overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{smallmatrix} \cdot; \cdot \\ a; \cdot \end{smallmatrix} \right. \right)$ n'a curieusement pas une forme aussi simple. On peut obtenir en appliquant directement la relation 39 :

$$\frac{d}{dx} \overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{smallmatrix} \cdot; \cdot \\ a; \cdot \end{smallmatrix} \right. \right) = \overline{G}_{1,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{smallmatrix} -1; \cdot \\ a-1; 0 \end{smallmatrix} \right. \right)$$

Cette dernière expression peut se réécrire comme une fonction hypergéométrique ${}_1F_1$ (relation 34) :

$$\overline{G}_{1,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{c} -1; \cdot \\ a-1; 0 \end{array} \right. \right) = ax_1^{a-1} F_1(a+1; a; -x)$$

On peut aussi appliquer la relation 40, ce qui donne :

$$\frac{d}{dx} \overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot; \cdot \\ a; \cdot \end{array} \right. \right) = -\overline{G}_{1,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \quad \cdot \\ 0, a-1 \quad \cdot \end{array} \right. \right)$$

Si dans les deux cas, on obtient une unique fonction de Meijer comme dérivée, elle a une forme plus complexes (3 paramètres au lieu de 1 paramètre). Le résultat est néanmoins plus simple puisqu'il fait apparaître une unique fonction (une fonction de Meijer a toujours une expression de sa dérivée sous la forme d'une fonction de Meijer) alors que le résultat classique fait apparaître une somme :

$$\frac{d}{dx} x^a e^{-x} = (a x^{a-1} - x^a) e^{-x}$$

3.5.2 Exponentielle décroissante “inverse”

Nous allons maintenant considérer les fonctions de Meijer du type $\overline{G}_{1,0}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{c} a \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \end{array} \right. \right)$.

Considérons d'abord le cas $a = 1$, et donc la fonction $f(x) = \overline{G}_{1,0}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{c} 1 \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \end{array} \right. \right)$. Dérivons cette fonction $f(x)$ en utilisant la relation 37 (c'est le cas “favorable” $a_1 = 1$). On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x) &= \overline{G}_{1,0}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{c} -1 \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \end{array} \right. \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \overline{G}_{1,0}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{c} 1 \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \end{array} \right. \right) \\ &= \frac{1}{x^2} f(x) \end{aligned}$$

C'est l'équation différentielle vérifiée par l'exponentielle décroissante inverse $e^{-\frac{1}{x}}$. On a donc démontré que :

$$\overline{G}_{1,0}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{c} 1 \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \end{array} \right. \right) = e^{-\frac{1}{x}}$$

et que, de manière plus générale :

$$\overline{G}_{1,0}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{c} a \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \end{array} \right. \right) = x^{a-1} e^{-\frac{1}{x}}$$

Considérons la dérivée de cette dernière fonction :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^{a-1} e^{-\frac{1}{x}} &= \frac{d}{dx} \overline{G}_{1,0}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{c} a \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \end{array} \right. \right) \\ &= \overline{G}_{2,1}^{0,2} \left(x \left| \begin{array}{c} -1, a-1 \quad \cdot \\ \cdot \quad 0 \end{array} \right. \right) \\ &= -\overline{G}_{2,1}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{c} a-1 \quad -1 \\ 0 \quad \cdot \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

3.5.3 Dérivation des fonctions de Bessel modifiées de seconde espère $\mathcal{K}$

Nous avons vu au paragraphe 2.6.4 la relation :

$$\overline{G}_{0,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ a, b \end{array} \right. \begin{array}{c} ; \cdot \\ ; \cdot \end{array} \right) = 2 x^{\frac{a+b}{2}} K_{a-b}(2\sqrt{x})$$

avec K fonction de Bessel modifiée de seconde espèce, et que nous appelons dans ce document fonction $\mathcal{K}$.

En utilisant la relation 39, on obtient :

$$\frac{d}{dx} \overline{G}_{0,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ a, b \end{array} \right. \begin{array}{c} ; \cdot \\ ; \cdot \end{array} \right) = \overline{G}_{1,3}^{2,1} \left(x \left| \begin{array}{c} -1 \\ a-1, b-1 \end{array} \right. \begin{array}{c} ; \cdot \\ ; 0 \end{array} \right)$$

et en utilisant la relation 40, on obtient :

$$\frac{d}{dx} \overline{G}_{0,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ a, b \end{array} \right. \begin{array}{c} ; \cdot \\ ; \cdot \end{array} \right) = -\overline{G}_{1,3}^{3,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ a-1, b-1, -1 \end{array} \right. \begin{array}{c} ; 0 \\ ; \cdot \end{array} \right)$$

3.5.4 Dérivation des fonctions de Fisher

Nous avons défini au paragraphe 2.6.5 la fonction de Fisher (relation 22) :

$$\overline{G}_{1,1}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{c} 1-b \\ a \end{array} \right. \begin{array}{c} ; \cdot \\ ; \cdot \end{array} \right) = \Gamma(a+b) \frac{x^a}{(1+x)^{a+b}}$$

En utilisant la relation 39, on obtient :

$$\frac{d}{dx} \overline{G}_{1,1}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{c} 1-b \\ a \end{array} \right. \begin{array}{c} ; \cdot \\ ; \cdot \end{array} \right) = \overline{G}_{2,2}^{1,2} \left(x \left| \begin{array}{c} -1, b \\ a-1 \end{array} \right. \begin{array}{c} ; \cdot \\ ; 0 \end{array} \right)$$

Cette dernière expression peut se réécrire sous forme d'une équation hypergéométrique puisque :

$$\overline{G}_{2,2}^{1,2} \left(x \left| \begin{array}{c} -1, b \\ a-1 \end{array} \right. \begin{array}{c} ; \cdot \\ ; 0 \end{array} \right) = a\Gamma(a-b) {}_2F_1(a+1, a-b; a; -x)$$

En utilisant la relation 40, on obtient :

$$\frac{d}{dx} \overline{G}_{1,1}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{c} 1-b \\ a \end{array} \right. \begin{array}{c} ; \cdot \\ ; \cdot \end{array} \right) = -\overline{G}_{2,2}^{2,1} \left(x \left| \begin{array}{c} -b \\ 0, a-1 \end{array} \right. \begin{array}{c} ; -1 \\ ; \cdot \end{array} \right)$$

3.5.5 Dérivation des fonctions Beta

Nous avons défini au paragraphe 2.6.6 la fonction Beta par l'expression 23 :

$$\overline{G}_{1,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ a \end{array} \right. \begin{array}{c} ; b \\ ; \cdot \end{array} \right) = \frac{1}{\Gamma(b-a)} x^a (1-x)^b \quad x \in [0, 1]$$

En utilisant la relation 39, on obtient :

$$\frac{d}{dx} \overline{G}_{1,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ a \end{array} \right. \begin{array}{c} ; b \\ ; \cdot \end{array} \right) = \overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{c} -1 \\ a-1 \end{array} \right. \begin{array}{c} ; b-1 \\ ; 0 \end{array} \right)$$

En utilisant la relation 40, on obtient :

$$\frac{d}{dx} \overline{G}_{1,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ a \end{array} \right. \begin{array}{c} ; b \\ ; \cdot \end{array} \right) = -\overline{G}_{2,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ 0, a-1 \end{array} \right. \begin{array}{c} ; -1, b-1 \\ ; \cdot \end{array} \right)$$

3.5.6 Dérivation des fonctions de Whittaker

Nous avons défini au paragraphe 2.6.7 la fonction de Whittaker par l'expression 25 :

$$\overline{G}_{1,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ b, c \end{array} ; \begin{array}{c} a \\ \cdot \end{array} \right. \right) = x^{\frac{b+c-1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} W_{\frac{1+b+c}{2}-a, \frac{b-c}{2}}(x)$$

En utilisant la relation 39, on obtient :

$$\frac{d}{dx} \overline{G}_{1,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ b, c \end{array} ; \begin{array}{c} a \\ \cdot \end{array} \right. \right) = \overline{G}_{2,3}^{2,1} \left(x \left| \begin{array}{c} -1 \\ b-1, c-1 \end{array} ; \begin{array}{c} a-1 \\ 0 \end{array} \right. \right)$$

En utilisant la relation 40, on obtient :

$$\frac{d}{dx} \overline{G}_{1,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ b, c \end{array} ; \begin{array}{c} a \\ \cdot \end{array} \right. \right) = -\overline{G}_{2,3}^{3,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ 0, b-1, c-1 \end{array} ; \begin{array}{c} -1, a-1 \\ \cdot \end{array} \right. \right)$$

3.5.7 Dérivation des fonctions hypergéométriques : cas ${}_1F_1$

Considérons la relation entre les fonctions hypergéométriques ${}_1F_1$ et les fonctions de Meijer. On a :

$${}_1F_1(a; b; x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \overline{G}_{1,2}^{1,1} \left(-x \left| \begin{array}{c} 1-a \\ 0 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ 1-b \end{array} \right. \right)$$

On dérive cette expression en utilisant la relation 39. On a alors :

$$\frac{d}{dx} {}_1F_1(a; b; x) = -\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \overline{G}_{2,3}^{1,2} \left(-x \left| \begin{array}{c} -1, -a \\ -1 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ -b, 0 \end{array} \right. \right)$$

On effectue alors une convolution de Mellin avec un Mellin-Dirac sous la forme 12 avec $b = 0$, c'est à dire $\overline{G}_{1,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot; 0 \\ 0; \cdot \end{array} \right. \right)$, ce qui donne

$$\frac{d}{dx} {}_1F_1(a; b; x) = -\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \overline{G}_{3,4}^{2,2} \left(-x \left| \begin{array}{c} -1, -a \\ -1, 0 \end{array} ; \begin{array}{c} 0 \\ -b, 0 \end{array} \right. \right)$$

expression dans laquelle on reconnaît un Mellin-Dirac sous la forme 14 avec $c = 0$, c'est à dire $-\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{c} -1; 0 \\ -1; 0 \end{array} \right. \right)$. On peut donc simplifier l'expression et obtenir finalement la relation suivante :

$$\frac{d}{dx} {}_1F_1(a; b; x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \overline{G}_{1,2}^{1,1} \left(-x \left| \begin{array}{c} -a \\ 0 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ -b \end{array} \right. \right)$$

et l'on reconnaît dans le terme de droite une fonction hypergéométrique ${}_1F_1$. On en déduit de manière triviale :

$$\frac{d}{dx} {}_1F_1(a; b; x) = \frac{a}{b} {}_1F_1(a+1; b+1; x)$$

qui est une des relations fondamentales des fonctions hypergéométriques.

3.5.8 Dérivation des fonctions hypergéométriques : cas général

Cette démarche peut se généraliser aux fonctions hypergéométriques ${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x)$. On part de la relation fondamentale :

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x) = \frac{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j)}{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j)} \overline{G}_{p,q+1}^{1,p} \left(-x \left| \begin{array}{c} 1-a_1, \dots, 1-a_p \\ 0 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ 1-b_1, \dots, 1-b_q \end{array} \right)$$

que l'on dérive en utilisant la relation 39. On a alors :

$$\frac{d}{dx} {}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x) = -\frac{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j)}{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j)} \overline{G}_{p+1,q+2}^{1,p+1} \left(-x \left| \begin{array}{c} -1, -a_1, \dots, -a_p \\ -1 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ -b_1, \dots, -b_q, 0 \end{array} \right)$$

On effectue alors une convolution de Mellin avec le Mellin-Dirac $\overline{G}_{1,1}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot; 0 \\ 0; \cdot \end{array} \right. \right)$, ce qui donne

$$\frac{d}{dx} {}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x) = -\frac{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j)}{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j)} \overline{G}_{p+2,q+3}^{2,p+1} \left(-x \left| \begin{array}{c} -1, -a_1, \dots, -a_p \\ -1, 0 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} 0 \\ -b_1, \dots, -b_q, 0 \end{array} \right)$$

expression dans laquelle on reconnaît un Mellin-Dirac de la forme : $-\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{c} -1; 0 \\ -1; 0 \end{array} \right. \right)$. On peut donc simplifier l'expression et obtenir finalement la relation suivante :

$$\frac{d}{dx} {}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x) = \frac{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j)}{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j)} \overline{G}_{p,q+1}^{1,p} \left(-x \left| \begin{array}{c} -a_1, \dots, -a_p \\ 0 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ -b_1, \dots, -b_q \end{array} \right)$$

le terme de gauche pouvant s'exprimer sous la forme d'une fonction hypergéométrique ${}_pF_q$ (on retrouve en fait l'expression générale 43).

Finalement, on peut écrire :

$$\frac{d}{dx} {}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x) = \frac{\prod_{j=1}^q a_j}{\prod_{j=1}^p b_j} {}_pF_q(a_1 + 1, \dots, a_p + 1; b_1 + 1, \dots, b_q + 1; x)$$

En particulier, on retrouve l'expression connue :

$$\frac{d}{dx} {}_2F_1(a, b; c; x) = \frac{ab}{c} {}_2F_1(a + 1, b + 1; c + 1; x)$$

4 Intégration des fonctions de Meijer

4.1 Première expression de la primitive d'une fonction de Meijer

La première formulation de la dérivation d'une fonction de Meijer est donc (relation 39) :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} \right. ; \begin{array}{c} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right) \\ &= \overline{G}_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(x \left| \begin{array}{c} -1, a_1 - 1, \dots, a_n - 1 \\ b_1 - 1, \dots, b_m - 1 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} a_{n+1} - 1, \dots, a_p - 1 \\ 0, b_{m+1} - 1, \dots, b_q - 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

que l'on peut réécrire :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1 + 1, \dots, a_n + 1 \\ b_1 + 1, \dots, b_m + 1 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} a_{n+1} + 1, \dots, a_p + 1 \\ b_{m+1} + 1, \dots, b_q + 1 \end{array} \right) \\ &= \overline{G}_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(x \left| \begin{array}{c} -1, a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} \right. ; \begin{array}{c} a_{n+1}, \dots, a_p \\ 0, b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right) \end{aligned}$$

Considérons donc la fonction de Meijer $\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_n & ; & a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; & b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right)$. Par convolution de Mellin avec le Mellin-Dirac $-\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{matrix} -1; 0 \\ -1; 0 \end{matrix} \right. \right)$, L'expression précédente permet d'écrire :

$$\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_n & ; & a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; & b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = -\overline{G}_{p+2,q+2}^{m+1,n+1} \left(x \left| \begin{matrix} -1, a_1, \dots, a_n & ; & 0, a_{n+1}, \dots, a_p \\ -1, b_1, \dots, b_m & ; & 0, b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right)$$

Or il est facile de montrer que :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \overline{G}_{p+1,q+1}^{m+1,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1 + 1, \dots, a_n + 1 & ; & 1, a_{n+1} + 1, \dots, a_p + 1 \\ 0, b_1 + 1, \dots, b_m + 1 & ; & b_{m+1} + 1, \dots, b_q + 1 \end{matrix} \right. \right) \\ &= \overline{G}_{p+2,q+2}^{m+1,n+1} \left(x \left| \begin{matrix} -1, a_1, \dots, a_n & ; & 0, a_{n+1}, \dots, a_p \\ -1, b_1, \dots, b_m & ; & 0, b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \end{aligned}$$

On a donc obtenu une relation permettant d'écrire la primitive d'une fonction de Meijer sous forme d'une fonction de Meijer :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \overline{G}_{p+1,q+1}^{m+1,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1 + 1, \dots, a_n + 1 & ; & 1, a_{n+1} + 1, \dots, a_p + 1 \\ 0, b_1 + 1, \dots, b_m + 1 & ; & b_{m+1} + 1, \dots, b_q + 1 \end{matrix} \right. \right) \\ &= -\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_n & ; & a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; & b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \end{aligned} \quad (47)$$

Notons que cette expression est celle obtenue dans un cas particulier de la dérivation des fonctions de Meijer (équation 42).

On a donc montré que l'intégration était une loi interne pour les fonctions de Meijer $\overline{G}$: à une fonction de Meijer $\overline{G}_{p,q}^{m,n}$ correspond une primitive qui est elle-même une fonction de Meijer $\overline{G}_{p+1,q+1}^{m+1,n}$.

4.2 Seconde expression de la primitive d'une fonction de Meijer

Si on prend comme expression de la dérivation d'une fonction de Meijer la relation 40 :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_n & ; & a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; & b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \\ &= -\overline{G}_{p+1,q+1}^{m+1,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1 - 1, \dots, a_n - 1 & ; & -1, a_{n+1} - 1, \dots, a_p - 1 \\ 0, b_1 - 1, \dots, b_m - 1 & ; & b_{m+1} - 1, \dots, b_q - 1 \end{matrix} \right. \right) \end{aligned}$$

Considérons à nouveau la fonction de Meijer $\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_n & ; & a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; & b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right)$. Par convolution de Mellin avec le Mellin-Dirac $-\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{matrix} 0; -1 \\ 0; -1 \end{matrix} \right. \right)$, on obtient :

$$\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_n & ; & a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; & b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = -\overline{G}_{p+2,q+2}^{m+1,n+1} \left(x \left| \begin{matrix} 0, a_1, \dots, a_n & ; & -1, a_{n+1}, \dots, a_p \\ 0, b_1, \dots, b_m & ; & -1, b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right)$$

On est donc dans un cas "favorable" (paragraphe 3.3.4, cas " $b_1 = 0$ "). Par une démarche identique à la précédente on montre que :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \overline{G}_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(x \left| \begin{matrix} 1, a_1 + 1, \dots, a_n + 1 & ; & a_{n+1} + 1, \dots, a_p + 1 \\ b_1 + 1, \dots, b_m + 1 & ; & 0, b_{m+1} + 1, \dots, b_q + 1 \end{matrix} \right. \right) \\ &= \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_n & ; & a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; & b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \end{aligned} \quad (48)$$

Notons que cette expression est celle obtenue dans un cas particulier de la dérivation des fonctions de Meijer (équation 41).

On a donc montré que l'intégration était une loi interne pour les fonctions de Meijer $\overline{G}$: à une fonction de Meijer $\overline{G}_{p,q}^{m,n}$ correspond une primitive qui est elle-même une fonction de Meijer $\overline{G}_{p+1,q+1}^{m,n+1}$.

On montre de manière évidente que les deux expressions (relation 47 et relation 48) sont équivalentes.

4.3 Exemples d'intégration de fonctions de Meijer

4.3.1 Intégration de l'exponentielle décroissante

Soit l'exponentielle décroissante $f(x)$:

$$f(x) = e^{-x} = \overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot; \cdot \\ 0; \cdot \end{array} \right. \right)$$

– A partir de l'expression 47, on peut écrire :

$$-\frac{d}{dx} \overline{G}_{1,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{cc} \cdot & ; & 1 \\ 0, 1 & ; & \cdot \end{array} \right. \right) = \overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot; \cdot \\ 0; \cdot \end{array} \right. \right)$$

et on reconnaît l'expression d'une fonction de Whittaker, puisque (relation 25) :

$$\overline{G}_{1,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{cc} \cdot & ; & 1 \\ 0, 1 & ; & \cdot \end{array} \right. \right) = e^{-\frac{x}{2}} W_{0, -\frac{1}{2}}(x)$$

Notons que, puisque l'on a de manière évidente :

$$\overline{G}_{1,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{cc} \cdot & ; & 1 \\ 0, 1 & ; & \cdot \end{array} \right. \right) = \overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot; \cdot \\ 0; \cdot \end{array} \right. \right) \star \overline{G}_{1,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{cc} \cdot & ; & 1 \\ 1 & ; & \cdot \end{array} \right. \right) = \overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot; \cdot \\ 0; \cdot \end{array} \right. \right)$$

on retrouve à nouveau la relation fondamentale de l'exponentielle décroissante :

$$\frac{d}{dx} \overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot; \cdot \\ 0; \cdot \end{array} \right. \right) = -\overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot; \cdot \\ 0; \cdot \end{array} \right. \right)$$

– A partir de l'expression 48, on peut écrire :

$$\frac{d}{dx} \overline{G}_{1,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{cc} 1 & ; & \cdot \\ 1 & ; & 0 \end{array} \right. \right) = \overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot; \cdot \\ 0; \cdot \end{array} \right. \right)$$

et on reconnaît l'expression d'une fonction hypergéométrique, puisque (relation 33) :

$$\overline{G}_{1,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{cc} 1 & ; & \cdot \\ 1 & ; & 0 \end{array} \right. \right) = {}_1F_1(1; 2; -x)$$

Or il est aisé de montrer les égalités suivantes :

$$\overline{G}_{1,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{cc} 1 & ; & \cdot \\ 1 & ; & 0 \end{array} \right. \right) = \overline{G}_{2,3}^{2,1} \left(x \left| \begin{array}{cc} 1 & ; & 0 \\ 1, 0 & ; & 0 \end{array} \right. \right) = -\overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot; \cdot \\ 0; \cdot \end{array} \right. \right)$$

et on retrouve le précédent résultat.

Considérons maintenant la fonction

$$f(x) = x^a e^{-x} = \overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{matrix} \cdot & \cdot \\ a & \cdot \end{matrix} \right. \right)$$

Deux approches pour en déterminer la primitive peuvent être effectuées :

- A partir de l’expression 47, on peut écrire :

$$-\frac{d}{dx} \overline{G}_{1,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{matrix} \cdot & 1 \\ 0, a+1 & \cdot \end{matrix} \right. \right) = \overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{matrix} \cdot & \cdot \\ a & \cdot \end{matrix} \right. \right)$$

On reconnaît une fonction de Whittaker (relation 25), ce qui permet d’écrire :

$$-\frac{d}{dx} \left(x^{\frac{a}{2}} e^{-\frac{x}{2}} W_{\frac{a}{2}, -\frac{a+1}{2}}(x) \right) = \overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{matrix} \cdot & \cdot \\ a & \cdot \end{matrix} \right. \right)$$

- A partir de l’expression 48, on peut écrire :

$$\frac{d}{dx} \overline{G}_{1,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{matrix} 1 & \cdot \\ a+1 & 0 \end{matrix} \right. \right) = \overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{matrix} \cdot & \cdot \\ a & \cdot \end{matrix} \right. \right)$$

On reconnaît une expression faisant intervenir une fonction hypergéométrique (relation 33), ce qui permet d’écrire :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a+1} x^{a+1} {}_1F_1(a+1; a+2; -x) \right) = \overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{matrix} \cdot & \cdot \\ a & \cdot \end{matrix} \right. \right)$$

4.3.2 Intégration de l’exponentielle décroissante “inverse”

Soit l’exponentielle décroissante “inverse” $f(x)$:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}} = \overline{G}_{1,0}^{0,1} \left(x \left| \begin{matrix} 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix} \right. \right)$$

- A partir de l’expression 47, on peut écrire :

$$-\frac{d}{dx} \overline{G}_{2,1}^{1,1} \left(x \left| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & \cdot \end{matrix} \right. \right) = \overline{G}_{1,0}^{0,1} \left(x \left| \begin{matrix} 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix} \right. \right)$$

- A partir de l’expression 48, on peut écrire :

$$\frac{d}{dx} \overline{G}_{2,1}^{0,2} \left(x \left| \begin{matrix} 2, 1 & \cdot \\ \cdot & 0 \end{matrix} \right. \right) = \overline{G}_{1,0}^{0,1} \left(x \left| \begin{matrix} 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix} \right. \right)$$

De la même manière on montre aisément que :

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \overline{G}_{2,1}^{1,1} \left(x \left| \begin{matrix} a+1 & 1 \\ 0 & \cdot \end{matrix} \right. \right) &= \overline{G}_{1,0}^{0,1} \left(x \left| \begin{matrix} a & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix} \right. \right) \\ \frac{d}{dx} \overline{G}_{2,1}^{0,2} \left(x \left| \begin{matrix} a+1, 1 & \cdot \\ \cdot & 0 \end{matrix} \right. \right) &= \overline{G}_{1,0}^{0,1} \left(x \left| \begin{matrix} a & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix} \right. \right) \end{aligned}$$

4.3.3 Intégration des fonctions de Bessel modifiées de seconde espèce K

Nous avons vu au paragraphe 2.6.4 la relation :

$$\overline{G}_{0,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{cc} \cdot & ; \cdot \\ a, b & ; \cdot \end{array} \right. \right) = 2 x^{\frac{a+b}{2}} K_{a-b}(2\sqrt{x})$$

avec K fonction de Bessel modifiée de seconde espèce, et que nous appelons dans ce document fonction $\mathcal{K}$.

En appliquant la relation 47 à la fonction $\overline{G}_{0,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{cc} \cdot & ; \cdot \\ a, b & ; \cdot \end{array} \right. \right)$, on obtient :

$$\frac{d}{dx} \overline{G}_{1,3}^{3,0} \left(x \left| \begin{array}{cc} \cdot & ; 1 \\ 0, a+1, b+1 & ; \cdot \end{array} \right. \right) = -\overline{G}_{0,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{cc} \cdot & ; \cdot \\ a, b & ; \cdot \end{array} \right. \right)$$

En appliquant la relation 48, on obtient :

$$\frac{d}{dx} \overline{G}_{1,3}^{2,1} \left(x \left| \begin{array}{cc} 1 & ; \cdot \\ a+1, b+1 & ; 0 \end{array} \right. \right) = \overline{G}_{0,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{cc} \cdot & ; \cdot \\ a, b & ; \cdot \end{array} \right. \right)$$

On a donc les relations :

$$-\frac{d}{dx} \overline{G}_{1,3}^{3,0} \left(x \left| \begin{array}{cc} \cdot & ; 1 \\ 0, a+1, b+1 & ; \cdot \end{array} \right. \right) = 2 x^{\frac{a+b}{2}} K_{a-b}(2\sqrt{x})$$

et

$$\frac{d}{dx} \overline{G}_{1,3}^{2,1} \left(x \left| \begin{array}{cc} 1 & ; \cdot \\ a+1, b+1 & ; 0 \end{array} \right. \right) = 2 x^{\frac{a+b}{2}} K_{a-b}(2\sqrt{x})$$

4.3.4 Intégration des fonctions de Fisher

Nous avons défini au paragraphe 2.6.5 la fonction de Fisher (relation 22) :

$$\overline{G}_{1,1}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{cc} 1-b & ; \cdot \\ a & ; \cdot \end{array} \right. \right) = \Gamma(a+b) \frac{x^a}{(1+x)^{a+b}}$$

En appliquant la relation 47 à cette fonction de Fisher, on obtient :

$$\frac{d}{dx} \overline{G}_{2,2}^{2,1} \left(x \left| \begin{array}{cc} 2-b & ; 1 \\ 0, a+1 & ; \cdot \end{array} \right. \right) = -\overline{G}_{1,1}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{cc} 1-b; \cdot \\ a; \cdot \end{array} \right. \right)$$

En appliquant la relation 48, on obtient :

$$\frac{d}{dx} \overline{G}_{2,2}^{1,2} \left(x \left| \begin{array}{cc} 1, 2-b & ; \cdot \\ a+1 & ; 0 \end{array} \right. \right) = \overline{G}_{1,1}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{cc} 1-b; \cdot \\ a; \cdot \end{array} \right. \right)$$

On a donc les relations :

$$-\frac{d}{dx} \overline{G}_{2,2}^{2,1} \left(x \left| \begin{array}{cc} 2-b & ; 1 \\ 0, a+1 & ; \cdot \end{array} \right. \right) = \Gamma(a+b) \frac{x^a}{(1+x)^{a+b}}$$

et

$$\frac{d}{dx} \overline{G}_{2,2}^{1,2} \left(x \left| \begin{array}{cc} 1, 2-b & ; \cdot \\ a+1 & ; 0 \end{array} \right. \right) = \Gamma(a+b) \frac{x^a}{(1+x)^{a+b}}$$

En utilisant la relation 33 dans cette dernière expression, on peut écrire :

$$\frac{\Gamma(a+b)}{1+a} \frac{d}{dx} \left(x^{a+1} {}_2F_1(a+b, a+1; a+2; -x) \right) = \Gamma(a+b) \frac{x^a}{(1+x)^{a+b}}$$

4.3.5 Intégration des fonctions Beta

Nous avons défini au paragraphe 2.6.6 la fonction Beta par l'expression 23 :

$$\overline{G}_{1,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot & ; & b \\ a & ; & \cdot \end{array} \right. \right) = \frac{1}{\Gamma(b-a)} x^a (1-x)^b \quad x \in [0, 1]$$

En appliquant la relation 47 à la fonction $\overline{G}_{1,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot & ; & b \\ a & ; & \cdot \end{array} \right. \right)$ on obtient :

$$\frac{d}{dx} \overline{G}_{2,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot & ; & b+1, 1 \\ a+1, 0 & ; & \cdot \end{array} \right. \right) = -\overline{G}_{1,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot & ; & b \\ a & ; & \cdot \end{array} \right. \right)$$

En appliquant la relation 48 à la fonction $\overline{G}_{1,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot & ; & b \\ a & ; & \cdot \end{array} \right. \right)$ on obtient :

$$\frac{d}{dx} \overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{c} 1 & ; & b+1 \\ a+1 & ; & 0 \end{array} \right. \right) = \overline{G}_{1,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot & ; & b \\ a & ; & \cdot \end{array} \right. \right)$$

On a donc les relations :

$$-\frac{d}{dx} \overline{G}_{2,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot & ; & b+1, 1 \\ a+1, 0 & ; & \cdot \end{array} \right. \right) = \frac{1}{\Gamma(b-a)} x^a (1-x)^b \quad x \in [0, 1]$$

et

$$\frac{d}{dx} \overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{c} 1 & ; & b+1 \\ a+1 & ; & 0 \end{array} \right. \right) = \frac{1}{\Gamma(b-a)} x^a (1-x)^b \quad x \in [0, 1]$$

4.3.6 Intégration des fonctions hypergéométriques (cas général)

Soit une fonction hypergéométrique ${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x)$ sous sa forme la plus générale :

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x) = \frac{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j)}{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j)} \overline{G}_{p,q+1}^{1,p} \left(-x \left| \begin{array}{c} 1-a_1, \dots, 1-a_p & ; & \cdot \\ 0 & ; & 1-b_1, \dots, 1-b_q \end{array} \right. \right)$$

Appliquons la relation 48. On obtient alors :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \overline{G}_{p+1,q+2}^{1,p+1} \left(-x \left| \begin{array}{c} 2-a_1, \dots, 2-a_p, 1 & ; & \cdot \\ 0 & ; & 2-b_1, \dots, 2-b_q, 0 \end{array} \right. \right) \\ &= -\overline{G}_{p,q+1}^{1,p} \left(-x \left| \begin{array}{c} 1-a_1, \dots, 1-a_p & ; & \cdot \\ 0 & ; & 1-b_1, \dots, 1-b_q \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

On voit ainsi très simplement que la primitive de la fonction hypergéométrique

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x)$$

est la fonction hypergéométrique

$$-{}_pF_q(a_1-1, \dots, a_p-1, 1; b_1-1, \dots, b_q-1, 0; x)$$

5 Récapitulatifs

Ce paragraphe a donc pour objectif de rappeler les définitions et propriétés essentielles des fonctions de Meijer. Rappelons qu'elles ne concernent qu'un certain type de fonctions de Meijer notées $\overline{G}_{p,q}^{m,n}$ et définies par une intégrale de Barnes dont le parcours est une droite parallèle à l'axe des imaginaires :

$$\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)} x^s ds$$

Cette fonction a pour transformée de Mellin :

$$\mathcal{M} \left[\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \right] = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)}$$

5.1 Propriétés essentielles des fonctions de Meijer

Modification du nombre des paramètres (égalité “en diagonale”)

$$\begin{aligned} \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) &= \overline{G}_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n, c & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q, c \end{array} \right. \right) \\ \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) &= \overline{G}_{p+1,q+1}^{m+1,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p, c \\ b_1, \dots, b_m, c & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

Permutation de paramètres (passage de la diagonale à l'antidiagonale)

Soit une fonction de Meijer $\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} \dots a \dots & ; \quad \dots \\ \dots & ; \quad \dots b \dots \end{array} \right. \right)$ telle que $a - b \in \mathbb{Z}$. On a alors :

$$\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} \dots a \dots & ; \quad \dots \\ \dots & ; \quad \dots b \dots \end{array} \right. \right) = (-1)^{b-a} \overline{G}_{p,q}^{m+1,n-1} \left(x \left| \begin{array}{cc} \dots & ; \quad \dots a \dots \\ \dots b \dots & ; \quad \dots \end{array} \right. \right)$$

Multiplication par une puissance de la variable x

$$x^r \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1 + r, \dots, a_n + r & ; \quad a_{n+1} + r, \dots, a_p + r \\ b_1 + r, \dots, b_m + r & ; \quad b_{m+1} + r, \dots, b_q + r \end{array} \right. \right)$$

Règle fondamentale par convolution de Mellin

$$\begin{aligned} \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) &\hat{\star} \overline{G}_{p',q'}^{m',n'} \left(x \left| \begin{array}{cc} a'_1, \dots, a'_{n'} & ; \quad a'_{n'+1}, \dots, a_{p'} \\ b'_1, \dots, b'_{m'} & ; \quad b'_{m'+1}, \dots, b_{q'} \end{array} \right. \right) \\ &= \overline{G}_{p+p',q+q'}^{m+m',n+n'} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_{n'} & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p, a'_{n'+1}, \dots, a_{p'} \\ b_1, \dots, b_m, b'_1, \dots, b'_{m'} & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q, b'_{m'+1}, \dots, b_{q'} \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

Fonction inverse

$$\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(\frac{1}{x} \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = \overline{G}_{q,p}^{n,m} \left(x \left| \begin{array}{cc} -b_1 + 1, \dots, -b_m + 1 & ; \quad -b_{m+1} + 1, \dots, -b_q + 1 \\ -a_1 + 1, \dots, -a_n + 1 & ; \quad -a_{n+1} + 1, \dots, -a_p + 1 \end{array} \right. \right)$$

Dérivation

La dérivée d'une fonction de Meijer $\overline{G}_{p,q}^{m,n}$ est donnée, dans le cas général, sous la forme d'une somme de deux fonctions de Meijer $\overline{G}_{p,q}^{m,n}$ (expression 37) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \quad ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m \quad ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = \\ \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1 - 2, a_2 - 1, \dots, a_n - 1 \quad ; \quad a_{n+1} - 1, \dots, a_p - 1 \\ b_1 - 1, b_2 - 1, \dots, b_m - 1 \quad ; \quad b_{m+1} - 1, \dots, b_q - 1 \end{array} \right. \right) \\ + (a_1 - 1) \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1 - 1, a_2 - 1, \dots, a_n - 1 \quad ; \quad a_{n+1} - 1, \dots, a_p - 1 \\ b_1 - 1, b_2 - 1, \dots, b_m - 1 \quad ; \quad b_{m+1} - 1, \dots, b_q - 1 \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

On peut aussi obtenir deux expressions de la dérivée de la fonction de Meijer $\overline{G}_{p,q}^{m,n}$: la première fait intervenir une fonction de Meijer $\overline{G}_{p+1,q+1}^{m,n+1}$ (expression 39) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \quad ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m \quad ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \\ = \overline{G}_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(x \left| \begin{array}{c} -1, a_1 - 1, \dots, a_n - 1 \quad ; \quad a_{n+1} - 1, \dots, a_p - 1 \\ b_1 - 1, \dots, b_m - 1 \quad ; \quad 0, b_{m+1} - 1, \dots, b_q - 1 \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

la seconde fait intervenir une fonction de Meijer $\overline{G}_{p+1,q+1}^{m+1,n}$ (expression 40) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \quad ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m \quad ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \\ = - \overline{G}_{p+1,q+1}^{m+1,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1 - 1, \dots, a_n - 1 \quad ; \quad -1, a_{n+1} - 1, \dots, a_p - 1 \\ 0, b_1 - 1, \dots, b_m - 1 \quad ; \quad b_{m+1} - 1, \dots, b_q - 1 \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

Primitive des fonctions de Meijer

La primitive d'une fonction de Meijer $\overline{G}_{p,q}^{m,n}$ est une fonction de Meijer $\overline{G}_{p+1,q+1}^{m+1,n}$ (relation 47) ou une fonction de Meijer $\overline{G}_{p+1,q+1}^{m,n+1}$ (relation 48) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \overline{G}_{p+1,q+1}^{m+1,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1 + 1, \dots, a_n + 1 \quad ; \quad 1, a_{n+1} + 1, \dots, a_p + 1 \\ 0, b_1 + 1, \dots, b_m + 1 \quad ; \quad b_{m+1} + 1, \dots, b_q + 1 \end{array} \right. \right) \\ = - \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \quad ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m \quad ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \\ \frac{d}{dx} \overline{G}_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(x \left| \begin{array}{c} 1, a_1 + 1, \dots, a_n + 1 \quad ; \quad a_{n+1} + 1, \dots, a_p + 1 \\ b_1 + 1, \dots, b_m + 1 \quad ; \quad 0, b_{m+1} + 1, \dots, b_q + 1 \end{array} \right. \right) \\ = \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \quad ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m \quad ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

5.2 Tableau récapitulatif des fonctions usuelles

Fonction de Meijer	Mellin-Dirac
$\overline{G}_{1,1}^{0,1} \left(x \left \begin{matrix} a ; . \\ . ; a \end{matrix} \right. \right)$	$\delta^{\mathcal{M}}$
$\overline{G}_{1,1}^{1,0} \left(x \left \begin{matrix} . ; b \\ b ; . \end{matrix} \right. \right)$	$\delta^{\mathcal{M}}$
$\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left \begin{matrix} a ; b \\ b ; a \end{matrix} \right. \right)$	$\delta^{\mathcal{M}}$
$\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left \begin{matrix} c-r ; c \\ c-r ; c \end{matrix} \right. \right)$	$(-1)^r \delta^{\mathcal{M}} \quad \forall r \in \mathbb{Z}$
$\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left \begin{matrix} c ; c-r \\ c ; c-r \end{matrix} \right. \right)$	$(-1)^r \delta^{\mathcal{M}} \quad \forall r \in \mathbb{Z}$

Fonction de Meijer	Forme usuelle connue
$\overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left \begin{array}{c} \cdot \\ 0 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right)$	e^{-x}
$\overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left \begin{array}{c} \cdot \\ a \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right)$	$x^a e^{-x}$
$\overline{G}_{1,0}^{0,1} \left(x \left \begin{array}{c} 1 \\ \cdot \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right)$	$e^{-\frac{1}{x}}$
$\overline{G}_{1,0}^{0,1} \left(x \left \begin{array}{c} a \\ \cdot \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right)$	$x^{a-1} e^{-\frac{1}{x}}$
$\overline{G}_{0,2}^{2,0} \left(x \left \begin{array}{c} \cdot \\ a, b \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right)$	$2 x^{\frac{a+b}{2}} K_{a-b}(2\sqrt{x})$
$\overline{G}_{1,1}^{1,1} \left(x \left \begin{array}{c} 1-b \\ a \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right)$	$\Gamma(a+b) \frac{x^a}{(1+x)^{a+b}}$
$\overline{G}_{1,1}^{1,0} \left(x \left \begin{array}{c} \cdot \\ a \end{array} \right. ; \begin{array}{c} b \\ \cdot \end{array} \right)$	$\frac{1}{\Gamma(b-a)} x^a (1-x)^b \quad x \in [0, 1]$
$\overline{G}_{1,1}^{0,1} \left(x \left \begin{array}{c} -1-a \\ \cdot \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ -1-b \end{array} \right)$	$\frac{1}{\Gamma(b-a)} x^{-b-1} (1-x)^{b-a-1} \quad x \in [1, \infty[$
$\overline{G}_{1,2}^{1,1} \left(x \left \begin{array}{c} a \\ 0 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ c \end{array} \right)$	$\frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-c)} {}_1F_1(1-a; 1-c; -x)$
$\overline{G}_{2,2}^{1,2} \left(x \left \begin{array}{c} a, b \\ 0 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ c \end{array} \right)$	$\frac{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}{\Gamma(1-c)} {}_2F_1(1-a, 1-b; 1-c; -x)$
$\overline{G}_{1,2}^{1,1} \left(x \left \begin{array}{c} a \\ r \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ c \end{array} \right)$	$\frac{\Gamma(r+1-a)}{\Gamma(r+1-c)} x^r {}_1F_1(r+1-a; r+1-c; -x)$
$\overline{G}_{2,2}^{1,2} \left(x \left \begin{array}{c} a, b \\ r \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ c \end{array} \right)$	$\frac{\Gamma(r+1-a)\Gamma(r+1-b)}{\Gamma(r+1-c)} x^r {}_2F_1(r+1-a, r+1-b; r+1-c; -x)$
$\overline{G}_{1,2}^{2,0} \left(x \left \begin{array}{c} \cdot \\ b, c \end{array} \right. ; \begin{array}{c} a \\ \cdot \end{array} \right)$	$x^{\frac{b+c-1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} W_{\frac{1+b+c}{2}-a, \frac{b-c}{2}}$

5.3 Taxonomie des fonctions usuelles

Fonction de Meijer	Famille de fonction
$\overline{G}_{0,p}^{p,0} \left(x \left \begin{array}{c} \cdot \\ [* * *] \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \right)$	Gamma, K, ...
$\overline{G}_{p,0}^{0,p} \left(x \left \begin{array}{c} [* * *] \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \right)$	Gamma inverse, K inverse, ...
$\overline{G}_{p,q}^{q,p} \left(x \left \begin{array}{c} [* * *] \\ [* * *] \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \right)$	Fisher, ...
$\overline{G}_{p,q}^{q,0} \left(x \left \begin{array}{c} \cdot \\ [* * *] \end{array} ; \begin{array}{c} [* * *] \\ \cdot \end{array} \right. \right)$	Beta, Whittaker...
$\overline{G}_{p,q}^{0,p} \left(x \left \begin{array}{c} [* * *] \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ [* * *] \end{array} \right. \right)$	Beta inverse, Whittaker inverse...
$\overline{G}_{p,q}^{1,p} \left(x \left \begin{array}{c} [* * *] \\ 0 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ [* * *] \end{array} \right. \right)$	Hypergéométrique

Il ne semble pas exister sur $\mathbb{R}^+$ des fonctions de Meijer du type $\overline{G}_{0,q}^{q,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{c} [* * *] \\ \cdot \end{array} \right. \right)$ (rappelons que la convolution inverse de Mellin n'est pas une loi interne pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ telles que $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^+$).

5.4 Tableau récapitulatifs des dérivées de fonctions usuelles

Dérivées des fonctions usuelles		
Fonction (expression “Meijer”)	Dérivée (expression “Meijer”)	Dérivée (forme usuelle)
e^{-x} $\overline{G}_{0,1}^{1,0}\left(x\left \begin{array}{c} \cdot;\cdot \\ 0;\cdot \end{array}\right.\right)$	$-\overline{G}_{0,1}^{1,0}\left(x\left \begin{array}{c} \cdot;\cdot \\ 0;\cdot \end{array}\right.\right)$	$-e^{-x}$
$x^a e^{-x}$ $\overline{G}_{0,1}^{1,0}\left(x\left \begin{array}{c} \cdot;\cdot \\ a;\cdot \end{array}\right.\right)$	$-\overline{G}_{1,2}^{2,0}\left(x\left \begin{array}{cc} \cdot & ; -1 \\ 0, a-1 & ; \cdot \end{array}\right.\right)$ $\overline{G}_{1,2}^{1,1}\left(x\left \begin{array}{cc} -1 & ; \cdot \\ a-1 & ; 0 \end{array}\right.\right)$	$(a-x)x^{a-1}e^{-x}$ $ax_1^{a-1}F_1(a+1;a;-x)$
$e^{-\frac{1}{x}}$ $\overline{G}_{1,0}^{0,1}\left(x\left \begin{array}{c} 1;\cdot \\ \cdot;\cdot \end{array}\right.\right)$	$\overline{G}_{1,0}^{0,1}\left(x\left \begin{array}{cc} -1 & ; \cdot \\ \cdot & ; \cdot \end{array}\right.\right)$	$\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$
$x^a e^{-\frac{1}{x}}$ $\overline{G}_{1,0}^{0,1}\left(x\left \begin{array}{cc} a & ; \cdot \\ \cdot & ; \cdot \end{array}\right.\right)$	$\overline{G}_{2,1}^{0,2}\left(x\left \begin{array}{cc} -1, a-1 & ; \cdot \\ \cdot & ; 0 \end{array}\right.\right)$ $-\overline{G}_{2,1}^{1,1}\left(x\left \begin{array}{cc} a-1 & ; -1 \\ 0 & ; \cdot \end{array}\right.\right)$	$(ax+1)x^{a-2}e^{-\frac{1}{x}}$

Dérivées des fonctions usuelles		
Fonction (expression “Meijer”)	Dérivée (expression “Meijer”)	Dérivée (forme usuelle)
$2 x^{\frac{a+b}{2}} K_{a-b}(2\sqrt{x})$ $\overline{G}_{0,2}^{2,0} \left(x \left \begin{array}{c} \cdot \\ a, b \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \right)$	$\overline{G}_{1,3}^{2,1} \left(x \left \begin{array}{c} -1 \\ a-1, b-1 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ 0 \end{array} \right. \right)$ $-\overline{G}_{1,3}^{3,0} \left(x \left \begin{array}{c} \cdot \\ a-1, b-1, -1 \end{array} ; \begin{array}{c} 0 \\ \cdot \end{array} \right. \right)$	$2 x^{\frac{a+b}{2}-1} (K_{a-b}(2\sqrt{x}) - K_{a-b+1}(2\sqrt{x}))$
$\Gamma(a+b) \frac{x^a}{(1+x)^{a+b}}$ $\overline{G}_{1,1}^{1,1} \left(x \left \begin{array}{c} 1-b \\ a \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \right)$	$-\overline{G}_{2,2}^{2,1} \left(x \left \begin{array}{c} -b \\ 0, a-1 \end{array} ; \begin{array}{c} -1 \\ \cdot \end{array} \right. \right)$ $\overline{G}_{2,2}^{1,2} \left(x \left \begin{array}{c} -1, b \\ a-1 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ 0 \end{array} \right. \right)$	$\Gamma(a+b) \frac{x^{a-1} (a-bx)}{(1+x)^{a+b+1}}$ $a\Gamma(a-b) {}_2F_1(a+1, a-b; a; -x)$
$\frac{1}{\Gamma(b-a)} x^a (1-x)^b \quad x \in [0, 1]$ $\overline{G}_{1,1}^{1,0} \left(x \left \begin{array}{c} \cdot \\ a \end{array} ; \begin{array}{c} b \\ \cdot \end{array} \right. \right)$	$-\overline{G}_{2,2}^{2,0} \left(x \left \begin{array}{c} \cdot \\ 0, a-1 \end{array} ; \begin{array}{c} -1, b-1 \\ \cdot \end{array} \right. \right)$ $\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left \begin{array}{c} -1 \\ a-1 \end{array} ; \begin{array}{c} b-1 \\ 0 \end{array} \right. \right)$	$\frac{1}{\Gamma(b-a)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} (a - (a+b)x)$
${}_1F_1(a; b; x)$ $\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \overline{G}_{1,2}^{1,1} \left(-x \left \begin{array}{c} 1-a \\ 0 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ 1-b \end{array} \right. \right)$	$\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \overline{G}_{1,2}^{1,1} \left(-x \left \begin{array}{c} -a \\ 0 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ -b \end{array} \right. \right)$	${}_1F_1(a+1; b+1; x)$
$x^{\frac{b+c-1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} W_{\frac{1+b+c}{2}-a, \frac{b-c}{2}}$ $\overline{G}_{1,2}^{2,0} \left(x \left \begin{array}{c} \cdot \\ b, c \end{array} ; \begin{array}{c} a \\ \cdot \end{array} \right. \right)$		

5.5 Tableaux récapitulatifs des primitives des fonctions usuelles

Primitives des fonctions usuelles		
Fonction (expression “Meijer”)	Primitive (expression “Meijer”)	Primitive (forme usuelle)
e^{-x}	$\overline{G}_{1,2}^{1,1} \left(x \left \begin{matrix} 1 & ; & \cdot \\ 1 & ; & 0 \end{matrix} \right. \right)$	$x {}_1F_1(1; 2; -x)$
$\overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left \begin{matrix} \cdot ; \cdot \\ 0 ; \cdot \end{matrix} \right. \right)$	$-\overline{G}_{1,2}^{2,0} \left(x \left \begin{matrix} \cdot & ; & 1 \\ 0, 1 & ; & \cdot \end{matrix} \right. \right)$	$-e^{-\frac{x}{2}} W_{0, -\frac{1}{2}}$
$x^a e^{-x}$	$\overline{G}_{1,2}^{1,1} \left(x \left \begin{matrix} 1 & ; & \cdot \\ a+1 & ; & 0 \end{matrix} \right. \right)$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} {}_1F_1(a+1; a+2; -x)$
$\overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left \begin{matrix} \cdot ; \cdot \\ a ; \cdot \end{matrix} \right. \right)$	$-\overline{G}_{1,2}^{2,0} \left(x \left \begin{matrix} \cdot & ; & 1 \\ 0, a+1 & ; & \cdot \end{matrix} \right. \right)$	$-x^{\frac{a}{2}} e^{-\frac{x}{2}} W_{\frac{a}{2}, -\frac{a+1}{2}}(x)$
$e^{-\frac{1}{x}}$	$\overline{G}_{2,1}^{0,2} \left(x \left \begin{matrix} 1, 2 & ; & \cdot \\ \cdot & ; & 0 \end{matrix} \right. \right)$	
$\overline{G}_{1,0}^{0,1} \left(x \left \begin{matrix} 1 ; \cdot \\ \cdot ; \cdot \end{matrix} \right. \right)$	$-\overline{G}_{2,1}^{1,1} \left(x \left \begin{matrix} 2 & ; & 1 \\ 0 & ; & \cdot \end{matrix} \right. \right)$	
$x^a e^{-\frac{1}{x}}$	$\overline{G}_{2,1}^{0,2} \left(x \left \begin{matrix} 1, a+2 & ; & \cdot \\ \cdot & ; & 0 \end{matrix} \right. \right)$	
$\overline{G}_{1,0}^{0,1} \left(x \left \begin{matrix} a+1 & ; & \cdot \\ \cdot & ; & \cdot \end{matrix} \right. \right)$	$-\overline{G}_{2,1}^{1,1} \left(x \left \begin{matrix} a+2 & ; & 1 \\ 0 & ; & \cdot \end{matrix} \right. \right)$	

Primitives des fonctions usuelles		
Fonction (expression "Meijer")	Primitive (expression "Meijer")	Primitive (forme usuelle)
$2 x^{\frac{a+b}{2}} K_{a-b}(2\sqrt{x})$ $\overline{G}_{0,2}^{2,0} \left(x \left \begin{array}{c} \cdot \\ a, b \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \right)$	$\overline{G}_{1,3}^{2,1} \left(x \left \begin{array}{c} 1 \\ a+1, b+1 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ 0 \end{array} \right. \right)$ $-\overline{G}_{1,3}^{3,0} \left(x \left \begin{array}{c} \cdot \\ 0, a+1, b+1 \end{array} ; \begin{array}{c} 1 \\ \cdot \end{array} \right. \right)$	
$\Gamma(a+b) \frac{x^a}{(1+x)^{a+b}}$ $\overline{G}_{1,1}^{1,1} \left(x \left \begin{array}{c} 1-b \\ a \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \right)$	$\overline{G}_{2,2}^{1,2} \left(x \left \begin{array}{c} 1, 2-b \\ a+1 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ 0 \end{array} \right. \right)$ $-\overline{G}_{2,2}^{2,1} \left(x \left \begin{array}{c} 2-b \\ 0, a+1 \end{array} ; \begin{array}{c} 1 \\ \cdot \end{array} \right. \right)$	$\frac{\Gamma(a+b)}{a+1} x^{a+1}$ $\times {}_2F_1(a+b, a+1; a+2; -x)$
$\frac{1}{\Gamma(b-a)} x^a (1-x)^b \quad x \in [0, 1]$ $\overline{G}_{1,1}^{1,0} \left(x \left \begin{array}{c} \cdot \\ a \end{array} ; \begin{array}{c} b \\ \cdot \end{array} \right. \right)$	$\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left \begin{array}{c} 1 \\ a+1 \end{array} ; \begin{array}{c} b+1 \\ 0 \end{array} \right. \right)$ $-\overline{G}_{2,2}^{2,0} \left(x \left \begin{array}{c} \cdot \\ 0, a+1 \end{array} ; \begin{array}{c} 1, b+1 \\ \cdot \end{array} \right. \right)$	
$x^{\frac{b+c-1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} W_{\frac{1+b+c}{2}-a, \frac{b-c}{2}}$ $\overline{G}_{1,2}^{2,0} \left(x \left \begin{array}{c} \cdot \\ b, c \end{array} ; \begin{array}{c} a \\ \cdot \end{array} \right. \right)$	$\overline{G}_{2,3}^{2,1} \left(x \left \begin{array}{c} 1 \\ b+1, c+1 \end{array} ; \begin{array}{c} a+1 \\ 0 \end{array} \right. \right)$ $-\overline{G}_{2,3}^{3,0} \left(x \left \begin{array}{c} \cdot \\ 0, b+1, c+1 \end{array} ; \begin{array}{c} 1, a+1 \\ \cdot \end{array} \right. \right)$	

6 Les lois de Meijer

6.1 Fonctions de Meijer et lois de probabilités

Nous avons vu la relation fondamentale 2 exprimant la transformée de Mellin de $\overline{G}$:

$$\mathcal{M} \left[\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \right] (s) = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)}$$

Réécrivons cette expression pour lui donner la même allure qu'une fonction caractéristique de deuxième espèce (qui donne un rôle clé à la valeur $s = 1$) :

$$\frac{\prod_{j=1}^m \Gamma((b_j + 1) + s - 1) \prod_{j=1}^n \Gamma((-a_j) + 1 - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma((-b_j) + 1 - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma((a_j + 1) + s - 1)} \quad (49)$$

Donc, dans la mesure où la fonction de Meijer s'apparente à une loi de probabilité définie sur $\mathbb{R}^+$ (*i.e.* qu'elle vérifie $x < 0 \Rightarrow G(x) = 0$ et $x \geq 0 \Rightarrow G(x) \geq 0$), cette transformée de Mellin peut représenter une fonction caractéristique de deuxième espèce.

Pour cela, il faut que cette fonction caractéristique de deuxième espèce soit définie en $s = 1$ et égale à 1 (ce qui revient à dire que $\int_0^\infty G(x) dx = 1$). Il est alors aisé de construire de une nouvelle fonction $\tilde{G}_{p,q}^{m,n}$ vérifiant cette dernière condition. Pour cela, posons :

$$\begin{aligned} & \tilde{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \\ &= \frac{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(-b_j) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + 1)}{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + 1) \prod_{j=1}^n \Gamma(-a_j)} \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

Cette fonction de Meijer modifiée $\tilde{G}_{p,q}^{m,n}$ vérifie donc les conditions requises pour définir une ddp. Nous l'appellerons dans ce paragraphe **ddp de Meijer** et sa fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit :

$$\phi_{\tilde{G}} = \frac{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(-b_j) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + 1)}{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + 1) \prod_{j=1}^n \Gamma(-a_j)} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma((b_j + 1) + s - 1) \prod_{j=1}^n \Gamma((-a_j) + 1 - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma((-b_j) + 1 - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma((a_j + 1) + s - 1)} \quad (50)$$

On peut vérifier que, pour $s = 1$ on a bien $\phi_{\tilde{G}}|_{s=1} = 1$.

La formulation 50 permet de faire le lien avec deux cas particuliers de lois de distributions utilisées en imagerie cohérente. En effet :

- Considérons la loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L]^4$:

$$\frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{Lx}{\mu} \right)^{L-1} e^{-\frac{Lx}{\mu}}$$

Sa fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit :

$$\phi_{\mathcal{G}} = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L + s - 1)}{L^{s-1} \Gamma(L)}$$

Prenons un cas particulier de loi Gamma : $\mathcal{G}'$ tel que $\mathcal{G}'[L] = \mathcal{G}[\mu = L, L]$. On a alors :

$$\phi_{\mathcal{G}'} = \frac{\Gamma(L + s - 1)}{\Gamma(L)}$$

⁴Pour ce choix de définition de la loi Gamma, voir l'annexe C.2.15.

Il est facile, par identification, de voir que cette loi Gamma $\mathcal{G}'$ s'exprime comme une ddp de Meijer, avec $b_1 + 1 = L$:

$$\mathcal{G}'[L] = \frac{1}{\Gamma(L)} \bar{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L-1 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \right) = \tilde{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L-1 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \right)$$

– de même, considérons la loi Gamma Inverse $\mathcal{GI}[\mu, L]^5$:

$$\frac{1}{\Gamma(M)} \frac{1}{M\mu} \left(\frac{M\mu}{x} \right)^{M+1} e^{-\frac{M\mu}{x}}$$

Sa fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit :

$$\phi_{\mathcal{GI}} = \mu^{1-s} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s} \Gamma(M)}$$

Prenons un cas particulier de loi Gamma Inverse : $\mathcal{GI}'$ tel que $\mathcal{GI}'[M] = \mathcal{GI}[\mu = M, M]$. On a alors :

$$\phi_{\mathcal{GI}'} = \frac{\Gamma(M+1-s)}{\Gamma(M)}$$

Il est facile, par identification, de voir que cette loi Gamma $\mathcal{GI}'$ s'exprime comme une ddp de Meijer, avec $a_1 = -M$:

$$\mathcal{GI}'[M] = \frac{1}{\Gamma(M)} \bar{G}_{1,0}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{c} -M \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \right) = \tilde{G}_{1,0}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{c} -M \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \right)$$

Or, nous savons que les deux lois de base que sont la loi Gamma et la loi Gamma Inverse servent à la construction des lois usuelles de l'imagerie cohérente par le biais de la convolution de Mellin ($\hat{\star}$) ainsi que, dans des cas bien précis⁶, par le biais de la convolution de Mellin inverse $\hat{\star}^{-1}$.

Par simple identification, il est aisé de montrer que $\tilde{G}_{p,q}^{m,n}$ peut être définie comme le résultat de convolutions de Mellin ($\hat{\star}$) de lois $\mathcal{G}'$ et de lois $\mathcal{GI}'$ (cette convolution correspond au terme au numérateur dans l'expression 49), ainsi que de convolution inverse de Mellin ($\hat{\star}^{-1}$) de lois $\mathcal{G}'$ et de lois $\mathcal{GI}'$ (cette convolution inverse correspond au terme au dénominateur dans l'expression 49). En posant :

$$\begin{aligned} \hat{\star} & : \quad \begin{cases} \mathcal{G}' : & b_j = L_j - 1 & j \in [1, m] \\ \mathcal{GI}' : & a_j = -M_j & j \in [1, n] \end{cases} \\ \hat{\star}^{-1} & : \quad \begin{cases} \mathcal{G}' : & a_j = \tilde{L}_j - 1 & j \in [n+1, p] \\ \mathcal{GI}' : & b_j = -\tilde{M}_j & j \in [m+1, q] \end{cases} \end{aligned}$$

l'expression 49 devient :

$$\frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(L_j + s - 1) \prod_{j=1}^n \Gamma(M_j + 1 - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(\tilde{M}_j + 1 - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(\tilde{L}_j + s - 1)} \quad (51)$$

Dans cette expression, notons que l'aspect "convolution de Mellin" est paramétré par les L_i et les M_i et se manifeste au numérateur de l'expression 51, tandis que l'aspect "convolution inverse de Mellin" est paramétré par les $\tilde{L}_i$ et $\tilde{M}_i$ et se manifeste au dénominateur de l'expression 51.

Reste donc à traiter le cas général, prenant en compte les lois Gamma $\mathcal{G}$ et les lois Gamma Inverse $\mathcal{GI}$.

⁵Pour ce choix de définition de la loi Gamma, voir l'annexe C.2.15.

⁶Des conditions sur les paramètres doivent impérativement être précisés. Nous rappelons que pour fluidifier la lecture de ce document, ces conditions ne sont pas systématiquement explicitées.

6.2 Les lois de Meijer $\mathcal{LM}$

6.2.1 Cas particulier : lois Gamma et Gamma Inverse

Dans le cas général, la loi Gamma $\mathcal{G}$ s'écrit :

$$\mathcal{G}[\mu, L] = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{Lx}{\mu} \right)^{L-1} e^{-\frac{Lx}{\mu}}$$

Dans le précédent paragraphe, nous avons utilisé la loi $\mathcal{G}'$, qui est un cas particulier avec $\mu = L$:

$$\mathcal{G}'[L](x) = \frac{1}{\Gamma(L)} (x)^{L-1} e^{-x}$$

Passer de $\mathcal{G}'$ à $\mathcal{G}$ revient à effectuer le changement de variable :

$$x' = \frac{L}{\mu} x$$

le jacobien de cette transformation étant $\frac{L}{\mu}$.

D'après les propriétés de la transformée de Mellin, multiplier la variable x par une constante a revient à multiplier la transformée de Mellin par λ^{-s} [11] :

$$\mathcal{M}[f(\lambda x)](s) = \lambda^{-s} \mathcal{M}[f(x)](s) \quad (52)$$

On en déduit par exemple :

$$\mathcal{M}\left[\frac{L}{\mu} \overline{G}_{0,1}^{1,0}\left(\frac{L}{\mu}x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L-1 \end{array} \right. ; \cdot \right)\right](s) = \frac{\mu^{s-1}}{L^{s-1}} \Gamma(L+s-1)$$

Si l'on cherche à écrire la loi Gamma en utilisant une fonction de Meijer, il suffit alors de considérer la fonction suivante :

$$\frac{L}{\mu} \frac{1}{\Gamma(L)} \overline{G}_{0,1}^{1,0}\left(\frac{L}{\mu}x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L-1 \end{array} \right. ; \cdot \right)$$

Sa transformée de Mellin –c'est à dire la fonction caractéristique de deuxième espèce– s'écrit :

$$\frac{L}{\mu} \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{\mu^s}{L} \Gamma(L+s-1) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)}$$

et on reconnaît la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi Gamma. On a donc :

$$\frac{L}{\mu} \frac{1}{\Gamma(L)} \overline{G}_{0,1}^{1,0}\left(\frac{L}{\mu}x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L-1 \end{array} \right. ; \cdot \right) = \mathcal{G}[\mu, L](x) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{Lx}{\mu} \right)^{L-1} e^{-\frac{Lx}{\mu}}$$

Bien entendu, cette égalité pouvait aussi se déduire des relations entre fonction de Meijer et exponentielle décroissante abordées au paragraphe 2.6.2.

De la même manière, considérons la loi Gamma inverse

$$\mathcal{GI}[\mu, M](x) = \frac{1}{\Gamma(M)} \frac{1}{M\mu} \left(\frac{M\mu}{x} \right)^{M+1} e^{-\frac{M\mu}{x}} \quad M \geq 0 \quad \mu > 0$$

dont la fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit :

$$\phi_{\mathcal{GI}}(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s} \Gamma(M)}$$

Considérons maintenant la fonction de Meijer suivante :

$$\frac{1}{M\mu} \frac{1}{\Gamma(M)} \overline{G}_{1,0}^{0,1} \left(\frac{x}{M\mu} \left| \begin{array}{c} -M \\ \cdot \end{array} \right. \begin{array}{c} ; \\ ; \end{array} \cdot \right)$$

Sa transformée de Mellin s'écrit (grâce à l'utilisation de la relation 52) :

$$\frac{1}{M\mu} \frac{1}{\Gamma(M)} M^s \mu^s \Gamma(M+1-s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s} \Gamma(M)}$$

et on reconnaît la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi Gamma Inverse. On a donc la relation :

$$\frac{1}{M\mu} \frac{1}{\Gamma(M)} \overline{G}_{1,0}^{0,1} \left(\frac{x}{M\mu} \left| \begin{array}{c} -M \\ \cdot \end{array} \right. \begin{array}{c} ; \\ ; \end{array} \cdot \right) = \mathcal{GI}[\mu, M](x)$$

6.2.2 Cas général des lois de Meijer

On a donc vu sur ces deux exemples qu'il est possible de définir des lois de probabilités classiques en utilisant les fonctions de Meijer. Ces dernières étant extrêmement générales, il est alors tentant de définir les lois de Meijer sous une forme permettant d'une part une correspondance facile avec les lois classiques et d'autre part une généralisation aisée de ces lois par convolution de Mellin et convolution de Mellin inverse.

D'une manière purement formelle, définissons les lois de Meijer $\mathcal{LM}$ par des convolutions (directe et inverse) de Mellin de lois Gamma et de lois Gamma inverse par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{LM}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} M_1, \dots, M_n \\ L_1, \dots, L_m \end{array} \right. \begin{array}{c} ; \\ ; \end{array} \begin{array}{c} \tilde{L}_{n+1}, \dots, \tilde{L}_p \\ \tilde{M}_{m+1}, \dots, \tilde{M}_q \end{array} , \mu \right) = \\ \mathcal{G}[\mu, L_1] \hat{\star} \dots \hat{\star} \mathcal{G}[1, L_m] \\ \hat{\star} \mathcal{GI}[1, M_1] \hat{\star} \dots \hat{\star} \mathcal{GI}[1, M_n] \\ \hat{\star}^{-1} \mathcal{G}[1, \tilde{L}_{n+1}] \hat{\star}^{-1} \dots \hat{\star}^{-1} \mathcal{G}[1, \tilde{L}_p] \\ \hat{\star}^{-1} \mathcal{GI}[1, \tilde{M}_{m+1}] \hat{\star}^{-1} \dots \hat{\star}^{-1} \mathcal{GI}[1, \tilde{M}_q] \end{aligned} \quad (53)$$

Il est alors aisé de montrer que ces lois s'expriment à l'aide des fonctions de Meijer $\overline{G}_{p,q}^{m,n}$ et vérifient la relation fondamentale suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{LM}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} M_1, \dots, M_n \\ L_1, \dots, L_m \end{array} \right. \begin{array}{c} ; \\ ; \end{array} \begin{array}{c} \tilde{L}_{n+1}, \dots, \tilde{L}_p \\ \tilde{M}_{m+1}, \dots, \tilde{M}_q \end{array} , \mu \right) = \\ \frac{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(\tilde{L}_j) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(\tilde{M}_j)}{\prod_{j=1}^m \Gamma(L_j) \prod_{j=1}^n \Gamma(M_j)} \frac{\prod_{j=1}^m L_j \prod_{j=m+1}^q \tilde{M}_j}{\prod_{j=1}^n M_j \prod_{j=n+1}^p \tilde{L}_j} \frac{1}{\mu} \\ \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(\frac{\prod_{j=1}^p L_j \prod_{j=m+1}^q \tilde{M}_j}{\prod_{j=1}^n M_j \prod_{j=n+1}^p \tilde{L}_j} \frac{x}{\mu} \left| \begin{array}{c} -M_1, \dots, -M_n \\ L_1 - 1, \dots, L_m - 1 \end{array} \right. \begin{array}{c} ; \\ ; \end{array} \begin{array}{c} \tilde{L}_{n+1} - 1, \dots, \tilde{L}_p - 1 \\ -\tilde{M}_{m+1}, \dots, -\tilde{M}_q \end{array} \right) \end{aligned} \quad (54)$$

La notation spécifique choisie permet d'appréhender le rôle des variables. En effet :

- L est le paramètre correspondant à la loi Gamma (convolution),
- M est le paramètre correspondant à la loi Gamma Inverse (convolution),
- $\tilde{L}$ est le paramètre correspondant à la loi Gamma (convolution inverse),
- $\tilde{M}$ est le paramètre correspondant à la loi Gamma Inverse (convolution inverse).

Comme la convolution inverse de Mellin n'est pas une loi interne dans l'ensemble des lois de probabilités définies sur $\mathbb{R}^+$, certaines conditions sur les coefficients $\tilde{L}$ et $\tilde{M}$ sont requises pour qu'une loi de Meijer $\mathcal{LM}$ soit une loi de probabilité définie sur $\mathbb{R}^+$. Celle ci doit en effet vérifier :

$$\begin{aligned} \forall x < 0 \quad \mathcal{LM}(x) &= 0 \\ \forall x \geq 0 \quad \mathcal{LM}(x) &\geq 0 \end{aligned}$$

6.2.3 Propriétés des lois de Meijer

Une propriété essentielle des lois de Meijer est le fait que la convolution de Mellin est une loi interne. En effet, à partir de la propriété de convolution des fonctions de Meijer (équation 7), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{LM}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} M_1, \dots, M_n \\ L_1, \dots, L_m \end{array} ; \begin{array}{c} \tilde{L}_{n+1}, \dots, \tilde{L}_p \\ \tilde{M}_{m+1}, \dots, \tilde{M}_q \end{array} , \mu \right. \right) \star \mathcal{LM}_{p',q'}^{m',n'} \left(x \left| \begin{array}{c} M'_1, \dots, M'_{n'} \\ L'_1, \dots, L'_{m'} \end{array} ; \begin{array}{c} \tilde{L}'_{n'+1}, \dots, \tilde{L}'_{p'} \\ \tilde{M}'_{m'+1}, \dots, \tilde{M}'_{q'} \end{array} , \mu' \right. \right) \\ = \mathcal{LM}_{p+p',q+q'}^{m+m',n+n'} \left(x \left| \begin{array}{c} M_1, \dots, M_n, M'_1, \dots, M'_{n'} \\ L_1, \dots, L_m, L'_1, \dots, L'_{m'} \end{array} ; \begin{array}{c} \tilde{L}_{n+1}, \dots, \tilde{L}_p, \tilde{L}'_{n'+1}, \dots, \tilde{L}'_{p'} \\ \tilde{M}_{m+1}, \dots, \tilde{M}_q, \tilde{M}'_{m'+1}, \dots, \tilde{M}'_{q'} \end{array} , \mu\mu' \right. \right) \end{aligned} \quad (55)$$

Toujours à partir de l'étude des fonctions de Meijer, on voit que la dérivée et la primitive de lois de Meijer s'écrivent sous forme de fonctions de Meijer.

6.2.4 Fonction caractéristique de deuxième espèce des lois de Meijer

Soit une loi de Meijer $\mathcal{LM}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} M_1, \dots, M_n \\ L_1, \dots, L_m \end{array} ; \begin{array}{c} \tilde{L}_{n+1}, \dots, \tilde{L}_p \\ \tilde{M}_{m+1}, \dots, \tilde{M}_q \end{array} , \mu \right. \right)$. Sa fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit simplement :

$$\mu^{s-1} \prod_{j=1}^m \frac{\Gamma(L_j + s - 1)}{L_j^{s-1} \Gamma(L_j)} \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(M_j + 1 - s)}{M_j^{1-s} \Gamma(M_j)} \prod_{j=n+1}^p \frac{\tilde{L}_j^{s-1} \Gamma(\tilde{L}_j)}{\Gamma(\tilde{L}_j + s - 1)} \prod_{j=m+1}^q \frac{\tilde{M}_j^{1-s} \Gamma(\tilde{M}_j)}{\Gamma(\tilde{M}_j + 1 - s)} \quad (56)$$

On peut vérifier que pour $s = 1$, elle prend la valeur 1, ce qui est une conditions nécessaire pour une ddp.

6.2.5 Moments et mode des lois de Meijer

Comme la fonction caractéristique de deuxième espèce (expression 56) est de facto la fonction génératrice des moments, il est aisé d'en déduire les moments classiques. On a par exemple :

$$\begin{aligned} m_1 &= \mu \prod_{j=1}^n \frac{M_j}{M_j - 1} \prod_{j=m+1}^q \frac{\tilde{M}_j - 1}{\tilde{M}_j} \\ m_2 &= \mu^2 \prod_{j=1}^m \frac{L_j + 1}{L_j} \prod_{j=1}^n \frac{M_j^2}{(M_j - 1)(M_j - 2)} \prod_{j=n+1}^p \frac{\tilde{L}_j}{\tilde{L}_j + 1} \prod_{j=m+1}^q \frac{(\tilde{M}_j - 1)(\tilde{M}_j - 2)}{\tilde{M}_j^2} \end{aligned} \quad (57)$$

En particulier, on voit que le moment d'ordre 1 m_1 est proportionnel au paramètre μ .

Le mode d'une loi de Meijer n'a pas, en général, de forme analytique explicite. Cependant, il se calcule sans problème puisque la dérivée d'une fonction de Meijer est une fonction de Meijer.

Si l'on a une loi de Meijer $\mathcal{LM}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} M_1, \dots, M_n \\ L_1, \dots, L_m \end{array} ; \begin{array}{c} \tilde{L}_{n+1}, \dots, \tilde{L}_p \\ \tilde{M}_{m+1}, \dots, \tilde{M}_q \end{array} , \mu \right. \right)$, sa ddp est propor-

tionnelle à la fonction de Meijer $\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(\frac{\prod_1^p L_j \prod_{m+1}^q \tilde{M}_j x}{\prod_1^n M_j \prod_{n+1}^{n+p} \tilde{L}_j \mu} \left| \begin{array}{c} -M_1, \dots, -M_n \\ L_1 - 1, \dots, L_m - 1 \end{array} ; \begin{array}{c} \tilde{L}_{n+1} - 1, \dots, \tilde{L}_p - 1 \\ -\tilde{M}_{m+1}, \dots, -\tilde{M}_q \end{array} \right. \right)$.

Son mode correspond donc à l'annulation de la dérivée de cette fonction de Meijer, donc, par utilisation de la formule 39, à la valeur x -si elle existe sur $\mathbb{R}^+$ - telle que :

$$\overline{G}_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(\frac{\prod_1^p L_j \prod_{m+1}^q \tilde{M}_j x}{\prod_1^n M_j \prod_{n+1}^{n+p} \tilde{L}_j \mu} \left| \begin{array}{c} -1, -M_1 - 1, \dots, -M_n - 1 \\ L_1 - 2, \dots, L_m - 2 \end{array} ; \begin{array}{c} \tilde{L}_{n+1} - 2, \dots, \tilde{L}_p - 2 \\ 0, -\tilde{M}_{m+1} - 1, \dots, -\tilde{M}_q - 1 \end{array} \right. \right) = 0$$

On pourrait obtenir une autre expression strictement équivalente par utilisation de la formule 40.

6.2.6 log-moments et log-cumulants des lois de Meijer

Si le formalisme des lois de Meijer semble lourd, la caractérisation de ces lois est en fait assez simple sous l'angle des statistiques de Mellin. En effet, à partir de la fonction caractéristique de deuxième espèce (expression 56), on en déduit par dérivation logarithmique les log-moments et les log-cumulants. On a en particulier les expressions suivantes pour les log-cumulants :

$$\begin{aligned}
\tilde{\kappa}_1 &= \log \mu + \sum_{i=1}^m (\Psi(L_i) - \log L_i) - \sum_{i=1}^n (\Psi(M_i) - \log M_i) \\
&\quad - \sum_{i=n+1}^p (\Psi(\tilde{L}_i) - \log \tilde{L}_i) + \sum_{i=m+1}^q (\Psi(\tilde{M}_i) - \log \tilde{M}_i) \\
\tilde{\kappa}_2 &= \sum_{i=1}^m \Psi(1, L_i) + \sum_{i=1}^n \Psi(1, M_i) - \sum_{i=n+1}^p \Psi(1, \tilde{L}_i) - \sum_{i=m+1}^q \Psi(1, \tilde{M}_i) \\
\tilde{\kappa}_r &= \sum_{i=1}^m \Psi(r-1, L_i) + (-1)^r \sum_{i=1}^n \Psi(1, M_i) - \sum_{i=n+1}^p \Psi(r-1, \tilde{L}_i) - (-1)^r \sum_{i=m+1}^q \Psi(r-1, \tilde{M}_i) \quad (58)
\end{aligned}$$

qui s'avèrent simples et faciles à résoudre numériquement car les fonctions Polygamma ont d'intéressantes propriétés de monotonie.

En résumé, on voit donc que si la forme analytique des lois de Meijer requiert l'utilisation des fonctions de Meijer dont la définition implicite les rend plutôt lourdes à manipuler, les log moments et les log cumulants ont finalement une expression assez simple et exploitable.

6.2.7 Lois de Meijer et lois de Meijer inverse

Soit une loi de Meijer définie par la relation 54. Connaissant la relation 9 liant fonction de Meijer et fonction de Meijer inverse, on peut en déduire directement sa loi inverse, donnée par la relation suivante :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{LM}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} M_1, \dots, M_n \quad ; \quad \tilde{L}_{n+1}, \dots, \tilde{L}_p \\ L_1, \dots, L_m \quad ; \quad \tilde{M}_{m+1}, \dots, \tilde{M}_q \end{array} \right. , \mu \right) \\
&= \frac{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(\tilde{L}_j) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(\tilde{M}_j)}{\prod_{j=1}^m \Gamma(L_j) \prod_{j=1}^n \Gamma(M_j)} \frac{\prod_{j=1}^n M_j \prod_{j=n+1}^{n+p} \tilde{L}_j}{\prod_{j=1}^m L_j \prod_{j=m+1}^q \tilde{M}_j} \frac{1}{\mu} \\
&\quad \overline{G}_{q,p}^{n,m} \left(\frac{\prod_{j=1}^n M_j \prod_{j=n+1}^{n+p} \tilde{L}_j}{\prod_{j=1}^m L_j \prod_{j=m+1}^q \tilde{M}_j} \frac{x}{\mu} \left| \begin{array}{l} -L_1, \dots, -L_m \quad ; \quad \tilde{M}_{m+1} - 1, \dots, \tilde{M}_q - 1 \\ M_1 - 1, \dots, M_n - 1 \quad ; \quad \tilde{L}_{n+1}, \dots, \tilde{L}_p \end{array} \right. \right)
\end{aligned}$$

On en déduit la relation :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{LM}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} M_1, \dots, M_n \quad ; \quad \tilde{L}_{n+1}, \dots, \tilde{L}_p \\ L_1, \dots, L_m \quad ; \quad \tilde{M}_{m+1}, \dots, \tilde{M}_q \end{array} \right. , \mu \right) \\
&= \mathcal{LM}_{q,p}^{n,m} \left(x \left| \begin{array}{l} L_1, \dots, L_m \quad ; \quad \tilde{M}_{m+1}, \dots, \tilde{M}_q \\ M_1, \dots, M_n \quad ; \quad \tilde{L}_{n+1}, \dots, \tilde{L}_p \end{array} \right. , \mu \right)
\end{aligned}$$

On a donc une propriété intéressante : la loi inverse d'une loi de Meijer est une loi de Meijer. L'opération "loi inverse" est donc interne aux lois de Meijer (cette propriété était déjà observée pour les lois de Fisher et les lois log-normales).

6.3 Lois de Meijer généralisées

6.3.1 Définition des lois généralisées [11]

Soit une variable aléatoire x décrite par sa distribution de probabilité $p(u)$ et soit $\phi(s)$ sa fonction caractéristique de deuxième espèce.

Considérons une nouvelle variable aléatoire y telle que $x = y^\eta$. Soit $p_\eta(v)$ la loi de probabilité correspondant à cette nouvelle variable, et $\phi_\eta(s)$ sa fonction caractéristique de deuxième espèce. On a alors la relation fondamentale :

$$p_\eta(v) = \eta v^{(\eta-1)} p(v^\eta) \quad (59)$$

On a ainsi défini une définition de la loi généralisée $p_\eta(v)$ de la loi initiale $p(u)$, avec $u = v^\eta$. C'est cette définition qui est prise par exemple pour définir la loi de Weibull à partir de la loi exponentielle décroissante.

Si l'on connaît la fonction caractéristique de deuxième espèce de $p(u) : \phi(s)$, à partir des propriétés fondamentales de la transformée de Mellin⁷, on obtient ϕ_η , la fonction caractéristique de deuxième espèce de p_η :

$$\phi_\eta(s) = \phi\left(\frac{s + \eta - 1}{\eta}\right) \quad (60)$$

Cette relation finalement très simple permet de déduire une expression simplissime pour les log-cumulants de y puisque, si pour tout r l'on connaît $\tilde{\kappa}_r$, les log-cumulants de x , on en déduit $\tilde{\kappa}_{r,\eta}$, les log-cumulants de y , par la relation :

$$\tilde{\kappa}_{r,\eta} = \left(\frac{1}{\eta}\right)^r \tilde{\kappa}_r \quad (61)$$

Une seconde approche nous sera utile dans ce document : étant donnée la variable aléatoire x , considérons la nouvelle variable aléatoire z telle que $z = x^{\eta'}$. Soit $\tilde{p}_{\eta'}(w)$ sa ddp et $\tilde{\phi}_{\eta'}(s)$ sa fonction caractéristique de deuxième espèce. Connaissant 59, on en déduit aisément $\tilde{p}_{\eta'}(w)$:

$$\tilde{p}_{\eta'}(w) = \frac{1}{\eta'} w^{\frac{1-\eta'}{\eta'}} p(w^{\frac{1}{\eta'}}) \quad (62)$$

et $\tilde{\phi}_{\eta'}$:

$$\tilde{\phi}_{\eta'}(s) = \phi(\eta'(s-1) + 1) \quad (63)$$

Bien entendu, en posant $\eta' = \frac{1}{\eta}$, on retrouve l'expression 62 à partir de 59 et l'expression 63 à partir de 60. Les log-cumulants ont alors pour expression :

$$\tilde{\kappa}_{r,\eta'} = \eta'^r \tilde{\kappa}_r \quad (64)$$

6.3.2 Exemples de lois généralisées

Les effets de ce changement de variable ont été déjà étudiés pour des lois comme la loi Gamma ou la loi de Fisher par un certain nombre d'auteur au siècle dernier. Par exemple, le passage de la loi Gamma à la loi Gamma généralisée a été proposé par Stacy en 1962[14] : en fait Amoroso [1] a proposé un résultat identique bien avant (en 1925, voir l'annexe C.2.1). L'expression de la loi Gamma Généralisée est alors une loi à 3 paramètres :

$$\mathcal{GG}[\mu, L, \eta] = \frac{|\eta|}{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{\Gamma(L)} \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu}\right)^{\eta L - 1} e^{-\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu}\right)^\eta}$$

On obtient de même la loi de Fisher Généralisée, qui est une loi à 4 paramètres :

$$\mathcal{FG}[\mu, L, M, \eta] = \frac{\eta}{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{M^{\frac{1}{\eta}}} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu}\right)^{\eta L - 1}}{\left(1 + \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu}\right)^\eta\right)^{L+M}}$$

⁷Si $f(u)$ admet une transformée de Mellin : $\phi(s) = \mathcal{M}[f(u)](s)$, on a alors $\mathcal{M}[u^a f(u)](s) = \phi(s+a)$ et $\mathcal{M}[f(u^a)](s) = \frac{1}{a} \phi\left(\frac{s}{a}\right)$ [11]

et la loi Beta Généralisée, qui est aussi une loi à 4 paramètres :

$$\mathcal{BG}[\mu, L, M, \eta] = \frac{\eta}{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{M^{\frac{1}{\eta}}} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L) \Gamma(M-L)} \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{M^{\frac{1}{\eta}}} \frac{x}{\mu} \right)^{\eta L-1} \left(1 - \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{M^{\frac{1}{\eta}}} \frac{x}{\mu} \right)^{\eta} \right)^{M-L-1}$$

Ces deux dernières lois sont proposées par McDonald [9] (mais il existe des sources plus anciennes).

6.3.3 Définition des lois de Meijer généralisées $\mathcal{LMG}$

A partir de ce concept et de ces exemples, il est alors trivial de définir, à partir des lois de Meijer $\mathcal{LM}$, les lois de Meijer généralisées $\mathcal{LMG}$. Ces lois font intervenir un nouveau paramètre : η , tel que la nouvelle variable aléatoire y soit liée à la variable initiale x par la relation $x = y^\eta$. Nous noterons ces lois $\mathcal{LMG}_{p,q}^{m,n}$:

$$\mathcal{LMG}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{ll} M_1, \dots, M_n & ; \quad \tilde{L}_{n+1}, \dots, \tilde{L}_p \\ L_1, \dots, L_m & ; \quad \tilde{M}_{m+1}, \dots, \tilde{M}_q \end{array} \right. , \mu, \eta \right)$$

Ce sont donc des lois à $p + q + 2$ paramètres.

Par simple application de la relation 59, et après quelques opérations élémentaires (utilisant la relation 5), on obtient la forme analytique des lois de Meijer généralisées exprimées à l'aide des fonctions de Meijer :

$$\begin{aligned} & \mathcal{LMG}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{ll} M_1, \dots, M_n & ; \quad \tilde{L}_{n+1}, \dots, \tilde{L}_p \\ L_1, \dots, L_m & ; \quad \tilde{M}_{m+1}, \dots, \tilde{M}_q \end{array} \right. , \mu, \eta \right) \\ &= \frac{\eta}{\mu} \frac{\prod_{j=1}^q \Gamma(\tilde{L}_j) \prod_{j=1}^n \Gamma(\tilde{M}_j)}{\prod_{j=1}^m \Gamma(L_j) \prod_{j=1}^p \Gamma(M_j)} \left(\frac{\prod_{j=1}^m L_j \prod_{j=1}^q \tilde{M}_j}{\prod_{j=1}^n M_j \prod_{j=1}^p \tilde{L}_j} \right)^{\frac{1}{\eta}} \\ & \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(\frac{\prod_{j=1}^p L_j \prod_{j=1}^q \tilde{M}_j}{\prod_{j=1}^n M_j \prod_{j=1}^p \tilde{L}_j} \left(\frac{x}{\mu} \right)^\eta \left| \begin{array}{ll} -M_1 + 1 - \frac{1}{\eta}, \dots, -M_n + 1 - \frac{1}{\eta} & ; \quad \tilde{L}_{n+1} - \frac{1}{\eta}, \dots, \tilde{L}_p - \frac{1}{\eta} \\ L_1 - \frac{1}{\eta}, \dots, L_m - \frac{1}{\eta} & ; \quad -\tilde{M}_{m+1} + 1 - \frac{1}{\eta}, \dots, -\tilde{M}_q + 1 - \frac{1}{\eta} \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

On peut voir sur cette expression que l'opération "loi inverse" est une loi interne pour les lois de Meijer généralisées (puisque cela revient à changer η en $\frac{1}{\eta}$).

6.3.4 Fonction caractéristique de deuxième espèce des lois de Meijer généralisées

Par simple application de la relation 60 sur l'expression de la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi de Meijer (équation 56), et après quelques opérations élémentaires, on peut écrire la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi de Meijer généralisée

$$\mathcal{LMG}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{ll} L_1, \dots, L_m & ; \quad \tilde{M}_{m+1}, \dots, \tilde{M}_q \\ M_1, \dots, M_n & ; \quad \tilde{L}_{n+1}, \dots, \tilde{L}_p \end{array} \right. , \mu, \eta \right) :$$

$$\mu^{\frac{s-1}{\eta}} \prod_{j=1}^m \frac{\Gamma(L_j + \frac{s-1}{\eta})}{L_j^{\frac{s-1}{\eta}} \Gamma(L_j)} \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(M_j + \frac{1-s}{\eta})}{M_j^{\frac{1-s}{\eta}} \Gamma(M_j)} \prod_{j=n+1}^p \frac{\tilde{L}_j^{\frac{s-1}{\eta}} \Gamma(\tilde{L}_j)}{\Gamma(\tilde{L}_j + \frac{s-1}{\eta})} \prod_{j=m+1}^q \frac{\tilde{M}_j^{\frac{1-s}{\eta}} \Gamma(\tilde{M}_j)}{\Gamma(\tilde{M}_j + \frac{1-s}{\eta})} \quad (65)$$

En posant $s = 1$, on peut vérifier que l'on obtient bien la valeur 1, ce qui est une condition nécessaire pour que ce soit une ddp.

6.3.5 Propriétés des lois de Meijer généralisées

La fonction caractéristique de deuxième espèce (relation 65) est aussi la fonction génératrice des moments : on peut donc obtenir facilement l'expression analytique des moments des lois de Meijer généralisées. Cependant leur expression analytique peut s'avérer vite assez lourde à manipuler. Par exemple le premier moment m_1 s'écrit :

$$m_1 = \mu^{\frac{1}{\eta}} \prod_{j=1}^m \frac{\Gamma(L_j + \frac{1}{\eta})}{L_j^{\frac{1}{\eta}} \Gamma(L_j)} \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(M_j - \frac{1}{\eta})}{M_j^{-\frac{1}{\eta}} \Gamma(M_j)} \prod_{j=n+1}^p \frac{\tilde{L}_j^{\frac{1}{\eta}} \Gamma(\tilde{L}_j)}{\Gamma(\tilde{L}_j + \frac{1}{\eta})} \prod_{j=m+1}^q \frac{\tilde{M}_j^{-\frac{1}{\eta}} \Gamma(\tilde{M}_j)}{\Gamma(\tilde{M}_j - \frac{1}{\eta})}$$

C'est du côté des statistiques de Mellin qu'il faut trouver toute la puissance des lois de Meijer. En effet, à partir de cette fonction caractéristique de deuxième espèce, on en déduit par dérivation logarithmique les log-moments et les log-cumulants. On a en particulier les expressions suivantes pour les log-cumulants (pour $r > 1$) :

$$\tilde{\kappa}_r = \left(\frac{1}{\eta}\right)^r \left(\sum_{i=1}^m \Psi(r-1, L_i) + (-1)^r \sum_{i=1}^n \Psi(1, M_i) - \sum_{i=n+1}^p \Psi(r-1, \tilde{L}_i) - (-1)^r \sum_{i=m+1}^q \Psi(r-1, \tilde{M}_i) \right)$$

Cette dernière expression permet de proposer des solutions numériques d'inversion des paramètres assez simples –la monotonie des fonctions Polygamma étant un élément clé dans ces algorithmes– et ouvre ainsi la voie à des méthodes d'estimation de paramètres tout à fait réalisables.

6.4 Tableau récapitulatif des lois usuelles exprimées comme lois de Meijer

6.4.1 Lois à deux paramètres

Lois à deux paramètres		
Lois	formulation classique	formulation Meijer
loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L](x)$ $\mathcal{LM}_{0,1}^{1,0}\left(x \left \begin{smallmatrix} \cdot & & \\ L & & \end{smallmatrix} \right. ; \cdot, \mu\right)$	$\frac{L}{\mu} \frac{1}{\Gamma(L)} \left(\frac{Lx}{\mu}\right)^{L-1} e^{-\frac{Lx}{\mu}}$	$\frac{L}{\mu} \frac{1}{\Gamma(L)} \overline{G}_{0,1}^{1,0}\left(\frac{Lx}{\mu} \left \begin{smallmatrix} \cdot & & \\ L-1 & & \end{smallmatrix} \right. ; \cdot\right)$
loi Gamma Inverse $\mathcal{GI}[\mu, M](x)$ $\mathcal{LM}_{1,0}^{0,1}\left(x \left \begin{smallmatrix} M & & \\ \cdot & & \end{smallmatrix} \right. ; \cdot, \mu\right)$	$\frac{1}{M\mu} \frac{1}{\Gamma(M)} \left(\frac{M\mu}{x}\right)^{M+1} e^{-\frac{M\mu}{x}}$	$\frac{1}{M\mu} \frac{1}{\Gamma(M)} \overline{G}_{1,0}^{0,1}\left(\frac{x}{M\mu} \left \begin{smallmatrix} -M & & \\ \cdot & & \end{smallmatrix} \right. ; \cdot\right)$
loi de Nakagami $\mathcal{RN}[\mu, L](x)$ $\mathcal{LM}_{0,1}^{1,0}\left(x \left \begin{smallmatrix} \cdot & & \\ 1 - \frac{1}{2} & & \end{smallmatrix} \right. ; \cdot, \mu\right)$	$\frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{L}}{\Gamma(L)} \left(\frac{\sqrt{L}x}{\mu}\right)^{2L-1} e^{-\left(\frac{\sqrt{L}x}{\mu}\right)^2}$	$\frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{L}}{\Gamma(L)} \overline{G}_{0,1}^{1,0}\left(\left(\frac{\sqrt{L}x}{\mu}\right)^2 \left \begin{smallmatrix} \cdot & & \\ L - \frac{1}{2} & & \end{smallmatrix} \right. ; \cdot\right)$
loi de Weibull $\mathcal{W}[\mu, \eta](x)$ $\mathcal{LM}_{0,1}^{1,0}\left(x \left \begin{smallmatrix} \cdot & & \\ 1 - \frac{1}{\eta} & & \end{smallmatrix} \right. ; \cdot, \mu\right)$	$\frac{ \eta }{\mu} \left(\frac{x}{\mu}\right)^{\eta-1} e^{-\left(\frac{x}{\mu}\right)^\eta}$	$\frac{ \eta }{\mu} \overline{G}_{0,1}^{1,0}\left(\left(\frac{x}{\mu}\right)^\eta \left \begin{smallmatrix} \cdot & & \\ 1 - \frac{1}{\eta} & & \end{smallmatrix} \right. ; \cdot\right)$

6.4.2 Lois à trois paramètres

Lois à trois paramètres		
Lois	formulation classique	formulation Meijer
loi K $\mathcal{K}[\mu, L, M](x)$ $= \mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{G}[\mu, M]$ $\mathcal{LM}_{0,2}^{2,0} \left(x \left \begin{array}{cc} \cdot & ; \cdot \\ L, M & ; \cdot \end{array} \right. , \mu \right)$	$\frac{2LM}{\mu} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \left(\frac{LMx}{\mu} \right)^{\frac{M+L}{2}-1} K_{M-L} \left[2 \left(\frac{LMx}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$	$\frac{LM}{\mu} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \bar{G}_{0,2}^{2,0} \left(\frac{LMx}{\mu} \left \begin{array}{cc} \cdot & ; \cdot \\ L-1, M-1 & ; \cdot \end{array} \right. \right)$
loi K inverse $\mathcal{KI}[\mu, L, M](x)$ $= \mathcal{GI}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[\mu, M]$ $\mathcal{LM}_{2,0}^{0,2} \left(x \left \begin{array}{cc} L, M & ; \cdot \\ \cdot & ; \cdot \end{array} \right. , \mu \right)$	$\frac{2}{LM\mu} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \left(\frac{LM\mu}{x} \right)^{\frac{M+L}{2}+1} K_{M-L} \left[2 \left(\frac{LM\mu}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$	$\frac{1}{LM\mu} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \bar{G}_{2,0}^{0,2} \left(\frac{x}{LM\mu} \left \begin{array}{cc} -L, -M & ; \cdot \\ \cdot & ; \cdot \end{array} \right. \right)$
loi de Fisher $\mathcal{F}[\mu, L, M](x)$ $= \mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[\mu, M]$ $\mathcal{LM}_{1,1}^{1,1} \left(x \left \begin{array}{cc} M & ; \cdot \\ L & ; \cdot \end{array} \right. , \mu \right)$	$\frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{\left(\frac{Lx}{M\mu} \right)^{L-1}}{\left(1 + \frac{Lx}{M\mu} \right)^{L+M}}$	$\frac{L}{M\mu} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \bar{G}_{1,1}^{1,1} \left(\frac{Lx}{M\mu} \left \begin{array}{cc} -M & ; \cdot \\ L-1 & ; \cdot \end{array} \right. \right)$
loi Beta $\mathcal{B}[\mu, L, M]$ $= \mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star}^{-1} \mathcal{G}[\mu, M]$ $\mathcal{LM}_{1,1}^{1,0} \left(x \left \begin{array}{cc} \cdot & ; M \\ L & ; \cdot \end{array} \right. , \mu \right)$	$\frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \left(\frac{Lx}{M\mu} \right)^{L-1} \left(1 - \frac{Lx}{M\mu} \right)^{M-L-1}$	$\frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)} \bar{G}_{1,1}^{1,0} \left(\frac{Lx}{M\mu} \left \begin{array}{cc} \cdot & ; M-1 \\ L-1 & ; \cdot \end{array} \right. \right)$
loi Beta inverse $\mathcal{BI}[\mu, L, M]$ $= \mathcal{GI}[\mu, L] \hat{\star}^{-1} \mathcal{GI}[\mu, M]$ $\mathcal{LM}_{1,1}^{0,1} \left(x \left \begin{array}{cc} L & ; \cdot \\ \cdot & ; M \end{array} \right. , \mu \right)$	$\frac{M}{L\mu} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \frac{\left(\frac{Mx}{L\mu} - 1 \right)^{M-L-1}}{\left(\frac{Mx}{L\mu} \right)^M}$	$\frac{M}{L\mu} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)} \bar{G}_{1,1}^{0,1} \left(\frac{Mx}{L\mu} \left \begin{array}{cc} -L & ; \cdot \\ \cdot & ; -M \end{array} \right. \right)$
loi Gamma généralisée $\mathcal{GG}[\mu, L, \eta]$ $\mathcal{LMG}_{0,1}^{1,0} \left(x \left \begin{array}{cc} \cdot & ; \cdot \\ L & ; \cdot \end{array} \right. , \mu, \eta \right)$	$\frac{ \eta }{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{\Gamma(L)} \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu} \right)^{\eta L - 1} e^{-\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu} \right)^{\eta}}$	$\frac{ \eta }{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{\Gamma(L)} \bar{G}_{0,1}^{1,0} \left(\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu} \right)^{\eta} \left \begin{array}{cc} \cdot & ; \cdot \\ L - \frac{1}{\eta} & ; \cdot \end{array} \right. \right)$

6.4.3 Lois à quatre paramètres

Lois à quatre paramètres		
Lois	formulation classique	formulation Meijer
loi W $Q_W [\mu, L, M, N] = \mathcal{G} [\mu, L]$ $\hat{\star} \mathcal{G} [\mu, M] \hat{\star}^{-1} \mathcal{G} [\mu, N]$ $\mathcal{LM}_{1,2}^{2,0} \left(x \left \begin{array}{c} \cdot \\ L, M \end{array} ; \begin{array}{c} N \\ \cdot \end{array} \right. , \mu \right)$	$\frac{LM}{N\mu} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(M)\Gamma(L)} \left(\frac{LMx}{N\mu} \right)^{\frac{M+L-3}{2}}$ $e^{-\frac{LMx}{2N\mu}} W_{\frac{1+M+L-2N}{2}, \frac{L-M}{2}} \left(\frac{LMx}{N\mu} \right)$	$\frac{LM}{N\mu} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(L)\Gamma(M)}$ $\overline{G}_{1,2}^{2,0} \left(\frac{LMx}{N\mu} \left \begin{array}{c} \cdot \\ L-1, M-1 \end{array} ; \begin{array}{c} N-1 \\ \cdot \end{array} \right. \right)$
loi U $Q_U [\mu, L, M, N] = \mathcal{G} [\mu, L]$ $\hat{\star} \mathcal{G} [\mu, M] \hat{\star} \mathcal{GI} [\mu, N]$ $\mathcal{LM}_{1,2}^{2,1} \left(x \left \begin{array}{c} N \\ L, M \end{array} ; \cdot \right. , \mu \right)$	$\frac{LM}{N\mu} \frac{\Gamma(L+N)\Gamma(M+N)}{\Gamma(M)\Gamma(N)\Gamma(L)} \left(\frac{LMx}{N\mu} \right)^{\frac{L+M-3}{2}}$ $e^{\frac{LMx}{2N\mu}} W_{\frac{1-L-M-2N}{2}, \frac{L-M}{2}} \left(\frac{LMx}{N\mu} \right)$	$\frac{LM}{N\mu} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)\Gamma(N)}$ $\overline{G}_{1,2}^{2,1} \left(\frac{LMx}{N\mu} \left \begin{array}{c} -N \\ L-1, M-1 \end{array} ; \cdot \right. \right)$
loi Z $Q_Z [\mu, L, M, N] = \mathcal{G} [\mu, L]$ $\hat{\star} \mathcal{GI} [\mu, M] \hat{\star}^{-1} \mathcal{GI} [\mu, N]$ $\mathcal{LM}_{1,2}^{1,1} \left(x \left \begin{array}{c} M \\ L \end{array} ; \cdot \right. ; \begin{array}{c} N \\ \cdot \end{array} , \mu \right)$	$\frac{LN}{M\mu} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L+N)} \left(\frac{LNx}{M\mu} \right)^{\frac{L-N-2}{2}}$ $e^{-\frac{LNx}{2M\mu}} MW_{\frac{L+2M-N}{2}, \frac{L+N-1}{2}} \left(\frac{LNx}{M\mu} \right)$	$\frac{LN}{M\mu} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(L)\Gamma(M)}$ $\overline{G}_{1,2}^{1,1} \left(\frac{LNx}{M\mu} \left \begin{array}{c} -M \\ L-1 \end{array} ; \cdot \right. ; -N \right)$

Dans ce tableau, MW représente la fonction M de Whittaker, qui est défini par

$$MW_{\lambda, \mu} = x^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} + \mu - \lambda; 2\mu + 1; x \right)$$

Rappelons qu'il existe une relation directe entre ${}_1F_1$ et $\overline{G}_{1,2}^{1,1}$ (relation 27), ce qui explique le lien entre la formulation classique et la formulation "Meijer".

La fonction de Whittaker se définit d'ailleurs à partir de cette fonction MW :

$$W_{\lambda, \mu}(x) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu - \lambda\right)} MW_{\lambda, \mu}(x) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - \lambda\right)} MW_{\lambda, -\mu}(x)$$

Les expressions "classiques" sont celles de [11], corrigées de quelques erreurs typographiques.

6.4.4 Lois en amplitude

Dans ce tableau, on se focalise sur les lois que l'on pourrait utiliser en imagerie cohérente dès lors que l'on souhaite traiter les données en amplitude (et non en intensité).

Lois en amplitude		
Lois	formulation classique	formulation Meijer
loi de Nakagami $\mathcal{RN}[\mu, L](x)$ $\mathcal{LMG}_{0,1}^{1,0}\left(x \left \begin{smallmatrix} \cdot & \ddots \\ L & \ddots \end{smallmatrix}, \mu, 2 \right.\right)$	$\frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{L}}{\Gamma(L)} \left(\frac{\sqrt{L}x}{\mu}\right)^{2L-1} e^{-\left(\frac{\sqrt{L}x}{\mu}\right)^2}$	$\frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{L}}{\Gamma(L)} \overline{G}_{0,1}^{1,0}\left(\left(\frac{\sqrt{L}x}{\mu}\right)^2 \left \begin{smallmatrix} \cdot & & \\ L - \frac{1}{2} & & \\ & & \ddots \end{smallmatrix} \right.\right)$
loi de Nakagami Inverse $\mathcal{RN}\mathcal{I}[\mu, L](x)$ $\mathcal{LMG}_{0,1}^{0,1}\left(x \left \begin{smallmatrix} L & \ddots \\ \cdot & \ddots \end{smallmatrix}, \mu, 2 \right.\right)$	$\frac{2}{\mu} \frac{1}{\sqrt{L}\Gamma(L)} \left(\frac{\sqrt{L}\mu}{x}\right)^{2L-1} e^{-\left(\frac{\sqrt{L}\mu}{x}\right)^2}$	$\frac{2}{\mu} \frac{1}{\sqrt{L}\Gamma(L)} \overline{G}_{0,1}^{0,1}\left(\left(\frac{\sqrt{L}\mu}{x}\right)^2 \left \begin{smallmatrix} L - \frac{1}{2} & & \\ \cdot & & \\ & & \ddots \end{smallmatrix} \right.\right)$
loi K en amplitude $\mathcal{K}_A[\mu, L, M](x)$ $= \mathcal{RN}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{RN}[1, M]$ $\mathcal{LMG}_{0,2}^{2,0}\left(x \left \begin{smallmatrix} \cdot & \ddots \\ L, M & \ddots \end{smallmatrix}, \mu, 2 \right.\right)$	$\frac{4\sqrt{LM}}{\mu} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \left(\frac{\sqrt{LM}x}{\mu}\right)^{M+L-1} K_{M-L}\left[2\frac{\sqrt{LM}x}{\mu}\right]$	$\frac{2\sqrt{LM}}{\mu} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \overline{G}_{0,2}^{2,0}\left(\left(\frac{\sqrt{LM}x}{\mu}\right)^2 \left \begin{smallmatrix} \cdot & & \\ L - \frac{1}{2}, M - \frac{1}{2} & & \\ & & \ddots \end{smallmatrix} \right.\right)$
loi de Fisher en amplitude $\mathcal{F}_A[\mu, L, M](x)$ $= \mathcal{RN}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{RN}\mathcal{I}[1, M]$ $\mathcal{LMG}_{1,1}^{1,1}\left(x \left \begin{smallmatrix} M & \ddots \\ L & \ddots \end{smallmatrix}, \mu, 2 \right.\right)$	$\frac{2}{\mu} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \sqrt{\frac{L}{M}} \frac{\left(\sqrt{\frac{L}{M}} \frac{x}{\mu}\right)^{2L-1}}{\left(1 + \left(\sqrt{\frac{L}{M}} \frac{x}{\mu}\right)^2\right)^{L+M}}$	$\frac{2}{\mu} \sqrt{\frac{L}{M}} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \overline{G}_{1,1}^{1,1}\left(\left(\frac{\sqrt{L}x}{\sqrt{M}\mu}\right)^2 \left \begin{smallmatrix} -M + \frac{1}{2} & & \\ L - \frac{1}{2} & & \\ & & \ddots \end{smallmatrix} \right.\right)$

6.4.5 Lois généralisées usuelles

Lois généralisées		
Lois	formulation classique	formulation Meijer
loi Gamma Généralisée $\mathcal{GG}[\mu, L, \eta]$ $\mathcal{LMG}_{0,1}^{1,0} \left(x \left \begin{array}{c} \cdot \\ L \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} , \mu, \eta \right) \right)$	$\frac{ \eta }{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{\Gamma(L)} \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu} \right)^{\eta L - 1} e^{-\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu} \right)^{\eta}}$	$\frac{ \eta }{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{\Gamma(L)} \overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu} \right)^{\eta} \left \begin{array}{c} \cdot \\ L - \frac{1}{\eta} \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \right)$
loi de Fisher généralisée $\mathcal{FG}[\mu, L, M, \eta]$ $\mathcal{LMG}_{1,1}^{1,1} \left(x \left \begin{array}{c} M \\ L \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} , \mu, \eta \right) \right)$	$\frac{\eta}{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{M^{\frac{1}{\eta}}} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu} \right)^{\eta L - 1}}{\left(1 + \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu} \right)^{\eta} \right)^{L+M}}$	$\frac{\eta}{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{M^{\frac{1}{\eta}}} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \overline{G}_{1,1}^{1,1} \left(\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu} \right)^{\eta} \left \begin{array}{c} -M + \frac{1}{\eta} \\ L - \frac{1}{\eta} \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \right)$
loi Beta généralisée $\mathcal{BG}[\mu, L, M, \eta]$ $\mathcal{LMG}_{1,1}^{1,0} \left(x \left \begin{array}{c} \cdot \\ L \end{array} ; \begin{array}{c} M \\ \cdot \end{array} , \mu, \eta \right) \right)$	$\frac{\eta}{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{M^{\frac{1}{\eta}}} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu} \right)^{\eta L - 1} \left(1 - \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu} \right)^{\eta} \right)^{M-L-1}$	$\frac{\eta}{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{M^{\frac{1}{\eta}}} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)} \overline{G}_{1,1}^{1,0} \left(\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu} \right)^{\eta} \left \begin{array}{c} \cdot \\ L - \frac{1}{\eta} \end{array} ; \begin{array}{c} M - \frac{1}{\eta} \\ \cdot \end{array} \right) \right)$

7 Fonctions de répartition des lois de Meijer

7.1 Cas général

Soit $p(x)$ une ddp⁺. Par définition, cette fonction vérifie deux propriétés fondamentales :

$$p(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$\int_0^\infty p(x) dx = 1$$

Il est très courant qu'étant donné une ddp⁺ $p(x)$, il existe une fonction $q(x)$ telle que :

$$q(x) = \int_0^x p(u) du$$

Cette fonction s'appelle loi de répartition de la ddp⁺ $p(x)$. Elle est croissante et vérifie les propriétés suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} q(x) = 0 \tag{66}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = 1 \tag{67}$$

$$\frac{dq(x)}{dx} = p(x) \tag{68}$$

Dans les cas les plus courants, on a aussi :

$$p(x)|_{x=0} = 0$$

$q(x)$ est donc une primitive de la ddp⁺ $p(x)$. Si $p(x)$ s'exprime comme une fonction de Meijer $\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{array} \right. ; \begin{array}{c} a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right)$, on peut appliquer indifféremment la relation 47 ou la relation 48 pour en proposer une primitive $q_M(x)$ qui est elle-même une fonction de Meijer $\overline{G}$. On peut utiliser deux formulations pour cette primitive :

$$q_M(x) = -\overline{G}_{p+1,q+1}^{m+1,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1 + 1, \dots, a_n + 1 \\ 0, b_1 + 1, \dots, b_m + 1 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} 1, a_{n+1} + 1, \dots, a_p + 1 \\ b_{m+1} + 1, \dots, b_q + 1 \end{array} \right)$$

et

$$q_M(x) = \overline{G}_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(x \left| \begin{array}{c} 1, a_1 + 1, \dots, a_n + 1 \\ b_1 + 1, \dots, b_m + 1 \end{array} \right. ; \begin{array}{c} a_{n+1} + 1, \dots, a_p + 1 \\ 0, b_{m+1} + 1, \dots, b_q + 1 \end{array} \right)$$

C'est donc une simple opération sur les indices et sur les paramètres qui permettent d'obtenir aisément les fonctions de répartition. Le paragraphe suivant donne la forme de ces fonctions de répartition dans les cas les plus courants de l'imagerie cohérente, ce qui peut permettre de nouvelles techniques de simulation de chatoiement.

7.2 Fonctions de répartition des lois usuelles

Lois à deux paramètres		
Lois	formulation Meijer	fonction de répartition
loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L](x)$ $\mathcal{LM}_{0,1}^{1,0}\left(x \left \begin{smallmatrix} \cdot & ; & \cdot \\ L & ; & \cdot \end{smallmatrix} \right., \mu\right)$	$\frac{L}{\mu} \frac{1}{\Gamma(L)} \overline{G}_{0,1}^{1,0}\left(\frac{Lx}{\mu} \left \begin{smallmatrix} \cdot & ; & \cdot \\ L-1 & ; & \cdot \end{smallmatrix} \right.\right)$	$\frac{1}{\Gamma(L)} \overline{G}_{1,2}^{1,1}\left(\frac{Lx}{\mu} \left \begin{smallmatrix} 1 & ; & \cdot \\ L & ; & 0 \end{smallmatrix} \right.\right)$
loi Gamma Inverse $\mathcal{GI}[\mu, M](x)$ $\mathcal{LM}_{1,0}^{0,1}\left(x \left \begin{smallmatrix} M & ; & \cdot \\ \cdot & ; & \cdot \end{smallmatrix} \right., \mu\right)$	$\frac{M}{\mu} \frac{1}{\Gamma(M)} \overline{G}_{1,0}^{0,1}\left(\frac{Mx}{\mu} \left \begin{smallmatrix} -M & ; & \cdot \\ \cdot & ; & \cdot \end{smallmatrix} \right.\right)$	$\frac{1}{\Gamma(M)} \overline{G}_{2,1}^{0,2}\left(\frac{x}{M\mu} \left \begin{smallmatrix} 1, -M+1 & ; & \cdot \\ \cdot & ; & 1 \end{smallmatrix} \right.\right)$
loi K $\mathcal{K}[\mu, L, M](x)$ $\mathcal{LM}_{0,2}^{2,0}\left(x \left \begin{smallmatrix} \cdot & ; & \cdot \\ L, M & ; & \cdot \end{smallmatrix} \right., \mu\right)$	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{LM}{\mu} \overline{G}_{0,2}^{2,0}\left(\frac{LMx}{\mu} \left \begin{smallmatrix} \cdot & ; & \cdot \\ L-1, M-1 & ; & \cdot \end{smallmatrix} \right.\right)$	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \overline{G}_{1,3}^{2,1}\left(\frac{LMx}{\mu} \left \begin{smallmatrix} 1 & ; & \cdot \\ L, M & ; & 0 \end{smallmatrix} \right.\right)$
loi K inverse $\mathcal{KI}[\mu, L, M](x)$ $\mathcal{LM}_{2,0}^{0,2}\left(x \left \begin{smallmatrix} L, M & ; & \cdot \\ \cdot & ; & \cdot \end{smallmatrix} \right., \mu\right)$	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{1}{LM\mu} \overline{G}_{2,0}^{0,2}\left(\frac{x}{LM\mu} \left \begin{smallmatrix} -L, -M & ; & \cdot \\ \cdot & ; & \cdot \end{smallmatrix} \right.\right)$	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \overline{G}_{3,1}^{0,3}\left(\frac{x}{LM\mu} \left \begin{smallmatrix} -L+1, -M+1, 1 & ; & \cdot \\ \cdot & ; & 0 \end{smallmatrix} \right.\right)$
loi de Fisher $\mathcal{F}[\mu, L, M](x)$ $= \mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[\mu, M]$ $\mathcal{LM}_{1,1}^{1,1}\left(x \left \begin{smallmatrix} M & ; & \cdot \\ L & ; & \cdot \end{smallmatrix} \right., \mu\right)$	$\frac{L}{M\mu} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \overline{G}_{1,1}^{1,1}\left(\frac{Lx}{M\mu} \left \begin{smallmatrix} -M & ; & \cdot \\ L-1 & ; & \cdot \end{smallmatrix} \right.\right)$	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \overline{G}_{2,2}^{1,2}\left(\frac{Lx}{M\mu} \left \begin{smallmatrix} 1, -M+1 & ; & \cdot \\ L & ; & 0 \end{smallmatrix} \right.\right)$
loi Beta $\mathcal{B}[\mu, L, M]$ $= \mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star}^{-1} \mathcal{G}[\mu, M]$ $\mathcal{LM}_{1,1}^{1,0}\left(x \left \begin{smallmatrix} \cdot & ; & M \\ L & ; & \cdot \end{smallmatrix} \right., \mu\right)$	$\frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)} \overline{G}_{1,1}^{1,0}\left(\frac{Lx}{M\mu} \left \begin{smallmatrix} \cdot & ; & M-1 \\ L-1 & ; & \cdot \end{smallmatrix} \right.\right)$	$\frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)} \overline{G}_{2,2}^{1,1}\left(\frac{Lx}{M\mu} \left \begin{smallmatrix} 1 & ; & M \\ L & ; & 0 \end{smallmatrix} \right.\right)$
loi Beta inverse $\mathcal{BI}[\mu, L, M]$ $= \mathcal{GI}[\mu, L] \hat{\star}^{-1} \mathcal{GI}[\mu, M]$ $\mathcal{LM}_{1,1}^{0,1}\left(x \left \begin{smallmatrix} L & ; & \cdot \\ \cdot & ; & M \end{smallmatrix} \right., \mu\right)$	$\frac{M}{L\mu} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)} \overline{G}_{1,1}^{0,1}\left(\frac{Mx}{L\mu} \left \begin{smallmatrix} -L & ; & \cdot \\ \cdot & ; & -M \end{smallmatrix} \right.\right)$	$\frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)} \overline{G}_{2,2}^{0,2}\left(\frac{Mx}{L\mu} \left \begin{smallmatrix} -L+1, 1 & ; & \cdot \\ \cdot & ; & -M+1, 0 \end{smallmatrix} \right.\right)$

Le passage aux lois généralisées (incluant donc le paramètre η tel que $u = v^\eta$) serait tout à fait possible, vu ce formalisme unificateur des fonctions de Meijer : en pratique, pour une simulation, il est peut être plus réaliste d'effectuer un tirage dans cette gamme de lois standards

et d'en prendre ensuite la puissance $\frac{1}{\eta}$.

7.3 Exemples de fonction de répartition

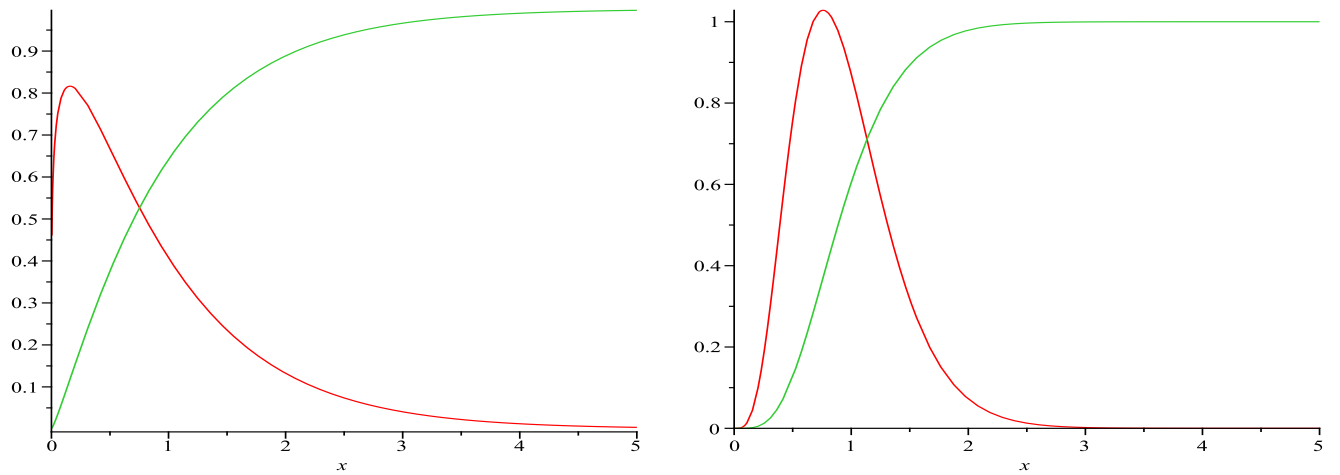


FIG. 1 – Loi Gamma et sa fonction de répartition. A gauche : loi Gamma avec $\mu = 0.95$ et $L = 1.2$. A droite : loi Gamma avec $\mu = 0.95$ et $L = 5$.

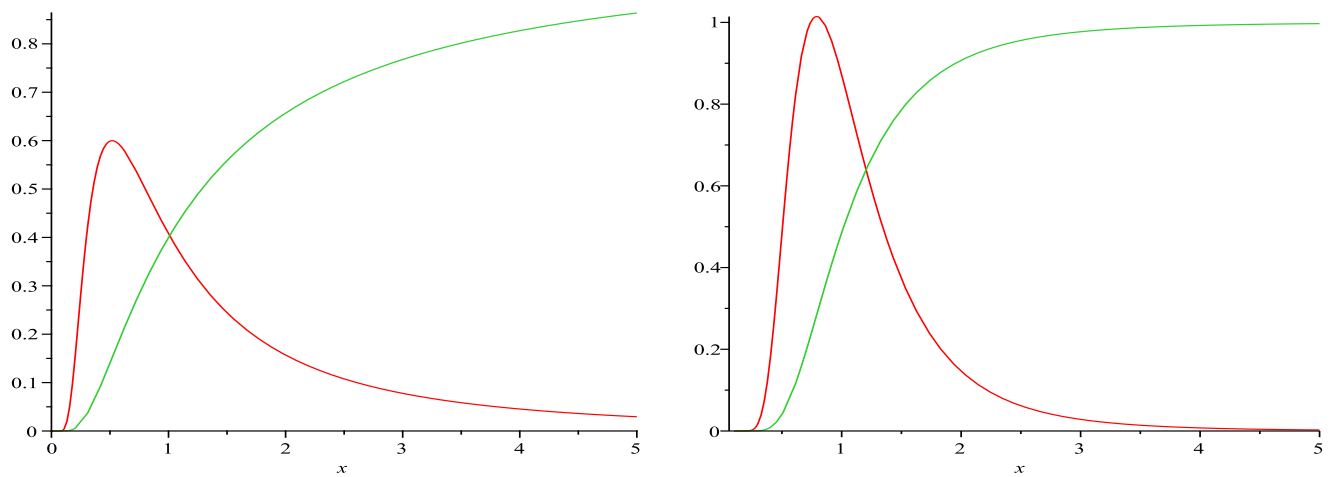


FIG. 2 – Loi Gamma Inverse et sa fonction de répartition. A gauche : loi Gamma Inverse avec $\mu = 0.95$ et $L = 1.2$. A droite : loi Gamma Inverse avec $\mu = 0.95$ et $L = 5$.

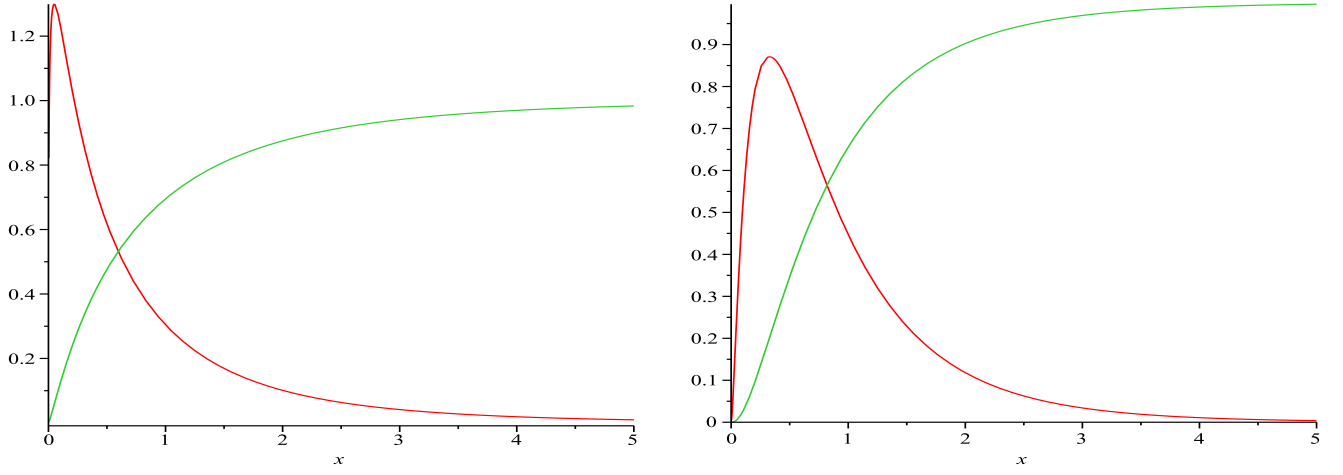


FIG. 3 – Loi $\mathcal{K}$ et sa fonction de répartition. A gauche : loi $\mathcal{K}$ avec $\mu = 0.95$, $L = 1.4$ et $M = 1.8$. A droite : loi $\mathcal{K}$ avec $\mu = 0.95$, $L = 3$ et $M = 3$.

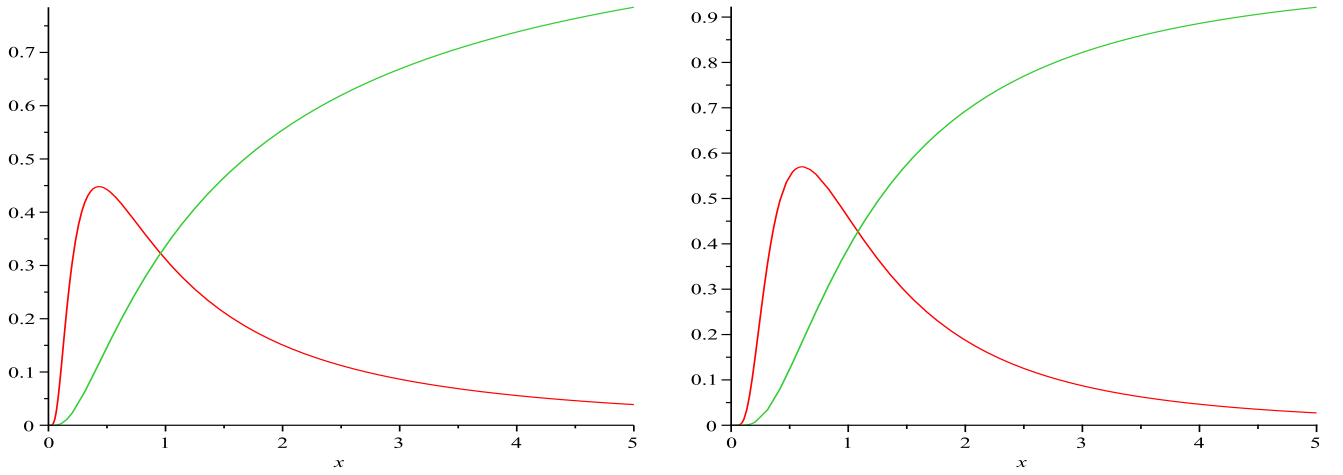


FIG. 4 – Loi $\mathcal{KI}$ et sa fonction de répartition. A gauche : loi $\mathcal{KI}$ avec $\mu = 0.95$, $L = 1.4$ et $M = 1.8$. A droite : loi $\mathcal{KI}$ avec $\mu = 0.95$, $L = 3$ et $M = 3$.

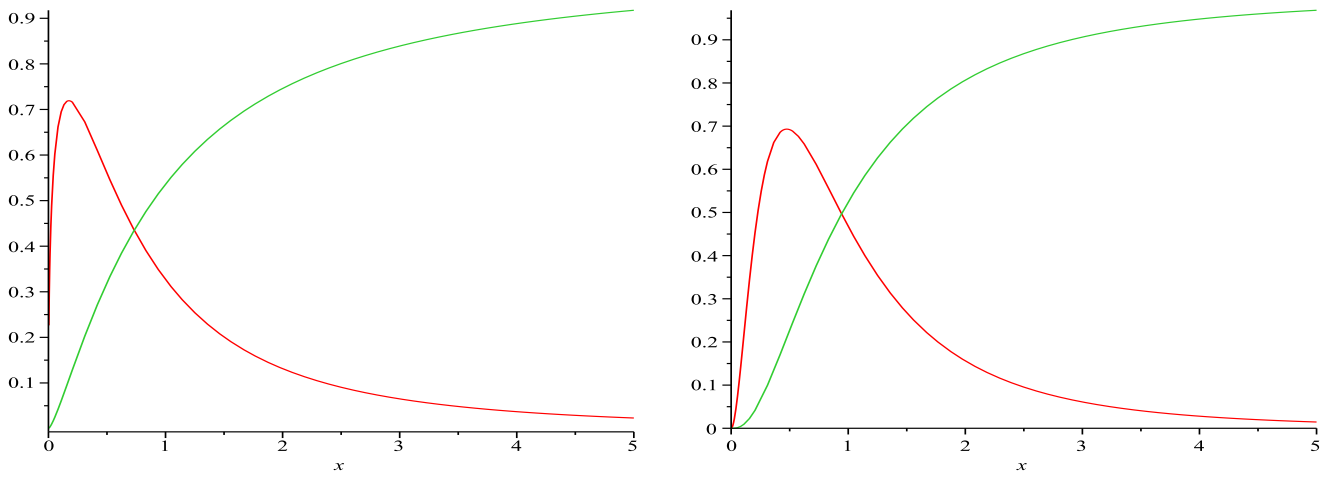


FIG. 5 – Loi de Fisher et sa fonction de répartition. A gauche : loi $\mathcal{F}$ avec $\mu = 0.95$, $L = 1.4$ et $M = 1.8$. A droite : loi $\mathcal{F}$ avec $\mu = 0.95$, $L = 3$ et $M = 3$.

8 Applications : produits, quotient et moyenne géométrique

Par son formalisme simplificateur, les lois de Meijer permettent d'aborder des problèmes encore ouverts de nos jours. En particulier, nous allons dans ce paragraphe aborder les points suivants :

- La caractérisation de la loi suivie par un produit de variables aléatoires suivant une loi de Meijer. Jusqu'à présent, seuls quelques cas particuliers pouvaient être abordés sous forme analytique (voir par exemple [12]). Nous verrons que l'on obtient simplement une loi de Meijer.
- De même nous verrons que la loi suivie par un rapport de variables aléatoires suivant une loi de Meijer est aussi une loi de Meijer.
- Enfin, la modélisation des lois observées à la suite d'une opération de moyenne géométrique peut s'aborder grâce aux lois de Meijer. Il sera alors possible de caractériser les lois de la moyenne géométrique jusqu'à présent –et sauf erreur– non encore identifiées. Ceci ouvrira des perspectives nouvelles en imagerie cohérente où, à présent, seule la moyenne arithmétique est utilisée pour les données en intensité car la loi Gamma vérifie très curieusement le théorème d'addition, ce qui est rappelé brièvement en annexe B.

8.1 Produit de variables aléatoires

8.1.1 Cas général

Soit une variable aléatoire y définie comme le produit de N variables aléatoires x_i :

$$y = \prod_{i=1}^N x_i$$

si chaque variable aléatoire x_i a comme d.d.p. $p_{x_i}(u)$ et comme fonctions caractéristiques de deuxième espèce $\phi_{x,i}(s)$ et $\psi_{x,i}(s)$, on sait alors que

- la d.d.p. de y , $p_y(u)$, vérifie :

$$p_y(u) = p_{x_1}(u) \hat{\star} p_{x_2}(u) \hat{\star} p_{x_3}(u) \hat{\star} \dots \hat{\star} p_{x_N}(u)$$

avec $\hat{\star}$ désignant la convolution de Mellin.

- la première fonction caractéristique de deuxième espèce de p_y , $\phi_y(s)$, vérifie :

$$\phi_y(s) = \prod_{i=1}^N \phi_{x,i}(s)$$

- la seconde fonction caractéristique de deuxième espèce de p_y , $\psi_y(s)$, vérifie :

$$\psi_y(s) = \sum_{i=1}^N \psi_{x,i}(s)$$

En règle générale, on sait peu de choses sur la loi du produit : ce n'est que dans certains cas précis que cette loi porte un nom (comme la loi K ou la loi de Fisher).

Or, si la loi de chaque variable x_i s'exprime comme une loi de Meijer $\mathcal{LM}_i$, la loi suivie par y est alors une loi de Meijer puisque l'on sait que la convolution de Mellin est une loi interne pour les lois de Meijer. Cette propriété unique des lois de Meijer va donner un éclairage nouveau aux "lois produit" (ainsi que dans le cadre de rapport de variables aléatoires et des "lois rapport" comme nous le verrons dans un prochain paragraphe) dès lors que ces variables aléatoires sont modélisées par une loi de Meijer.

8.1.2 Produits de variables aléatoires suivant la même loi de distribution

Si la variable aléatoire y définie comme le produit de N variables aléatoires x_i :

$$y = \prod_{i=1}^N x_i$$

ayant la même d.d.p. $p_{x_i}(u) = p_x(u)$, on a alors :

- la d.d.p. de y , $p_y(u)$, vérifie :

$$p_y(u) = p_x(u) \hat{\star} p_x(u) \hat{\star} p_x(u) \hat{\star} \dots \hat{\star} p_x(u)$$

- la première fonction caractéristique de deuxième espèce de p_y , $\phi_y(s)$, vérifie :

$$\phi_y(s) = (\phi_x(s))^N$$

Cette expression ne permet pas de déduire simplement les log-moments, hormis les deux premiers :

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{y,1} &= N \tilde{m}_{x,1} \\ \tilde{m}_{y,2} &= N \tilde{m}_{x,2} + N(N-1) \tilde{m}_{x,1}^2 \end{aligned}$$

ce qui donne au passage une relation très simple pour le log-moment normalisé d'ordre 2 :

$$\tilde{M}_{y,2} = N \tilde{M}_{x,2}$$

- la seconde fonction caractéristique de deuxième espèce de p_y , $\psi_y(s)$, vérifie :

$$\psi_y(s) = N \psi_x(s)$$

ce qui permet d'obtenir les log-cumulants :

$$\tilde{\kappa}_y(r) = N \tilde{\kappa}_x(r)$$

8.1.3 Produits de variables aléatoires suivant des lois de Meijer

Dans le cadre des lois de Meijer, on sait donc que la loi produit est une loi de Meijer : sa forme analytique est directement donnée par la relation 55. On peut ainsi donner directement des exemples à partir des lois usuelles définies sur $\mathbb{R}^+$ (voir le paragraphe 6.4 pour les expressions des lois usuelles sous forme de loi de Meijer et donc de fonctions de Meijer) :

- Cas de deux lois Gamma : produit d'une variable suivant la loi $\mathcal{G}[\mu_1, L]$ avec une variable suivant la loi $\mathcal{G}[\mu_2, M]$:

$$\mathcal{LM}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{ccc} \cdot & ; & \cdot \\ L & ; & \cdot \end{array} , \mu_1 \right. \right) \hat{\star} \mathcal{LM}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{ccc} \cdot & ; & \cdot \\ M & ; & \cdot \end{array} , \mu_2 \right. \right) = \mathcal{LM}_{0,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{ccc} \cdot & ; & \cdot \\ L, M & ; & \cdot \end{array} , \mu_1 \mu_2 \right. \right)$$

et on sait que l'on a alors la loi $\mathcal{K}[\mu_1 \mu_2, L, M]$

- Cas de deux lois Gamma Inverse : produit d'une variable suivant une loi $\mathcal{GI}[\mu_1, L]$ avec une variable suivant une loi $\mathcal{GI}[\mu_2, M]$:

$$\mathcal{LM}_{1,0}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{ccc} L & ; & \cdot \\ \cdot & ; & \cdot \end{array} , \mu_1 \right. \right) \hat{\star} \mathcal{LM}_{1,0}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{ccc} M & ; & \cdot \\ \cdot & ; & \cdot \end{array} , \mu_2 \right. \right) = \mathcal{LM}_{2,0}^{0,2} \left(x \left| \begin{array}{ccc} L, M & ; & \cdot \\ \cdot & ; & \cdot \end{array} , \mu_1 \mu_2 \right. \right)$$

et on sait que l'on a alors la loi K inverse $\mathcal{KI}[\mu_1 \mu_2, L, M]$

- Produit d’une variable suivant une loi Gamma $\mathcal{G}[\mu_1, L]$ avec une variable suivant une loi Gamma Inverse $\mathcal{GI}[\mu_2, M]$:

$$\mathcal{LM}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \mu_1 \right) \hat{\star} \mathcal{LM}_{0,1}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{c} M \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \mu_2 \right) = \mathcal{LM}_{1,1}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{c} M \\ L \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \mu_1 \mu_2 \right) \right.$$

et on sait que l’on a alors la loi de Fisher $\mathcal{F}[\mu_1 \mu_2, L, M]$

- Produit d’une variable suivant une loi $\mathcal{K}[\mu_1, L, M]$ avec une variable suivant une loi Gamma $\mathcal{G}[\mu_2, N]$:

$$\mathcal{LM}_{0,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L, M \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \mu_1 \right) \hat{\star} \mathcal{LM}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ N \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \mu_2 \right) = \mathcal{LM}_{0,3}^{3,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L, M, N \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \mu_1 \mu_2 \right) \right.$$

et on reconnaît une loi inusitée (appelée “super-K” dans [11]).

- produit d’une variable suivant une loi Gamma $\mathcal{G}[\mu_1, L]$ avec une variable suivant la loi Beta $\mathcal{B}[\mu_2, M, N]$:

$$\mathcal{LM}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \mu_1 \right) \hat{\star} \mathcal{LM}_{1,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ M \end{array} ; \begin{array}{c} N \\ \cdot \end{array}, \mu_2 \right) = \mathcal{LM}_{1,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L, M \end{array} ; \begin{array}{c} N \\ \cdot \end{array}, \mu_1 \mu_2 \right) \right.$$

et on reconnaît la loi $W Q_W[\mu_1 \mu_2, L, M, N]$.

- produit d’une variable suivant une loi Gamma $\mathcal{G}[\mu_1, L]$ avec une variable suivant la loi de Fisher $\mathcal{F}[\mu_2, M, N]$:

$$\mathcal{LM}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \mu_1 \right) \hat{\star} \mathcal{LM}_{1,1}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{c} N \\ M \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \mu_2 \right) = \mathcal{LM}_{1,2}^{2,1} \left(x \left| \begin{array}{c} N \\ L, M \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \mu_1 \mu_2 \right) \right.$$

et on reconnaît la loi $U Q_U[\mu_1 \mu_2, L, M, N]$.

- produit d’une variable suivant une loi Gamma $\mathcal{G}[\mu_1, L]$ avec une variable suivant la loi Beta Inverse $\mathcal{BI}[\mu_2, M, N]$:

$$\mathcal{LM}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \mu_1 \right) \hat{\star} \mathcal{LM}_{1,1}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{c} M \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ N \end{array}, \mu_2 \right) = \mathcal{LM}_{1,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{c} M \\ L \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ N \end{array}, \mu_1 \mu_2 \right) \right.$$

et on reconnaît la loi $Z Q_Z[\mu_1 \mu_2, L, M, N]$.

On pourrait ainsi formellement étudier tous les cas. Cependant trois cas de lois à 4 paramètres présentent un intérêt complémentaire des cas étudiés pour l’imagerie cohérente :

- Cas de deux lois K : produit d’une variable suivant une loi $\mathcal{K}[\mu_1, L_1, M_1]$ avec une variable suivant une loi $\mathcal{K}[\mu_2, L_2, M_2]$:

$$\begin{aligned} & \mathcal{LM}_{0,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L_1, M_1 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \mu_1 \right) \hat{\star} \mathcal{LM}_{0,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L_2, M_2 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \mu_2 \right) \\ &= \mathcal{LM}_{0,4}^{4,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L_1, L_2, M_1, M_2 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \mu_1 \mu_2 \right) \end{aligned} \quad (69)$$

- Cas de deux lois de Fisher : produit d’une variable suivant une loi $\mathcal{F}[\mu_1, L_1, M_1]$ avec une variable suivant une loi $\mathcal{F}[\mu_2, L_2, M_2]$:

$$\begin{aligned} & \mathcal{LM}_{1,1}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{c} M_1 \\ L_1 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \mu_1 \right) \hat{\star} \mathcal{LM}_{1,1}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{c} M_2 \\ L_2 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \mu_2 \right) \\ &= \mathcal{LM}_{2,2}^{2,2} \left(x \left| \begin{array}{c} M_1, M_2 \\ L_1, L_2 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \mu_1 \mu_2 \right) \end{aligned} \quad (70)$$

Cette dernière expression est à comparer avec le résultat “classique” (formule 74, tirée du rapport [12]).

- Cas de deux lois Beta : produit d’une variable suivant une loi $\mathcal{B}[\mu_1, L_1, M_1]$ avec une variable suivant une loi $\mathcal{B}[\mu_2, L_2, M_2]$:

$$\begin{aligned} & \mathcal{LM}_{1,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L_1 \end{array} ; \begin{array}{c} M_1 \\ \cdot \end{array}, \mu_1 \right) \right) \hat{\star} \mathcal{LM}_{1,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L_2 \end{array} ; \begin{array}{c} M_2 \\ \cdot \end{array}, \mu_2 \right) \right) \\ &= \mathcal{LM}_{2,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L_1, L_2 \end{array} ; \begin{array}{c} M_1, M_2 \\ \cdot \end{array}, \mu_1 \mu_2 \right) \right) \end{aligned} \quad (71)$$

Cette dernière expression est à comparer avec le résultat “classique” (voir le rapport [12]).

8.1.4 Produits de deux variables aléatoires suivant la même loi de distribution

Si les deux variables suivent la même loi $\mathcal{K}[\mu, L, M]$, l’expression 69 s’écrit alors :

$$\mathcal{LM}_{0,4}^{4,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L, L, M, M \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \mu^2 \right) \right) \quad (72)$$

On obtient ainsi la relation donnant l’expression de la loi suivie par un produit deux variables aléatoires suivant la même loi K :

$$\begin{aligned} & \mathcal{LM}_{0,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L, M \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \mu \right) \right) \hat{\star} \mathcal{LM}_{0,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L, M \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \mu \right) \right) \\ &= \left(\frac{LM}{\mu} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \right)^2 \overline{G}_{0,4}^{4,0} \left(\left(\frac{LM}{\mu} \right)^2 x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L-1, L-1, M-1, M-1 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \right) \end{aligned}$$

On sait qu’il n’y a pas de forme analytique “classique” pour cette fonction de Meijer.

Si les deux variables suivent la même loi de Fisher $\mathcal{F}[\mu, L, M]$, l’expression 70 s’écrit alors :

$$\mathcal{LM}_{2,2}^{2,2} \left(x \left| \begin{array}{c} M, M \\ L, L \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \mu \right) \right)$$

On obtient ainsi la relation donnant l’expression de la loi suivie par un produit deux variables aléatoires suivant la même loi de Fisher :

$$\begin{aligned} & \mathcal{LM}_{1,1}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{c} M \\ L \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \mu \right) \right) \hat{\star} \mathcal{LM}_{1,1}^{1,1} \left(x \left| \begin{array}{c} M \\ L \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \mu \right) \right) \\ &= \left(\frac{L}{M\mu} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \right)^2 \overline{G}_{2,2}^{2,2} \left(\left(\frac{L}{M\mu} \right)^2 x \left| \begin{array}{c} -M, -M \\ L-1, L-1 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \right) \end{aligned} \quad (73)$$

Dans le cas de deux lois de Fisher quelconques, il existe une autre formulation de la loi produit $\mathcal{PF}$. En effet, sans faire appel au formalisme des fonctions de Meijer, on peut montrer le résultat suivant [12] :

$$\begin{aligned} \mathcal{PF} &= \frac{\Gamma(L_1 + M_1) \Gamma(L_2 + M_2)}{\Gamma(L_1) \Gamma(M_1) \Gamma(L_2) \Gamma(M_2)} \frac{\Gamma(L_1 + M_2) \Gamma(M_1 + L_2)}{\Gamma(L_1 + L_2 + M_1 + M_2)} \frac{L_1 L_2}{M_1 M_2 \mu_1 \mu_2} \\ & \left(\frac{L_1 L_2}{M_1 M_2 \mu_1 \mu_2} x \right)^{L_1 - 1} {}_2F_1 \left(L_1 + M_1, L_1 + M_2; L_1 + L_2 + M_1 + M_2; 1 - \frac{L_1 L_2}{M_1 M_2 \mu_1 \mu_2} x \right) \end{aligned} \quad (74)$$

Si les deux lois de Fisher sont identiques, on obtient alors :

$$\mathcal{PF} = \frac{(\Gamma(L + M))^2}{\Gamma(2L + 2M)} \left(\frac{\Gamma(L + M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{L}{M\mu} \right)^2 \left(\frac{L^2}{M^2 \mu^2} x \right)^{L-1} {}_2F_1 \left(L + M, L + M; 2L + 2M; 1 - \frac{L^2}{M^2 \mu^2} x \right) \quad (75)$$

Il est assez remarquable que les deux expressions 73 et 75 soient identiques...

8.2 Rapport de deux variables aléatoires

8.2.1 Cas général

Soient deux variables aléatoires x_1 et x_2 , ayant comme d.d.p. $p_{x_1}(u)$ et $p_{x_2}(u)$. On considère la variable aléatoire y quotient de ces deux variables aléatoires :

$$y = \frac{x_1}{x_2}$$

On sait alors que la d.d.p. de $y : p_y(u)$ s'écrit :

$$p_y(u) = p_{x_1}(u) \hat{\star} p_{I,x_2}(u)$$

avec $p_{I,x_2}(u)$ la loi inverse de $p_{x_2}(u)$. Cela revient donc à traiter le produit suivant :

$$y = x_1 \frac{1}{x_2}$$

Le problème est donc identique à celui traité précédemment au sujet des produits de variable aléatoire.

Comme toute loi de Meijer a un inverse s'exprimant comme une loi de Meijer, il semble certain que, dans le cadre des "lois rapport", le formalisme de Meijer apportera là aussi, une grande souplesse.

8.2.2 Rapport de deux variables aléatoires suivant une loi de Fisher

Considérons deux variables aléatoires suivant une loi de Fisher, soit $\mathcal{F}[\mu_1, L_1, M_1]$ et $\mathcal{F}[\mu_2, L_2, M_2]$, c'est à dire les lois de Meijer $\mathcal{LM}_{1,1}^{1,1}\left(x \left| \begin{matrix} M_1 & ; & \cdot \\ L_1 & ; & \cdot \end{matrix}, \mu_1 \right.\right)$ et $\mathcal{LM}_{1,1}^{1,1}\left(x \left| \begin{matrix} M_2 & ; & \cdot \\ L_2 & ; & \cdot \end{matrix}, \mu_2 \right.\right)$.

Comme la loi de Fisher inverse d'une loi $\mathcal{F}[\mu, L, M]$ est la loi de Fisher $\mathcal{F}[\mu, M, L]$, la loi du quotient de ces deux variables s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{RF} &= \mathcal{LM}_{1,1}^{1,1}\left(x \left| \begin{matrix} M_1 & ; & \cdot \\ L_1 & ; & \cdot \end{matrix}, \mu_1 \right.\right) \hat{\star} \mathcal{LM}_{1,1}^{1,1}\left(x \left| \begin{matrix} M_2 & ; & \cdot \\ L_2 & ; & \cdot \end{matrix}, \mu_2 \right.\right) \\ &= \mathcal{LM}_{1,1}^{1,1}\left(x \left| \begin{matrix} M_1 & ; & \cdot \\ L_1 & ; & \cdot \end{matrix}, \mu_1 \right.\right) \hat{\star} \mathcal{LM}_{1,1}^{1,1}\left(x \left| \begin{matrix} L_2 & ; & \cdot \\ M_2 & ; & \cdot \end{matrix}, \mu_2^{-1} \right.\right) \\ &= \mathcal{LM}_{2,2}^{2,2}\left(x \left| \begin{matrix} L_2, M_1 & ; & \cdot \\ L_1, M_2 & ; & \cdot \end{matrix}, \mu_1 \mu_2^{-1} \right.\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(L_1)\Gamma(M_1)} \frac{1}{\Gamma(L_2)\Gamma(M_2)} \overline{G}_{2,2}^{2,2}\left(\frac{L_1 M_2 \mu_2}{M_1 L_2 \mu_1} x \left| \begin{matrix} -L_2, -M_1 & ; & \cdot \\ L_1 - 1, M_2 - 1 & ; & \cdot \end{matrix} \right.\right) \end{aligned} \quad (76)$$

Dans le cas de deux lois de Fisher, sans faire appel au formalisme des fonctions de Meijer, on peut aussi montrer le résultat suivant [12] :

$$\begin{aligned} \mathcal{RF} &= \frac{\Gamma(L_1 + M_1) \Gamma(L_2 + M_2)}{\Gamma(L_1)\Gamma(M_1)\Gamma(M_2)\Gamma(L_2)} \frac{\Gamma(L_1 + L_2)\Gamma(M_1 + M_2)}{\Gamma(L_1 + L_2 + M_1 + M_2)} \frac{L_1 M_2 \mu_2}{M_1 L_2 \mu_1} \\ &\quad \left(\frac{L_1 M_2 \mu_2}{M_1 L_2 \mu_1} x\right)^{L_1-1} {}_2F_1\left(L_1 + M_1, L_1 + L_2; L_1 + L_2 + M_1 + M_2; 1 - \frac{L_1 M_2 \mu_2}{M_1 L_2 \mu_1} x\right) \end{aligned} \quad (77)$$

Là aussi, il est assez remarquable que les deux expressions 76 et 77 soient identiques...

Si les deux lois sont identiques, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{RF} &= \frac{\Gamma(2L)\Gamma(2M)}{\Gamma(2L+2M)} \left(\frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \right)^2 x^{L-1} {}_2F_1(L+M, 2L; 2L+2M; 1-x) \\ &= \left(\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \right)^2 \overline{G}_{2,2}^{2,2} \left(x \left| \begin{array}{c} -L, -M \\ L-1, M-1 \end{array} \right. ; \cdot \right)\end{aligned}\quad (78)$$

8.3 Moyenne géométrique de variables aléatoires suivant la même loi de distribution

Soit une variable aléatoire z définie comme la moyenne géométrique de N variables aléatoires x_i identiques :

$$z = \left(\prod_{i=1}^N x_i \right)^{\frac{1}{N}}$$

Il est bien connu que la forme analytique de la ddp de z est en général inconnu (hormis le cas trivial de la loi log-normale). Or le formalisme des statistiques de Mellin permet d'obtenir directement un formalisme assez simple pour les log-moments. De plus, nous verrons qu'associé au formalisme des lois de Meijer il est possible d'obtenir assez simplement l'expression analytique de la ddp de cette variable aléatoire.

Pour cela, considérons d'abord la variable aléatoire $x' = \prod_{i=1}^N x_i$. Si la variable aléatoire x a pour fonction caractéristique de deuxième espèce la fonction $\phi_x(s)$, la fonction caractéristique de deuxième espèce de x' s'écrit :

$$\phi_{x'}(s) = \prod_{i=1}^N \phi_x(s) = (\phi_x(s))^N$$

Ensuite, on peut considérer la variable aléatoire z comme la racine N -ème de x , et on sait alors que sa fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit alors :

$$\phi_z(s) = \phi_{x'}\left(\frac{s+N-1}{N}\right) = \left(\phi_x\left(\frac{s+N-1}{N}\right)\right)^N$$

Cette expression ne permet pas de déduire simplement tous les log-moments ; cependant seuls les deux premiers ont une expression assez simple :

$$\begin{aligned}\tilde{m}_{z,1} &= \tilde{m}_{x,1} \\ \tilde{m}_{z,2} &= \frac{1}{N} \tilde{m}_{x,2} + \frac{(N-1)}{N} \tilde{m}_{x,1}^2\end{aligned}$$

ce qui donne au passage une relation très simple pour le log-moment normalisé d'ordre 2 :

$$\tilde{M}_{z,2} = \frac{1}{N} \tilde{M}_{x,2}$$

La seconde fonction caractéristique de deuxième espèce de p_z , $\psi_z(s)$, vérifie :

$$\psi_z(s) = N \psi_x\left(\frac{s+N-1}{N}\right)$$

ce qui permet d'obtenir les log-cumulants, qui ont tous une expression simple en fonction des log-cumulants de x :

$$\tilde{\kappa}_{y(r)} = \left(\frac{1}{N} \right)^{(r-1)} \tilde{\kappa}_{x(r)} \quad (79)$$

8.3.1 Exemple de la loi log-normale

On dit que la variable aléatoire x définie sur $\mathbb{R}^+$ suit la loi log-normale $\mathcal{L}[\mu, \sigma]$ si sa densité de probabilité $p_x(u)$ vérifie l'expression suivante :

$$p_x(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}u} e^{\left(-\frac{(\log u - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \quad u > 0 \quad (80)$$

Les fonctions caractéristiques de deuxième espèce de la loi log-normale s'écrivent :

$$\begin{aligned} \phi_x(v) &= e^{\mu(s-1)} e^{\left(\sigma^2 \frac{(s-1)^2}{2}\right)} \\ \psi_x(v) &= \mu(s-1) + \sigma^2 \frac{(s-1)^2}{2} \end{aligned}$$

La variable aléatoire z définie comme la moyenne géométrique de N variables aléatoires suivant la même loi log-normale (relation 80) a pour première fonction caractéristique :

$$\begin{aligned} \phi_z(s) &= \left(\phi_x\left(\frac{s+N-1}{N}\right) \right)^N \\ &= \left(e^{\mu\left(\frac{s-1}{N}\right)} \right)^N \left(e^{\left(\sigma^2 \frac{\left(\frac{s-1}{N}\right)^2}{2}\right)} \right)^N \\ &= e^{\mu(s-1)} e^{\left(\left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)^2 \frac{(s-1)^2}{2}\right)} \end{aligned}$$

On a donc à nouveau une d.d.p. suivant une loi log-normale, qui est $\mathcal{L}\left[\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right]$.

Par analogie avec le cas "classique" (statistique de Fourier), on dira que la loi log-normale suit le théorème de multiplication.

Cette propriété peut aussi se constater à partir des log-cumulants puisque l'on a dans ce cas :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_{z(1)} &= \mu \\ \tilde{\kappa}_{z(2)} &= \left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)^2 \\ \tilde{\kappa}_{z(n)} &= 0 \quad \forall n \geq 3 \end{cases}$$

et le fait d'avoir tous les log-cumulants nuls à partir de l'ordre 3 est la propriété des lois log-normales.

8.3.2 Exemple de la loi Gamma

Soit la loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L]$:

$$\mathcal{G}[\mu, L](u) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{Lu}{\mu}\right)^{L-1} e^{-\frac{Lu}{\mu}}$$

Sa première fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit :

$$\phi_{\mathcal{G}}(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \quad (81)$$

Les log-cumulants de $\mathcal{G}[\mu, L]$ s'expriment selon les relations suivantes (avec Ψ fonction Digamma et $\Psi(r, L)$ fonction Polygamma, *i.e.* la dérivée r -ème de la fonction Digamma) :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_{x(1)} &= \log(\mu) + \Psi(L) - \log(L) \\ \tilde{\kappa}_{x(2)} &= \Psi(1, L) \\ \tilde{\kappa}_{x(r)} &= \Psi(r-1, L) \quad \forall r > 1 \end{cases} \quad (82)$$

Si l'on veut connaître la loi suivie par la moyenne géométrique de variables aléatoires suivant la même loi Gamma, il est instructif d'analyser les log-cumulants. En effet, pour la variable aléatoire y définie comme la moyenne géométrique de N variables aléatoires x_i suivant la loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L]$, en utilisant la relation 79, on en déduit les log-cumulants :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_{y(1)} &= \log(\mu) + \Psi(L) - \log(L) \\ \tilde{\kappa}_{y(2)} &= \frac{\Psi(1, L)}{N} \\ \tilde{\kappa}_{y(r)} &= \frac{\Psi(r-1, L)}{N^{r-1}} \quad \forall r > 1 \end{cases} \quad (83)$$

Or, étant donné les propriétés des fonctions Polygamma, on ne peut exhiber une variable M telle que :

$$\forall r \quad \frac{\Psi(r-1, L)}{N^{r-1}} = \Psi(r-1, M)$$

Donc la moyenne géométrique de variables suivant une loi Gamma n'est pas une loi Gamma. Si la loi Gamma vérifie le théorème d'addition, elle ne vérifie pas le théorème de multiplication.

La fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit :

$$\phi_z(s) = \mu^{s-1} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{s+NL-1}{N}\right)}{\Gamma(L)} \right)^N$$

On peut alors analyser le premier moment de la loi de la moyenne géométrique :

$$m_1 = \mu \left(\frac{\Gamma\left(\frac{NL+1}{N}\right)}{\Gamma(L)} \right)^N$$

La forme analytique de cette nouvelle variable peut s'obtenir sous forme d'une loi de Meijer. En effet, on connaît la forme analytique de la ddp suivie par le produit de N lois Gamma : c'est la loi de Meijer suivante :

$$\mathcal{LM}_{0,N}^{N,0} \left(x \left| \begin{matrix} \cdot \\ L, L, \dots, L \end{matrix} ; \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \end{matrix}, \mu^N \right. \right)$$

qui s'exprime comme :

$$\left(\frac{L}{\mu} \frac{1}{\Gamma(L)} \right)^N \overline{G}_{0,N}^{N,0} \left(\left(\frac{L}{\mu} \right)^N x \left| \begin{matrix} \cdot \\ L-1, L-1, \dots, L-1 \end{matrix} ; \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \end{matrix} \right. \right)$$

Grâce à la relation 59, on montre alors que la racine N -ème du produit suit alors tout simplement la loi suivante :

$$N \left(\frac{L}{\mu} \frac{1}{\Gamma(L)} \right)^N z^{N-1} \overline{G}_{0,N}^{N,0} \left(\left(\frac{L}{\mu} \right)^N z^N \left| \begin{matrix} \cdot \\ L-1, L-1, \dots, L-1 \end{matrix} ; \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \end{matrix} \right. \right)$$

et grâce à la relation 5, on obtient pour finir la relation suivante :

$$\text{MG}_{\mathcal{G}[\mu, L]}[N](z) = \frac{NL}{\mu} \left(\frac{1}{\Gamma(L)} \right)^N z^{N-1} \overline{G}_{0,N}^{N,0} \left(\left(\frac{L}{\mu} \right)^N z^N \left| \begin{matrix} \cdot \\ L - \frac{1}{N}, L - \frac{1}{N}, \dots, L - \frac{1}{N} \end{matrix} ; \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \end{matrix} \right. \right)$$

qu'il serait bien évidemment possible d'exprimer sous forme d'une loi de Meijer Généralisée.

Le mode de cette distribution peut s'obtenir de manière numérique. En effet, en utilisant la relation 39 donnant la dérivée d'une fonction de Meijer, on en déduit que le mode m_{mode} vérifie la relation implicite :

$$\overline{G}_{1,N+1}^{N,1} \left(\left(\frac{L}{\mu} \right)^N m_{mode} \left| \begin{array}{c} L - \frac{N+1}{N}, L - \frac{N+1}{N}, \dots, L - \frac{N+1}{N} \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right. \right) = 0$$

On peut alors calculer les valeurs du mode et du premier moments pour différentes valeurs de N . Le tableau suivant donne les valeurs dans le cas $L = 1$ (on a alors $\Psi(1) = -0.577$) :

Moyenne géométrique			
N	m_1	m_{mode}	$\tilde{m}_1$
2	0.785μ	0.298μ	$\log \mu - 0.577$
3	0.712μ	0.387μ	$\log \mu - 0.577$
4	0.675μ	0.432μ	$\log \mu - 0.577$
5	0.652μ	0.458μ	$\log \mu - 0.577$
6	0.637μ	0.475μ	$\log \mu - 0.577$

On vérifie que le premier log-moment est constant, que le premier moment décroît et que le mode croît (avec $m_{mode} < m_1$). On pourrait conjecturer que leur limite est commune et égale à $\mu e^{\Psi(L)}$ (soit, pour $L = 1$, 0.561μ).

Si l'on souhaite comparer moyenne géométrique et moyenne arithmétique, il faut tout d'abord remarquer que la loi vérifiée par la moyenne arithmétique de variables suivant une loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L]$ est la loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, NL]$ (voir annexe B.4) :

$$MA_{\mathcal{G}[\mu, L]}[N] = \mathcal{G}[\mu, NL]$$

Le premier moment, le premier log-moment et le mode de cette loi vérifient les expressions explicites suivantes :

$$\begin{aligned} m_1 &= \mu \\ \tilde{m}_1 &= \mu + \Psi(NL) - \log(NL) \\ m_{mode} &= \frac{NL - 1}{NL} \mu \end{aligned}$$

Il est alors aisé d'obtenir les valeurs suivantes pour $L = 1$:

Moyenne arithmétique			
N	m_1	m_{mode}	$\tilde{m}_1$
2	μ	0.500μ	$\log \mu - 0.270$
3	μ	0.666μ	$\log \mu - 0.176$
4	μ	0.750μ	$\log \mu - 0.130$
5	μ	0.800μ	$\log \mu - 0.103$
6	μ	0.833μ	$\log \mu - 0.086$

On démontre analytiquement que le moment d'ordre 1 est toujours égal à μ , que le mode converge vers μ et que le log-moment d'ordre 1 converge vers $\log(\mu)$.

Moyenne arithmétique et moyenne géométrique ont donc des comportements très différents. En effet, la moyenne arithmétique conserve le moment d'ordre 1 tandis que la moyenne géométrique conserve le log-moment d'ordre 1. Ceci a pour conséquence que, pour N tendant vers l'infini, le mode converge vers le paramètre μ pour la moyenne arithmétique tandis qu'il converge vers $\mu e^{\Psi(L)}$ dans le cas de la moyenne géométrique.

Pour comparer qualitativement ces deux lois, il est donc nécessaire de modifier le paramètre μ pour l'une des deux, faute de quoi elles ne convergeront pas vers le même Mellin-Dirac pour N tendant vers l'infini. Puisque les expressions analytiques du premier moment, du mode et du premier log-moment existent pour la moyenne arithmétique, ce sera donc cette dernière que nous allons modifier pour tracer les densités de probabilités. Nous choisirons comme loi illustrant la moyenne arithmétique de N variables la loi $\mathcal{G}[\mu', NL]$ avec $\mu' = \mu + \Psi(L) - \Psi(NL) + \log(NL)$: de cette manière, moyenne géométrique et moyenne arithmétique ont le même premier log-moment.

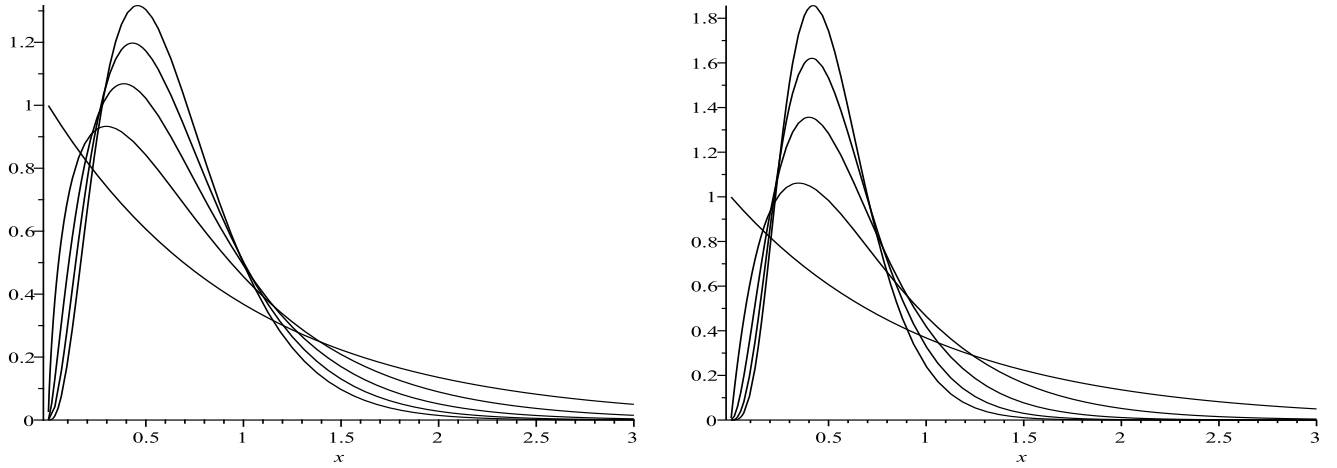


FIG. 6 – A gauche : moyenne géométrique de lois Gamma $\mathcal{G}[\mu, L]$ avec $\mu = 1$ et $L = 1$ pour N de 1 à 5. A droite : moyenne arithmétique de lois Gamma $\mathcal{G}[\mu', L]$ avec $\mu' = \mu + \Psi(L) - \Psi(NL) + \log(NL)$, $\mu = 1$ et $L = 1$ pour N de 1 à 5. Pour toutes ces lois, le premier log-moment est identique. La moyenne arithmétique semble mieux localisée que la moyenne géométrique pour une valeur de N donnée.

9 Généralisation dans $\mathbb{R}$: les “exp-lois”

9.1 Lois définies sur $\mathbb{R}$: passage en échelle exponentielle

9.1.1 Définition et propriété

Considérons une variable aléatoire x à densité de probabilité et à valeurs réelles positives. Soit $p_x(u)$ sa d.d.p., définie pour $u \in \mathbb{R}$. Sa fonction caractéristique (au sens classique du terme) s'écrit :

$$\Phi_x(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jrv} p_x(u) du. \quad (84)$$

Effectuons un passage en échelle exponentielle. La nouvelle variable aléatoire y est alors décrite par sa d.d.p. $f_y(v)$ définie pour $v \in \mathbb{R}^+$ avec $v = e^u$. Cette d.d.p. se déduit de p_x par la relation :

$$f_y(v) = \frac{p_x(\log v)}{v} \quad (85)$$

Calculons maintenant la fonction caractéristique de deuxième espèce de la variable aléatoire y :

$$\begin{aligned} \phi_y(s) &= \int_0^{+\infty} v^{s-1} f_y(v) dv \\ &= \int_0^{+\infty} e^{(s-1)\log v} \frac{p_x(\log v)}{v} dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(s-1)u} p_x(u) du \quad \text{avec } u = \log v \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(s-1)u} p_x(u) du
\end{aligned}$$

On reconnaît dans cette relation une transformée de Fourier –et plus précisément la fonction caractéristique (équation 84)– à condition de prendre $s - 1$ imaginaire pur. En posant $s = 1 + jr$, on en déduit :

$$\phi_y(s)|_{s=1+jr} = \Phi_x(r)$$

On en déduit donc que moments (obtenus par dérivation de la fonction caractéristique “classique”) et logmoments (obtenus par dérivation de la fonction caractéristique de deuxième espèce) auront des expressions analytiques identiques.

9.1.2 Un exemple : la loi lognormale

Ce passage d’une échelle sur $\mathbb{R}$ à une échelle sur $\mathbb{R}^+$ est une transformation classique pour la loi normale, puisque la loi résultante est connue sous le nom de loi lognormale.

Soit une loi normale $\mathcal{N}[\mu, \sigma]$, définie par sa d.d.p. :

$$\mathcal{N}[\mu, \sigma](u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Ses deux premiers moments s’écrivent :

$$\begin{cases} m_1 &= \mu \\ m_2 &= \mu^2 + \sigma^2 \end{cases}$$

A cette loi définie sur $\mathbb{R}$ correspond par passage en échelle exponentielle (relation 85) la loi lognormale $\mathcal{L}[\mu, \sigma]$, définie par sa d.d.p. :

$$\mathcal{L}[m, \sigma](v) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}v} e^{-\frac{(\log v - m)^2}{2\sigma^2}} \quad v > 0$$

avec $m = \log \mu$. Ses deux premiers log-moments s’écrivent :

$$\begin{cases} \tilde{m}_1 &= \mu \\ \tilde{m}_2 &= \mu^2 + \sigma^2 \end{cases}$$

9.1.3 Les log-lois

En généralisant cette appellation de lognormale, il est donc possible de définir, pour toute loi définie sur $\mathbb{R}$, de d.d.p. $p_x(u)$, une **logloi** attachée⁸, définie sur $\mathbb{R}^+$, de d.d.p. $f_y(v)$ par le changement de variable $v = e^u$. On a donc (équation 85) :

$$f_y(v) = \frac{p_x(\log v)}{v}$$

Connaissant les moments de la variable aléatoire x initiale, on en déduit directement les logmoments de la variable aléatoire y :

$$\begin{cases} \tilde{m}_{y,1} &= m_{x,1} \\ \tilde{m}_{y,2} &= m_{x,2} \\ \tilde{m}_{y,r} &= m_{x,r} \quad \forall r \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

⁸C’est l’usage qui a proposé cette appellation : la loi lognormale en étant l’exemple probablement fondateur

Soient deux variables aléatoires x_1 et x_2 , dont les d.d.p. sont $p(u)$ et $q(u)$. Nous avons vu que la somme de ces variables est une variable aléatoire dont la d.d.p. s'exprime comme la convolution de ces deux d.d.p. : $(p \star q)(u)$. Considérons les log-lois correspondantes : $f(v) = \frac{p(\log v)}{v}$ et $g(v) = \frac{q(\log v)}{v}$. Calculons leur transformée de Mellin :

$$\begin{aligned}
(f \hat{\star} g)(v) &= \int_0^\infty f(v') g\left(\frac{v}{v'}\right) \frac{dv'}{v'} \\
&= \int_0^\infty \frac{p(\log v')}{v'} \frac{q(\log \frac{v}{v'})}{\frac{v}{v'}} \frac{dv'}{v'} \\
&= \frac{1}{v} \int_0^\infty p(\log v') q\left(\log \left(\frac{v}{v'}\right)\right) \frac{dv'}{v'} \\
&= \frac{1}{v} \int_0^\infty p(\log v') q(\log v - \log v') \frac{dv'}{v'} \\
&= \frac{1}{v} \int_{-\infty}^\infty p(u') q(\log v - u') du' \\
&= \frac{1}{v} (p \star q)(\log v)
\end{aligned}$$

On a démontré la relation fondamentale suivante :

$$(f \hat{\star} g)(v) = \frac{(p \star q)(\log v)}{v} \quad (86)$$

Cette relation est du plus grand intérêt car, pour définir la fonction caractéristique d'une convolution de lois définies sur $\mathbb{R}$, *i.e.* la fonction caractéristique de deuxième espèce d'une convolution de Mellin de lois définies sur $\mathbb{R}^+$, il suffit de choisir, entre la convolution et la convolution de Mellin, celle qui conduit à la formulation analytique la plus simple à résoudre.

9.2 Lois définies sur $\mathbb{R}^+$: passage en échelle logarithmique

9.2.1 Définition et propriétés

Considérons donc une variable aléatoire y à densité de probabilité et à valeurs réelles positives. Soit $f_y(v)$ sa d.d.p., définie pour $v \in \mathbb{R}^+$. Sa fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit :

$$\phi_y(s) = \int_0^{+\infty} v^{s-1} f_y(v) dv.$$

Effectuons un passage en échelle logarithmique. La nouvelle variable aléatoire x est alors décrite par sa d.d.p. $p_x(u)$ définie pour $u \in \mathbb{R}$ avec $u = \log v$. Cette d.d.p. se déduit de f_y par la relation :

$$p_x(u) = e^u f_y(e^u). \quad (87)$$

Calculons maintenant la fonction caractéristique de la variable aléatoire x :

$$\begin{aligned}
\Phi_x(r) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iru} p_x(u) du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iru} e^u f_y(e^u) du \\
&= \int_0^{+\infty} e^{jr \log v} f_y(v) dv \quad \text{avec } v = e^u \\
&= \int_0^{+\infty} v^{jr} f_y(v) dv
\end{aligned}$$

On reconnaît alors dans cette dernière relation la fonction caractéristique de deuxième espèce de $f_y(v)$ en $s = 1 + jr$. D'où la relation :

$$\Phi_x(r) = \phi_y(s)|_{s=1+jr}$$

9.2.2 Les exp-lois

Si dans le cas précédent la littérature avait doté explicitement les lois transformées d'un préfixe (ne serait-ce que dans le cas unique de la loi normale), il n'en n'est rien dans le cadre de cette transformation. Aussi semble-t-il logique de proposer le préfixe **exp** pour caractériser de telles lois.

Pour toute loi définie sur $\mathbb{R}^+$, de d.d.p. $f_y(v)$, correspond une **exp-loi**, définie sur $\mathbb{R}$, de d.d.p. $p_x(u)$. On a donc (équation 87) :

$$p_x(u) = e^u f_y(e^u). \quad (88)$$

Connaissant les logmoments de la variable aléatoire y initiale, on en déduit directement les moments de la variable aléatoire x :

$$\begin{cases} m_{x,1} &= \tilde{m}_{y,1} \\ m_{x,2} &= \tilde{m}_{y,2} \\ m_{x,r} &= \tilde{m}_{y,r} \quad \forall r \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Donc, si l'on connaît les log-moments de la loi initiale, on peut se dispenser du calcul des moments de l'exp-loi correspondante.

Si l'on considère deux variables aléatoires y_1 et y_2 , nous avons vu que le produit de ces variables est une variable aléatoire dont la d.d.p. est la convolution de Mellin de leur d.d.p. :

$$(f \hat{\star} g)(v) = \int_0^\infty f(v') g\left(\frac{v}{v'}\right) \frac{dv'}{v'}$$

Par un raisonnement identique à celui mené au paragraphe 9.1.3, on montre :

$$(p \star q)(u) = e^u (f \hat{\star} g)(e^u). \quad (89)$$

9.2.3 Exp-lois fondamentale : la loi de Fisher Tipett

Soit une loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L]$

$$\mathcal{G}[\mu, L](u) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{Lu}{\mu}\right)^{L-1} e^{-\frac{Lu}{\mu}}$$

u appartenant à $\mathbb{R}^+$.

En posant $w = \log u$, on en déduit une nouvelle distribution, appelée loi de Fisher Tipett (du moins dans la communauté de l'imagerie Radar), définie sur $\mathbb{R}$, dont la d.d.p. $\mathcal{FT}[m, L]$ s'écrit (à l'aide de la relation 88) :

$$\mathcal{FT}[m, L](w) = \frac{L^L}{\Gamma(L)} e^{L(w-m)} e^{-Le^{w-m}} \quad (90)$$

Le paramètre m de la loi de Fisher Tipett vérifie $m = \log \mu$, c'est à dire $\mu = e^m$.

La fonction caractéristique de cette distribution s'obtient de manière triviale puisque l'on connaît la transformée de Mellin (c'est à dire la fonction caractéristique de deuxième espèce) de la loi Gamma :

$$\phi_{\mathcal{G}}(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathcal{FT}}(v) &= \phi_{\mathcal{G}}(s)|_{s=1+jv} \\
&= \mu^{jv} \frac{\Gamma(L+jv)}{L^{jv} \Gamma(L)} \\
&= e^{jvm} \frac{\Gamma(L+jv)}{L^{jv} \Gamma(L)}
\end{aligned} \tag{91}$$

Cette fonction caractéristique permet alors d'établir les moments (classiques) :

$$\begin{aligned}
m_1 &= m + \Psi(L) - \log L \\
m_2 &= m^2 + 2m\Psi(L) - 2m\ln(L) + \Psi(1, L) + (\Psi(L))^2 - 2\Psi(L)\ln(L) + (\ln(L))^2 \\
m_3 &= (\Psi(L))^3 - (\ln(L))^3 + m^3 + \Psi(2, L) + 3m^2\Psi(L) - 3m^2\ln(L) + 3m\Psi(1, L) + 3m(\Psi(L))^2 \\
&\quad + 3\Psi(1, L)\Psi(L) - 6m\Psi(L)\ln(L) - 3\Psi(1, L)\ln(L) - 3(\Psi(L))^2\ln(L) \\
&\quad + 3m(\ln(L))^2 + 3\Psi(L)(\ln(L))^2
\end{aligned}$$

On en déduit les moments centrés :

$$\begin{aligned}
m_1 &= m + \Psi(L) - \log L = \log \mu + \Psi(L) - \log L \\
M_2 &= \Psi(1, L) \\
M_3 &= \Psi(2, L)
\end{aligned}$$

Dans cette dernière relation, on reconnaît effectivement les expressions des log-moments centrés de la loi Gamma.

En résumé, on a donc les correspondances :

$$\begin{aligned}
w &\leftrightarrow \log u \\
\mathcal{FT}[m = \log \mu, L](w) &\leftrightarrow \mathcal{G}[\mu, L](u) \\
\Phi_{\mathcal{FT}}(v) &\leftrightarrow \phi_{\mathcal{G}}(s)|_{s=1+jv}
\end{aligned}$$

9.2.4 Définition (à partir de la loi Gamma Inverse) de la loi de Fisher Tipett “opposée”

Considérons maintenant la loi Gamma Inverse $\mathcal{GI}[\mu, L]$:

$$\mathcal{GI}[\mu, L](u) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{1}{L\mu} \left(\frac{L\mu}{u} \right)^{L+1} e^{-\frac{L\mu}{u}} \quad L \geq 0 \quad \mu > 0$$

En effectuant un changement de variable par passage en coordonnées logarithmiques, on obtient :

$$\mathcal{FTO}[m, L](w) = \frac{L^L}{\Gamma(L)} e^{L(m-w)} e^{-Le^{m-w}} \tag{92}$$

Le paramètre m de cette loi de Fisher Tipett vérifie $m = \log \mu$, c'est à dire $\mu = e^m$.

Par rapport au cas précédent, tout se passe comme si on avait pris la variable en sens opposé ($w' = -w$) ainsi que pour m , ce qui est bien en accord avec l'hypothèse de prendre la loi inverse de la loi Gamma.

La fonction caractéristique de cette loi de Fisher Tipett se déduit facilement de la précédente (équation 91) puisque inverser le sens de la variable revient à changer le signe de la transformée de Fourier, ce qui donne (en changeant aussi le signe de m) :

$$\Phi_{\mathcal{FTO}}(v) = e^{jvm} \frac{\Gamma(L-jv)}{L^{-jv} \Gamma(L)}$$

En résumé, on a donc les correspondances :

$$\begin{aligned} w &\leftrightarrow \log u \\ \mathcal{FTO}[m = \log \mu, L](w) &\leftrightarrow \mathcal{GI}[\mu, L](u) \\ \Phi_{\mathcal{FTO}}(v) &\leftrightarrow \phi_{\mathcal{GI}}(s)|_{s=1+jv} \end{aligned}$$

9.2.5 Convolution de lois de Fisher-Tipett : la loi z de Fisher

On peut se demander quel est la forme analytique de la convolution de deux lois de Fisher Tipett $\mathcal{FT}[m, L]$ et $\mathcal{FTO}[m, M]$. Le résultat est en fait très facile à démontrer. En effet, on sait que la loi de Fisher (loi Beta de seconde espèce) est le résultat d'une convolution de Mellin d'une loi Gamma et d'une loi Gamma Inverse :

$$\mathcal{F}[\mu, L, M] = \mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, M]$$

En passant en échelle logarithmique, la convolution de Mellin devient une vraie convolution, et la loi résultante, qui est en fait une généralisation de la loi z proposé par Fisher dans son article [7] $\mathcal{F}_z[\mu, L, M]$ ⁹, s'écrit, grâce à la relation 89 :

$$\mathcal{F}_z[m, L, M] = \mathcal{FT}[m, L] \star \mathcal{FTO}[1, M] = \frac{L}{M} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} e^{w-m} \frac{\left(\frac{Le^{w-m}}{M}\right)^{L-1}}{\left(1 + \frac{Le^{w-m}}{M}\right)^{L+M}}$$

avec $\mu = e^m$.

Grâce aux résultats acquis sur la loi de Fisher en statistique de Mellin, on a directement les moments et les moments centrés de la loi z de Fisher. En particulier :

$$\begin{aligned} m_1 &= m + \Psi(L) - \log L - (\Psi(M) - \log M) \\ M_2 &= \Psi(1, L) + \Psi(1, M) \\ M_3 &= \Psi(2, L) - \Psi(2, M) \end{aligned}$$

Toujours grâce à l'acquis sur les lois de Fisher, on a

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{F}_z[m, L, M] &= \mathcal{FT}[m, L] \\ \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{F}_z[m, L, M] &= \mathcal{FTO}[m, M] \end{aligned}$$

Propriétés du cas particulier $\mathcal{F}_z[m, L, L]$

De même que la loi de Fisher $\mathcal{F}[\mu, L, L]$ est très proche de la loi lognormale, la loi z de Fisher $\mathcal{F}_z[m, L, L]$ est très proche de la loi normale $\mathcal{N}[\mu, \sigma]$ dès lors que :

$$\begin{aligned} m &= \mu \\ 2\Psi(1, L) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

Le troisième cumulant est nul dans les deux cas. Si le cumulant d'ordre 4 est nul pour la loi normale, il est négatif et d'autant plus proche de 0 que la valeur de L est grande pour la loi z de Fisher.

⁹La loi z proposée par Fisher s'écrit : $p(z) \sim \frac{e^{n_1 z}}{(n_2 + n_1 e^{2z})^{(n_1 + n_2)/2}}$, ce qui revient à décrire $p(z)$ par une forme généralisée de $\mathcal{F}_z[m = 1, n_1/2, n_2/2]$

La fonction caractéristique de ce cas particulier s'exprime en prenant en $s = 1 + jf$ la fonction caractéristique de la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi de Fisher, ce qui donne :

$$\Phi_{\mathcal{F}_z[m, L, L]} = m^{jf} \frac{\Gamma(L + jf)\Gamma(L - jf)}{(\Gamma(L))^2}$$

Une propriété triviale de la fonction Gamma permet d'écrire :

$$\Gamma(z^*) = (\Gamma(z))^*$$

ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{F}_z[m, L, L]} &= (\log \mu)^{jf} \frac{|\Gamma(L + jf)|^2}{(\Gamma(L))^2} \\ &= e^{jm_f} \frac{|\Gamma(L + jf)|^2}{(\Gamma(L))^2} \end{aligned}$$

On peut directement comparer cette expression avec la fonction caractéristique de la loi normale dans le cas $\sigma = \sqrt{\frac{\Psi(1, L)}{2}} : \mathcal{N}\left[\mu, \sqrt{\frac{\Psi(1, L)}{2}}\right] :$

$$\Phi_{\mathcal{N}} = e^{jm_f} \exp^{-\frac{\Psi(1, L)}{4} f^2}$$

La loi $\mathcal{F}_z[m, L, L]$ a d'ailleurs une expression analytique plus simple, puisqu'elle peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_z[m, L, L](w) &= \frac{\Gamma(2L)}{(\Gamma(L))^2} e^{w-m} \frac{(e^{w-m})^{L-1}}{(1 + e^{w-m})^{2L}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(L + \frac{1}{2})}{\Gamma(L)} \frac{1}{(\cosh(\frac{w-m}{2}))^{2L}} \end{aligned}$$

Propriétés de la loi z de Fisher

On voit que l'on dispose donc d'une loi à 3 paramètres pouvant s'approcher d'une loi normale.

- Le premier paramètre, m , positionne la valeur moyenne. C'est en fait le mode de la d.d.p.. C'est effectivement la moyenne dans le cas de la loi $\mathcal{F}_z[m, L, L]$.
- Le paramètre L modifie l'allure de la courbe pour les valeurs de $x - m$ négatives : on peut rendre la tête de la distribution plus ou moins lourde
- Le paramètre M modifie l'allure de la courbe pour les valeurs de $x - m$ positifs : on peut rendre la queue de la distribution plus ou moins lourde

C'est pour cela que cette loi semble d'une grande utilité dès lors que l'on cherche une loi proche d'une gaussienne et sur laquelle des paramètres séparés permettent d'adapter la tête et la queue.

9.3 Les lois Meijer-z définies sur $\mathbb{R}$

Il est aisé de généraliser l'analyse des "exp-lois" aux lois de Meijer : on définit ainsi une nouvelle famille de lois de probabilités définies sur $\mathbb{R}$ que l'on peut baptiser distribution Meijer-z. Pour cela, considérons une variable aléatoire x décrite par une loi de Meijer $p_x(u) =$

$$\mathcal{LM}_{p,q}^{m,n} \left(u \left| \begin{array}{ll} M_1, \dots, M_n & ; \quad \tilde{L}_{n+1}, \dots, \tilde{L}_p \\ L_1, \dots, L_m & ; \quad \tilde{M}_{m+1}, \dots, \tilde{M}_q \end{array} \right. , \mu \right) \text{ définie pour une variable aléatoire } x \in \mathbb{R}^+.$$

Soit la variable aléatoire y définie sur $\mathbb{R}$ par : $y = \log x$. Par application de la relation 88, $p_y(v)$, la d.d.p. de y , s'écrit :

$$p_y(v) = p_x(e^v) = e^v \mathcal{LM}_{p,q}^{m,n} \left(e^v \left| \begin{array}{cc} M_1, \dots, M_n & ; \quad \tilde{L}_{n+1}, \dots, \tilde{L}_p \\ L_1, \dots, L_m & ; \quad \tilde{M}_{m+1}, \dots, \tilde{M}_q \end{array} \right. , \mu \right)$$

Sa forme complète, faisant intervenir des fonctions de Meijer, s'obtient directement à partir de la définition des lois de Meijer (équation 54) :

$$e^v \frac{\prod_{j=1}^q \Gamma(\tilde{L}_j) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(\tilde{M}_j)}{\prod_{j=1}^m \Gamma(L_j) \prod_{j=1}^n \Gamma(M_j)} \frac{\prod_{j=1}^m L_j \prod_{j=m+1}^p \tilde{M}_j}{\prod_{j=1}^n M_j \prod_{j=n+1}^p \tilde{L}_j} \frac{1}{\mu} \mathcal{G}_{p,q}^{m,n} \left(\frac{\prod_{j=1}^p L_j \prod_{j=m+1}^q \tilde{M}_j}{\prod_{j=1}^n M_j \prod_{j=n+1}^p \tilde{L}_j} \frac{e^v}{\mu} \left| \begin{array}{cc} -M_1, \dots, -M_n & ; \quad \tilde{L}_{n+1} - 1, \dots, \tilde{L}_p - 1 \\ L_1 - 1, \dots, L_m - 1 & ; \quad -\tilde{M}_{m+1}, \dots, -\tilde{M}_q \end{array} \right. \right) \quad (93)$$

La fonction caractéristique de cette loi s'exprime directement à partir de la fonction caractéristique de deuxième espèce des lois de Meijer (relation 56) et a donc pour expression :

$$\mu^{jr} \prod_{k=1}^m \frac{\Gamma(L_k + jr)}{L_k^{jr} \Gamma(L_k)} \prod_{k=1}^n \frac{\Gamma(M_k - jr)}{M_k^{-jr} \Gamma(M_k)} \prod_{k=n+1}^p \frac{\tilde{L}_k^{jr} \Gamma(\tilde{L}_k)}{\Gamma(\tilde{L}_k + jr)} \prod_{k=m+1}^q \frac{\tilde{M}_k^{-jr} \Gamma(\tilde{M}_k)}{\Gamma(\tilde{M}_k - jr)}$$

Les moments se déduisent aussi directement des log-moments de la loi de Meijer initiale : les expressions sont cependant lourdes. En revanche, de la même manière, l'expression des cumulants est directement obtenue des expressions des log-cumulants (équation 58), ce qui donne les relations suivantes tout compte fait assez simples :

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \log \mu + \sum_{i=1}^m (\Psi(L_i) - \log L_i) - \sum_{i=1}^n (\Psi(M_i) - \log M_i) \\ &\quad - \sum_{i=n+1}^p (\Psi(\tilde{L}_i) - \log \tilde{L}_i) + \sum_{i=m+1}^q (\Psi(\tilde{M}_i) - \log \tilde{M}_i) \\ \kappa_2 &= \sum_{i=1}^m \Psi(1, L_i) + \sum_{i=1}^n \Psi(1, M_i) - \sum_{i=n+1}^p \Psi(1, \tilde{L}_i) - \sum_{i=m+1}^q \Psi(1, \tilde{M}_i) \\ \kappa_r &= \sum_{i=1}^m \Psi(r-1, L_i) + (-1)^r \sum_{i=1}^n \Psi(1, M_i) - \sum_{i=n+1}^p \Psi(r-1, \tilde{L}_i) - (-1)^r \sum_{i=m+1}^q \Psi(r-1, \tilde{M}_i) \end{aligned}$$

Comme pour les lois de Meijer, ces expressions doivent permettre une inversion numérique aisée des paramètres de ces lois.

Comme pour les lois de Meijer, on peut envisager la définition des lois Meijer-z généralisées, faisant intervenir une puissance η . Dans ce cas, si l'on considère la nouvelle variable aléatoire x^η , on a la nouvelle variable aléatoire y qui s'exprime :

$$y = e^{x^\eta}$$

ce qui donne la loi généralisée :

$$p_{y,\eta}(v) = p_x((e^v)^\eta) = (e^v)^\eta \mathcal{LM}_{p,q}^{m,n} \left((e^v)^\eta \left| \begin{array}{cc} M_1, \dots, M_n & ; \quad \tilde{L}_{n+1}, \dots, \tilde{L}_p \\ L_1, \dots, L_m & ; \quad \tilde{M}_{m+1}, \dots, \tilde{M}_q \end{array} \right. , \mu \right)$$

C'est en fait cette expression que vérifie la loi z proposée par Fisher [7] (avec $\eta = 2$).

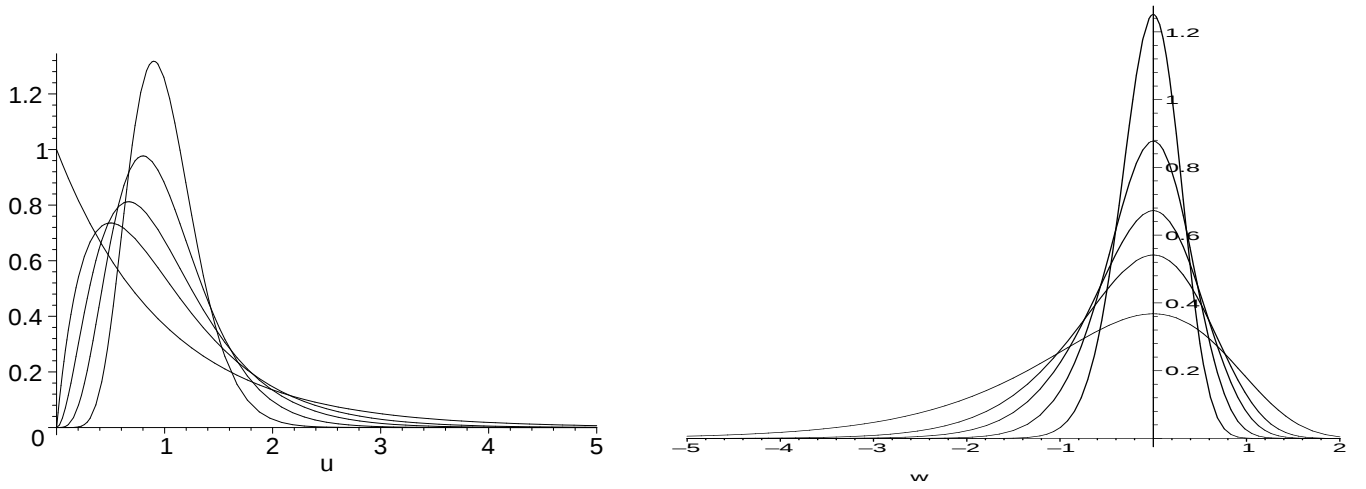


FIG. 7 – A gauche : loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L]$ avec $\mu = 1$ et $L = 1, 2, 3, 5$ et 10 . A droite : loi de Fisher Tippett avec $m = 0$ et $L = 1, 2, 3, 5$ et 10 .

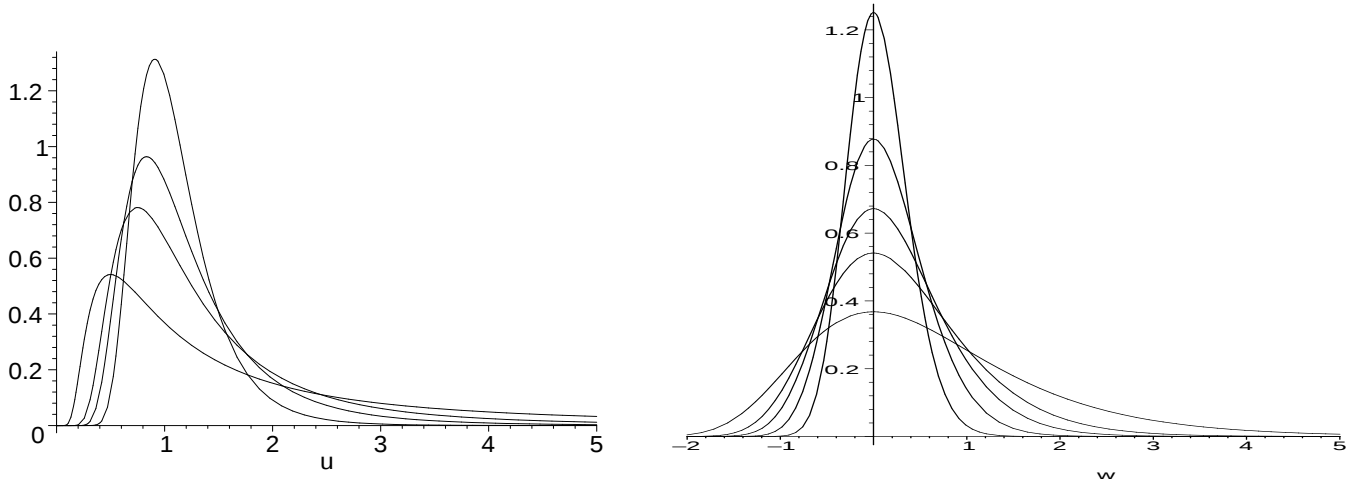


FIG. 8 – A gauche : Loi Gamma Inverse $\mathcal{GI}[\mu, L]$ avec $\mu = 1$ et $L = 1, 3, 5$ et 10 . A droite, la loi de Fisher-Tippett inverse.

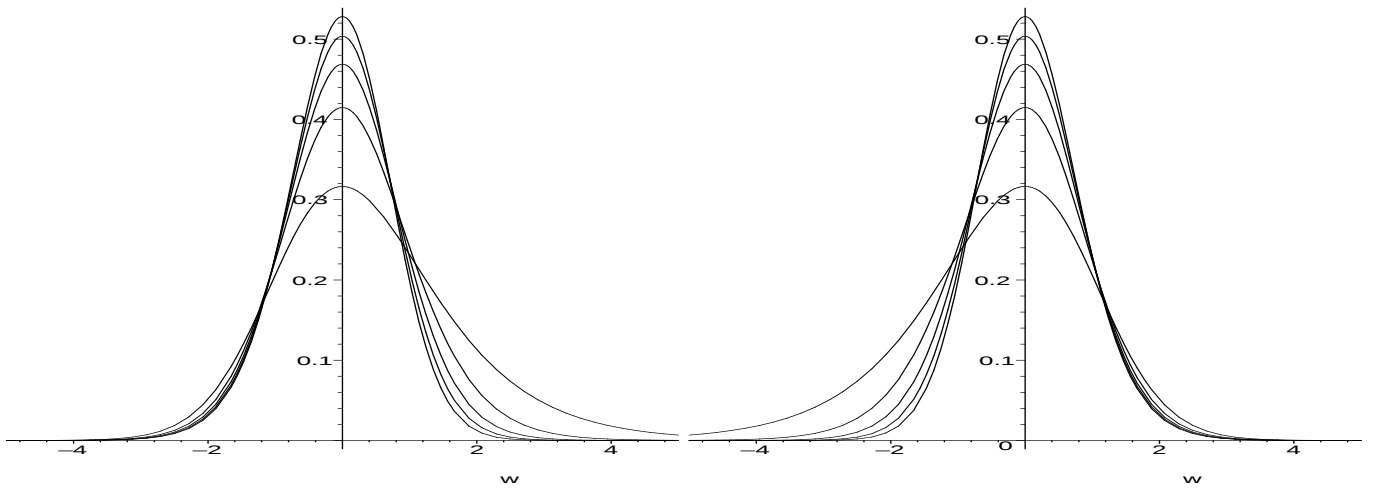


FIG. 9 – Loi z de Fisher $\mathcal{F}_z[m, L, M]$. A gauche : $m = 1$, $L = 3$ et $M = 1, 2, 3, 4, 5$. A droite : $m = 1$, $M = 3$ et $L = 1, 2, 3, 4, 5$.

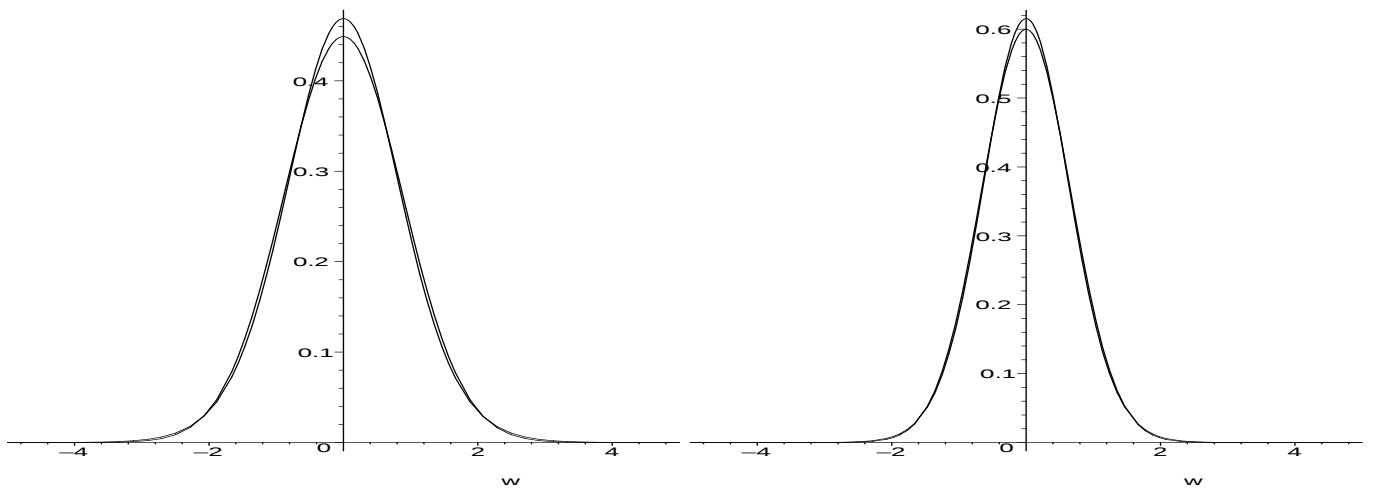


FIG. 10 – Comparaison de la loi z de Fisher $\mathcal{F}_z[m, L, L]$ et de la loi normale $\mathcal{N}[\mu, \sigma]$ avec $\sigma = \sqrt{2\Psi(1, L)}$. Cas $L = 3$ à gauche, $L = 5$ à droite.

A Distribution de Mellin-Dirac

Nous recherchons dans cette annexe comment une distribution de Dirac peut s'exprimer sous la forme d'une fonction de Meijer.

Par définition [11], on sait que l'élément neutre de la convolution de Mellin est un "Mellin-Dirac" $\delta^{\mathcal{M}}$ tel que :

$$\delta_{\lambda}^{\mathcal{M}}(u) = \delta(u\lambda - 1)$$

Sa transformée de Mellin vérifie :

$$\mathcal{M}[\delta_{\lambda}^{\mathcal{M}}(u)] = \frac{1}{\lambda^s}$$

de sorte que :

$$(f \hat{\star} \delta_{\lambda}^{\mathcal{M}})(u) = f(\lambda u).$$

Nous nous intéressons dans ce rapport au cas $\lambda = 1$, noté $\delta^{\mathcal{M}}$, et vérifiant ;

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[\delta^{\mathcal{M}}(u)] &= 1 \\ (f \hat{\star} \delta^{\mathcal{M}})(u) &= f(u) \end{aligned}$$

On recherche donc une expression de $\delta^{\mathcal{M}}$ sous la forme d'une fonction de Meijer.

A.1 Analyse de l'intégrale de Barnes

Considérons la fonction de Meijer $\overline{G}_{2,2}^{1,1}\left(x \left| \begin{smallmatrix} a; a' \\ b; b' \end{smallmatrix} \right. \right)$. Par définition, sa transformée de Mellin s'écrit :

$$\frac{\Gamma(b+s) \Gamma(1-a-s)}{\Gamma(1-b'-s) \Gamma(a'+s)}$$

Cette expression se réduit à l'identité si $a' = b$ et $b' = a$. On a donc :

$$\overline{G}_{2,2}^{1,1}\left(x \left| \begin{smallmatrix} a; b \\ b; a \end{smallmatrix} \right. \right) = \delta^{\mathcal{M}} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

De la même manière, il est aisé de montrer que

$$\begin{aligned} \overline{G}_{1,1}^{0,1}\left(x \left| \begin{smallmatrix} a; . \\ .; a \end{smallmatrix} \right. \right) &= \delta^{\mathcal{M}} \quad \forall a \in \mathbb{R} \\ \overline{G}_{1,1}^{1,0}\left(x \left| \begin{smallmatrix} .; b \\ b; . \end{smallmatrix} \right. \right) &= \delta^{\mathcal{M}} \quad \forall b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

A.2 Analyse générale

On peut démontrer que ces trois dernières relations sont uniques. En effet, considérons la fonction de Meijer $\overline{G}_{2,2}^{1,1}\left(x \left| \begin{smallmatrix} a; a' \\ b; b' \end{smallmatrix} \right. \right)$. Sa transformée de Mellin s'écrit :

$$F(s) = \frac{\Gamma(b+s) \Gamma(1-a-s)}{\Gamma(1-b'-s) \Gamma(a'+s)} \tag{94}$$

et l'on suppose que $\forall s \ F(s) = 1$. En utilisant les propriétés de la fonction Gamma, on a :

$$F(s) = \frac{\Gamma(b+s) \Gamma(1-a-s)}{\Gamma(1-b'-s) \Gamma(a'+s)} = \frac{(b+s-1)(-a-s)}{(-b'-s)(a'+s-1)} \frac{\Gamma(b+s-1) \Gamma(-a-s)}{\Gamma(-b'-s) \Gamma(a'+s-1)}$$

a, a', b, b' doivent donc vérifier la relation :

$$\frac{(b+s-1)(-a-s)}{(-b'-s)(a'+s-1)} = 1$$

qui est une condition nécessaire pour que $F(s)$ soit égal à 1. En développant, on obtient la relation :

$$\begin{aligned} (b+s-1)(-a-s) &= (-b'-s)(a'+s-1) \\ -a(b-1) + (1-a-b)s - s^2 &= -b'(a'-1) + (1-a'-b')s - s^2 \end{aligned}$$

Si l'on fixe les valeurs de a et b , et puisque le résultat ne doit pas dépendre de s , le système devient :

$$\begin{aligned} b'(a'-1) &= a(b-1) = K_1 \\ a' + b' &= a + b = K_2 \end{aligned}$$

En posant $b' = K_2 - a'$, on obtient une équation du second degré pour a' :

$$a'^2 - (K_2 + 1)a' + (K_1 + K_2) = 0$$

dont les deux solutions existent toujours et sont :

- $a' = b$, ce qui donne $b' = a$. La fonction recherchée est alors $\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{matrix} a; b \\ b; a \end{matrix} \right. \right)$ et sa transformation de Mellin (équation 94) s'écrit alors :

$$\frac{\Gamma(b+s) \Gamma(1-a-s)}{\Gamma(1-a-s) \Gamma(b+s)} = 1$$

La condition nécessaire est dans ce cas suffisante.

- $a' = a+1$, ce qui donne $b' = b-1$. La fonction recherchée est alors $\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{matrix} a & ; & a+1 \\ b & ; & a \end{matrix} \right. \right)$ et sa transformation de Mellin (équation 94) s'écrit alors :

$$\frac{\Gamma(b+s) \Gamma(1-a-s)}{\Gamma(2-b-s) \Gamma(1+a+s)}$$

Pour que cette expression soit égale à 1 pour tout s , il faut :

$$\begin{cases} b = 1 + a \\ 2 - b = 1 - a \end{cases}$$

c'est à dire $b = a+1$. On obtient alors $\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{matrix} a & ; & a+1 \\ a+1 & ; & a \end{matrix} \right. \right)$ qui est un cas particulier du précédent.

On vient donc de montrer qu'un Mellin-Dirac s'exprime uniquement sous les deux formes de base : $\overline{G}_{1,1}^{0,1} \left(x \left| \begin{matrix} a; . \\ .; a \end{matrix} \right. \right)$ et $\overline{G}_{1,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{matrix} .; b \\ b; . \end{matrix} \right. \right)$, qui peuvent être ensuite composées par convolution de Mellin pour donner $\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{matrix} a; b \\ b; a \end{matrix} \right. \right)$ et ce $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$.

A.3 Recherche de $-\delta^{\mathcal{M}}$

On connaît donc les expressions possibles d'un Mellin-Dirac sous forme de fonction de Meijer. Or il peut être intéressant de savoir si l'opposé d'un Mellin-Dirac $-\delta^{\mathcal{M}}$ peut aussi se mettre sous forme de fonction de Meijer autrement qu'en prenant l'opposé des expressions précédentes.

Nous allons montrer qu'il existe deux formes de Mellin-Dirac qui s'avéreront utiles par la suite :

- Considérons le cas particulier suivant : $\overline{G}_{2,2}^{1,1}\left(x \left| \begin{smallmatrix} c-1; c \\ c-1; c \end{smallmatrix} \right. \right)$. Sa transformée de Mellin s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left[\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{smallmatrix} c-1; c \\ c-1; c \end{smallmatrix} \right. \right) \right] &= \frac{\Gamma(c-1+s) \Gamma(2-c-s)}{\Gamma(1-c-s) \Gamma(c+s)} \\ &= \frac{\Gamma(c-1+s) (1-c-s) \Gamma(1-c-s)}{\Gamma(1-c-s) (c+s-1) \Gamma(c+s-1)} \\ &= -1 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{smallmatrix} c-1; c \\ c-1; c \end{smallmatrix} \right. \right) = -\delta^{\mathcal{M}} \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

- Considérons le second cas particulier : $\overline{G}_{2,2}^{1,1}\left(x \left| \begin{smallmatrix} c; c-1 \\ c; c-1 \end{smallmatrix} \right. \right)$. Sa transformée de Mellin s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left[\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{smallmatrix} c; c-1 \\ c; c-1 \end{smallmatrix} \right. \right) \right] &= \frac{\Gamma(c+s) \Gamma(1-c-s)}{\Gamma(1-(c-1)-s) \Gamma(c-1+s)} \\ &= \frac{(c+s-1) \Gamma(c+s-1) \Gamma(1-c-s)}{(-(c-1)-s) \Gamma(-(c-1)-s) \Gamma(c-1+s)} \\ &= -1 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{smallmatrix} c; c-1 \\ c; c-1 \end{smallmatrix} \right. \right) = -\delta^{\mathcal{M}} \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

Ces deux expressions peuvent aisément se généraliser. Considérons d'abord le Mellin-Dirac $\overline{G}_{2,2}^{1,1}\left(x \left| \begin{smallmatrix} c-r; c \\ c-r; c \end{smallmatrix} \right. \right)$ avec $r \in \mathbb{Z}$. En utilisant la propriété fondamentale des convolutions de Mellin de fonctions de Meijer, il est évident que :

$$\begin{aligned} \overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{smallmatrix} c-r; c \\ c-r; c \end{smallmatrix} \right. \right) &= \overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{smallmatrix} c-r; c-r+1 \\ c-r; c-r+1 \end{smallmatrix} \right. \right) \hat{\star} \overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{smallmatrix} c-r+1; c-r+2 \\ c-r+1; c-r+2 \end{smallmatrix} \right. \right) \hat{\star} \dots \hat{\star} \overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{smallmatrix} c-1; c \\ c-1; c \end{smallmatrix} \right. \right) \\ &= (-1)^r \delta^{\mathcal{M}} \quad \forall r \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

De la même manière on peut montrer que

$$\overline{G}_{2,2}^{1,1} \left(x \left| \begin{smallmatrix} c; c-r \\ c; c-r \end{smallmatrix} \right. \right) = (-1)^r \delta^{\mathcal{M}}$$

B Moyenne arithmétique

B.1 Somme de variables aléatoires suivant la même loi de distribution

Si l'on considère une variable aléatoire y définie comme la somme de N variables aléatoires x_i :

$$y = \sum_{i=1}^N x_i$$

si chaque variable aléatoire x_i a comme d.d.p. $p_{x_i}(u) = p_x(u)$ et comme fonctions caractéristiques $\Phi_x(v)$ et $\Psi_x(v)$, on sait alors que

- la d.d.p. de y , $p_y(u)$, vérifie :

$$p_y(u) = p_{x_1}(u) \star p_{x_2}(u) \star p_{x_3}(u) \star \dots \star p_{x_N}(u)$$

- la première fonction caractéristique de p_y , $\Phi_y(v)$, vérifie :

$$\Phi_y(v) = (\Phi_x(v))^N$$

Cette expression ne permet pas de déduire simplement les moments, hormis les deux premiers :

$$\begin{aligned} m_{y,1} &= N m_{x,1} \\ m_{y,2} &= N m_{x,2} + N(N-1) m_{x,1}^2 \end{aligned}$$

ce qui donne au passage une relation très simple pour le moment centré d'ordre 2, c'est à dire la variance :

$$M_{y,2} = N M_{x,2}$$

- la seconde fonction caractéristique de p_y , $\Psi_y(v)$, vérifie :

$$\Psi_y(v) = N \Psi_x(v)$$

ce qui permet d'obtenir les cumulants :

$$\kappa_{y(r)} = N \kappa_{x(r)}$$

B.2 Moyenne arithmétique de variables aléatoires suivant la même loi de distribution

Soit une variable aléatoire z définie comme la moyenne arithmétique de N variables aléatoires x_i :

$$z = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

On peut la considérer comme la somme de N variables aléatoires $x'_i = \frac{x_i}{N}$:

$$z = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N}$$

Considérons donc la variable aléatoire $x' = \frac{x}{N}$. Sa d.d.p. $p_{x'}(u)$ s'écrit :

$$p_{x'}(u) = N p_x(Nu)$$

Calculons la fonction caractéristique $\Phi_{x'}(v)$ de la variable aléatoire $x' = \frac{x}{N}$:

$$\begin{aligned}
\Phi_{x'}(v) &= \mathcal{F}[p_{x'}](v) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jvu} p_{x'}(u) du \\
&= N \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jvu} p_x(Nu) du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\frac{v}{N}u'} p_x(u') du' \\
&= \Phi_x\left(\frac{v}{N}\right)
\end{aligned}$$

On peut alors réutiliser directement les résultats du paragraphe précédent en considérant la variable z somme des variables aléatoires x'_i .

– la d.d.p. de z , $p_z(u)$, vérifie :

$$p_z(u) = p_{x'_1}(u) \star p_{x'_2}(u) \star p_{x'_3}(u) \star \dots \star p_{x'_N}(u)$$

– la première fonction caractéristique de p_y , $\Phi_y(v)$, vérifie :

$$\Phi_z(v) = (\Phi_{x'}(v))^N = \left(\Phi_x\left(\frac{v}{N}\right)\right)^N$$

Cette expression ne permet pas de déduire simplement les moments, hormis les deux premiers :

$$\begin{aligned}
m_{z,1} &= m_{x,1} \\
m_{z,2} &= \frac{1}{N} m_{x,2} + \frac{N-1}{N} m_{x,1}^2
\end{aligned}$$

ce qui donne au passage une relation très simple pour le moment centré d'ordre 2, c'est à dire la variance :

$$M_{z,2} = \frac{1}{N} M_{x,2}$$

– la seconde fonction caractéristique de p_z , $\Psi_z(v)$, vérifie :

$$\Psi_y(v) = N \Psi_x\left(\frac{v}{N}\right)$$

ce qui permet d'obtenir les cumulants :

$$\kappa_{z(r)} = \left(\frac{1}{N}\right)^{(r-1)} \kappa_{x(r)} \quad (95)$$

B.3 Exemple de la loi normale

On dit que la variable aléatoire x suit la loi normale $\mathcal{N}[\mu, \sigma]$ si sa densité de probabilité $p_x(u)$ vérifie l'expression suivante :

$$p_x(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (96)$$

μ correspond au mode de la loi (maximum de la d.d.p.) et σ^2 est la variance.

Les fonctions caractéristiques de la loi normale s'écrivent :

$$\begin{aligned}\Phi_x(v) &= e^{-\frac{\sigma^2 v^2}{2}} e^{j\mu v} \\ \Psi_x(v) &= -\frac{\sigma^2 v^2}{2} + j\mu v\end{aligned}$$

La moyenne arithmétique de N variables aléatoires suivant la loi normale $\mathcal{N}[\mu, \sigma]$ (équation 96) a pour première fonction caractéristique :

$$\begin{aligned}\Phi_z(v) &= \left(\Phi_x\left(\frac{v}{N}\right) \right)^N \\ &= e^{-\frac{\sigma^2 v^2}{2N}} e^{j\mu v} \\ &= e^{-\frac{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)^2 v^2}{2}} e^{j\mu v}\end{aligned}$$

Par transformée inverse on a lors la d.d.p. suivie par la variable aléatoire z :

$$p_x(u) = \frac{1}{\sigma' \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma'^2}}$$

avec $\sigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$. On a donc le résultat bien connu que la somme de N variables aléatoires suivant une loi normale $\mathcal{N}[\mu, \sigma]$ suit une loi normale de même moyenne et de variance divisée par N (c'est à dire d'écart type divisé par $\sqrt{N}$) : $\mathcal{N}\left[\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right]$.

L'élément essentiel de ce résultat tient dans le fait assez remarquable que la puissance N -ème d'une gaussienne est elle même une gaussienne. Donc la fonction caractéristique d'une somme de loi normale est une puissance de gaussienne, donc une gaussienne.

On peut mener une autre analyse en considérant les cumulants, qui dans le cas de la moyenne arithmétique vérifient la relation 95. Puisque les cumulants de la loi normale sont nuls à partir de l'ordre 3, et que cette propriété est spécifique à la loi normale, on en déduit que les cumulants de la loi moyenne arithmétique de la loi normale sont nuls à partir de l'ordre 3 et que l'on a donc affaire à une loi normale.

B.4 Exemple de la loi Gamma

Il se trouve que cette curieuse propriété d'invariance de loi existe pour d'autres distributions, dont la loi Gamma. Dans ce cas, on parle de **théorème d'addition**.

Soit une loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L]$:

$$\mathcal{G}[\mu, L](u) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{Lu}{\mu}\right)^{L-1} e^{-\frac{Lu}{\mu}}$$

Sa fonction caractéristique s'écrit :

$$\Phi_x(v) = \left(\frac{\mu}{1 + i\frac{v}{L}}\right)^L = \left(\frac{L\mu}{L + iv}\right)^L$$

La moyenne arithmétique de N variables aléatoires suivant cette loi Gamma a pour première fonction caractéristique :

$$\Phi_z(v) = \left(\Phi_x\left(\frac{v}{N}\right)\right)^N$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\left(\frac{\mu}{1 + i \frac{v}{N}} \right)^L \right)^N \\
&= \left(\frac{\mu}{1 + i \frac{v}{LN}} \right)^{LN}
\end{aligned}$$

On reconnait la fonction caractéristique de la loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, LN]$. Donc la loi suivie par la somme de N variables aléatoires suivant une loi Gamma est aussi une loi Gamma, ce qui donne :

$$\text{MA}_{\mathcal{G}[\mu, L]} [N] (x) = \mathcal{G}[\mu, NL](x) \quad (97)$$

Cette propriété ne peut s'étendre à une puissance de la variable x . Par exemple, si une grandeur suit une loi de Nakagami (variable en amplitude : le carré de cette variable, c'est à dire l'intensité, suit alors une loi Gamma), on sait que la somme de N variables ne suivra pas une loi de Nakagami.

Comme autre exemples de lois vérifiant le théorème d'addition on trouve [4] la loi binomiale, la loi de Poisson, la loi du χ^2 ainsi que la loi Gaussienne Inverse ([8]).

C Correspondances avec d'autres lois "classiques"

C.1 Prolégomène

Dans un article récent [5], Crooks se propose d'étudier à l'aide de la distribution d'Amoroso une ménagerie de lois de probabilités liées à la loi exponentielle. Ce terme illustre bien le problème car c'est dans un dédale de noms et de variantes qu'il faut évoluer tant le sujet est vaste. Cette annexe vise donc à montrer qu'une grande partie de ces lois peuvent s'analyser comme des lois de Meijer, ce qui permet d'unifier de manière spectaculaire la taxonomie de cette ménagerie.

Dans cette annexe, on fera appel à trois lois généralisées (introduites en 6.3.2) :

- la loi Gamma Généralisée (au sens des radaristes, section C.2.15) :

$$\mathcal{GG}[\mu, L, \eta] = \frac{|\eta|}{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{\Gamma(L)} \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu} \right)^{\eta L - 1} e^{-\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu} \right)^{\eta}}$$

- la loi de Fisher Généralisée (utilisée aussi par les radaristes, section C.2.12)

$$\mathcal{FG}[\mu, L, M, \eta] = \frac{\eta}{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{M^{\frac{1}{\eta}}} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L) \Gamma(M)} \frac{\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu} \right)^{\eta L - 1}}{\left(1 + \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu} \right)^{\eta} \right)^{L+M}}$$

- la loi Beta Généralisée :

$$\mathcal{BG}[\mu, L, M, \eta] = \frac{\eta}{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{M^{\frac{1}{\eta}}} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L) \Gamma(M-L)} \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu} \right)^{\eta L - 1} \left(1 - \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu} \right)^{\eta} \right)^{M-L-1}$$

En effet, dans ce formalisme spécifique au monde radar, le choix des paramètres mène à un premier moment m_1 dont l'ordre de grandeur est le paramètre μ , et ce indépendamment des autres paramètres. Il est alors aisé de comparer différents choix des autres paramètres sans trop changer cette valeur, qui est par ailleurs souvent du même ordre de grandeur que le mode de la distribution.

Nous verrons en première lecture qu'une grande partie des lois rencontrées dans la littérature peuvent être réécrites sous forme de l'une de ces trois lois, donc sous la forme d'une loi de Meijer généralisée. Cette dernière propriété sera mise en valeur dans le tableau du paragraphe C.3 qui généralisera le travail de Crooks aux lois de la famille exponentielle.

C.2 Diverses lois rencontrées dans la littérature

C.2.1 La distribution d'Amoroso

C'est une loi qui, définie sous sa forme à quatre paramètres, s'écrit ([8], [1], [5]) :

$$p_{Amoroso}[\nu, \theta, \alpha, \beta](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \frac{\beta}{\theta} \right| \left(\frac{x - \nu}{\theta} \right)^{\alpha\beta - 1} e^{-\left(\frac{x - \nu}{\theta} \right)^{\beta}}$$

Dans le cas $\nu = 0$, on reconnaît l'expression de la loi Gamma généralisée et une simple identification permet d'écrire :

$$\begin{cases} \eta = \beta \\ L = \alpha \\ \mu = \alpha^{\frac{1}{\beta}} \theta \end{cases}$$

ce qui donne :

$$p_{Amoroso}[\nu = 0, \theta, \alpha, \beta](x) = \mathcal{GG}[\mu = \alpha^{\frac{1}{\beta}}\theta, L = \alpha, \eta = \beta](x) = \mathcal{LMG}_{0,1}^{1,0}\left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ \alpha \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \alpha^{\frac{1}{\beta}}\theta, \beta\right)\right)$$

Dans le cas qui nous intéresse ($\nu = 0$), elle porte aussi le nom de distribution de Stacy.

C.2.2 La loi Beta

Définie par :

$$\mathcal{B}[\mu, L, M](x) = \frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \left(\frac{Lx}{M\mu}\right)^{L-1} \left(1 - \frac{Lx}{M\mu}\right)^{M-L-1}$$

elle s'exprime simplement sous la forme d'une loi de Meijer :

$$\mathcal{B}[\mu, L, M](x) = \mathcal{LM}_{1,1}^{1,0}\left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L \end{array} ; \begin{array}{c} M \\ \cdot \end{array}, \mu\right)\right)$$

C.2.3 La loi Beta Inverse

Définie par :

$$\mathcal{BI}[\mu, L, M](x) = \frac{M}{L\mu} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \frac{\left(\frac{Mx}{L\mu} - 1\right)^{M-L-1}}{\left(\frac{Mx}{L\mu}\right)^M}$$

elle s'exprime simplement sous la forme d'une loi de Meijer :

$$\mathcal{BI}[\mu, L, M](x) = \mathcal{LM}_{1,1}^{0,1}\left(x \left| \begin{array}{c} L \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ M \end{array}, \mu\right)\right)$$

C.2.4 La loi Beta Généralisée

Définie par :

$$\mathcal{BG}[\mu, L, M, \eta](x) = \frac{\eta}{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{M^{\frac{1}{\eta}}} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}}x}{M^{\frac{1}{\eta}}\mu}\right)^{\eta L-1} \left(1 - \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}}x}{M^{\frac{1}{\eta}}\mu}\right)^{\eta}\right)^{M-L-1}$$

elle s'exprime simplement sous la forme d'une loi de Meijer généralisée :

$$\mathcal{BG}[\mu, L, M, \eta](x) = \mathcal{LMG}_{1,1}^{1,0}\left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L \end{array} ; \begin{array}{c} M \\ \cdot \end{array}, \mu, \eta\right)\right)$$

C.2.5 La distribution Beta Prime

$$p_{BetaPrime}[\alpha, \beta](x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}$$

C'est de manière évidente une loi de Fisher Généralisée avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = 1 \\ L = \alpha \\ M = \beta \\ \mu = \frac{\beta}{\alpha} \end{array} \right.$$

ce qui permet d'écrire :

$$p_{BetaPrime}[\alpha, \beta](x) = \mathcal{FG}\left[\frac{\beta}{\alpha}, \alpha, \beta, 1\right](x) = \mathcal{LMG}_{1,1}^{1,1}\left(x \left| \begin{array}{c} \beta \\ \alpha \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \frac{\beta}{\alpha}, 1\right)\right)$$

C.2.6 Loi de Burr

Appelée parfois distribution de Feller-Pareto, ou distribution de Burr XII, elle s'écrit :

$$p_{Burr}[k, c](x) = c k \frac{x^{c-1}}{(1+x^c)^{k+1}}$$

On reconnaît formellement une distribution de Fisher généralisée $\mathcal{FG}[\mu, L, M, \eta]$ et une simple identification permet d'écrire :

$$\begin{cases} \eta = c \\ L = 1 \\ M = k \\ \mu = 1 \end{cases}$$

On a donc

$$p_{Burr}[k, c](x) = \mathcal{FG}[1, 1, k, c](x) = \mathcal{LMG}_{1,1}^{1,1}\left(x \left| \begin{matrix} k & ; & \cdot \\ 1 & ; & \cdot \end{matrix} \right., 1, c\right)$$

C.2.7 Distribution Chi

La Loi du Chi est donnée par la relation :

$$p_{\chi}[\sigma, k](x) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \sqrt{2\sigma^2}} \left(\frac{x}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)^{k-1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Pour $k = 1$, on retrouve la loi semi-normale (c'est à dire la loi gaussienne restreinte aux valeurs positives de x).

On reconnaît dans cette expression une loi de Nakagami avec :

$$\begin{cases} L = \frac{k}{2} \\ \mu = \sqrt{k}\sigma \end{cases}$$

C.2.8 Distribution Chi-2

La Loi du Chi-2 est donnée par la relation :

$$p_{\chi^2}[\sigma, k](x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2\sigma^2} \left(\frac{x}{2\sigma^2}\right)^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}$$

On reconnaît dans cette expression une loi Gamma avec :

$$\begin{cases} L = \frac{k}{2} \\ \mu = k\sigma^2 \end{cases}$$

C.2.9 Distribution de Dagum

Elle est décrite par la ddp p_{Dagum} :

$$p_{Dagum}[a, b, p](x) = \frac{ap x^{ap-1}}{b^{ap} \left(1 + \left(\frac{x}{b}\right)^a\right)^{p+1}}$$

On reconnaît formellement une distribution de Fisher généralisée $\mathcal{FG}[\mu, L, M, \eta]$ et une simple identification permet d'écrire :

$$\begin{cases} \eta = a \\ L = p \\ M = 1 \\ \mu = b \end{cases}$$

d'où :

$$p_{Dagum}[a, b, p](x) = \mathcal{FG}[b, p, 1, \eta](x) = \mathcal{LMG}_{1,1}^{1,1}\left(x \left| \begin{array}{c} 1 \\ p \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, b, a \right.\right)$$

C.2.10 Distribution d'Erlang

Elle est décrite par la ddp p_{Erlang} :

$$p_{Erlang}[\beta, m](x) = \frac{x^{m-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^m \Gamma(m)}.$$

qui s'apparente à une loi Gamma. Par identification, on a :

$$\begin{cases} \eta = 1 \\ L = m \\ \mu = \beta m \end{cases}$$

ce qui donne :

$$p_{Erlang}[\beta, m](x) = \mathcal{GG}[\beta m, m, 1] = \mathcal{LMG}_{0,1}^{1,0}\left(x \left| \begin{array}{c} m \\ m \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \beta m, 1 \right.\right)$$

C.2.11 F-distribution

On trouve dans la littérature la F-distribution (la lettre F ayant été choisie par Snedecor en hommage à Fisher) sous le formalisme :

$$p_{F-distribution}[\nu_1, \nu_2](x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} x^{\frac{\nu_1}{2}-1} \frac{1}{\left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2}x\right)^{\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}}}$$

Par identification, il est facile de montrer que c'est une loi de Fisher $\mathcal{F}[\mu, L, M]$ avec :

$$\begin{cases} L = \frac{\nu_1}{2} \\ M = \frac{\nu_2}{2} \\ \mu = 1 \end{cases}$$

On a donc :

$$p_{F-distribution}[\nu_1, \nu_2](x) = \mathcal{FG}\left[1, \frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2}, 1\right] = \mathcal{LMG}_{1,1}^{1,1}\left(x \left| \begin{array}{c} \frac{\nu_2}{2} \\ \frac{\nu_1}{2} \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, 1, 1 \right.\right)$$

C.2.12 La loi de Fisher

Dans le monde de l'imagerie radar, il est d'usage¹⁰ de donner ce nom à la loi suivante :

$$\mathcal{F}[\mu, L, M](x) = \frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{\left(\frac{Lx}{M\mu}\right)^{L-1}}{\left(1 + \frac{Lx}{M\mu}\right)^{L+M}}$$

qui est une variante (typographique) de la F-distribution faisant intervenir un troisième paramètre μ : c'est l'introduction de ce paramètre qui permet d'avoir un premier moment et un mode globalement indépendant des paramètres de forme L et M . On a en effet :

$$m_{mode} = \frac{(L-1)M}{L(M+1)}\mu$$

Comme nous l'avons vu précédemment, on a :

$$\mathcal{F}[\mu, L, M](x) = \mathcal{LMG}_{1,1}^{1,1}\left(x \left| \begin{array}{c} M \\ L \end{array} ; \cdot, \mu, 1 \right.\right)$$

C.2.13 La loi de Fisher Généralisée

Dans le monde de l'imagerie radar, il est d'usage de donner ce nom à cette généralisation de la loi de Fisher :

$$\mathcal{FG}[\mu, L, M, \eta] = \frac{\eta}{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{M^{\frac{1}{\eta}}} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{M^{\frac{1}{\eta}}} \frac{x}{\mu}\right)^{\eta L-1}}{\left(1 + \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{M^{\frac{1}{\eta}}} \frac{x}{\mu}\right)^{\eta}\right)^{L+M}}$$

Comme nous l'avons vu précédemment, on a :

$$\mathcal{FG}[\mu, L, M, \eta](x) = \mathcal{LMG}_{1,1}^{1,1}\left(x \left| \begin{array}{c} M \\ L \end{array} ; \cdot, \mu, \eta \right.\right)$$

C.2.14 La distribution de Fréchet

Elle est donnée par la relation

$$p_{Frechet}[\alpha, \beta](x) = \alpha \beta^{\alpha} (x)^{-\alpha-1} \exp^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}$$

Il est aisé de montrer que cette loi est une loi Gamma Inverse généralisée, avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} M = 1 \\ \mu = \beta \\ \eta = \alpha \end{array} \right.$$

On a donc :

$$p_{Frechet}[\alpha, \beta](x) = \mathcal{LMG}_{1,0}^{0,1}\left(x \left| \begin{array}{c} 1 \\ \cdot \end{array} ; \cdot, \beta, \alpha \right.\right)$$

¹⁰Fisher ayant été probablement un des tout premiers à s'intéresser à la loi suivie par le ratio de deux variables aléatoires

C.2.15 La loi Gamma

Il y a beaucoup de définitions et d'usages de cette loi. Dans ce document, nous avons choisi un des formalismes classiquement utilisés en imagerie cohérente[11] :

$$\mathcal{G}[\mu, L](x) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{Lx}{\mu} \right)^{L-1} e^{-\frac{Lx}{\mu}}$$

Comme nous l'avons vu précédemment, on a :

$$\mathcal{G}[\mu, L](x) = \mathcal{LMG}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \mu, 1 \right)$$

C.2.16 La loi Gamma Généralisée

Il y a beaucoup de définitions et d'usages de cette loi. Dans ce document, nous avons choisi un des formalismes classiquement utilisés en imagerie cohérente[11] :

$$\mathcal{GG}[\mu, L, \eta](x) = \frac{|\eta|}{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{\Gamma(L)} \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu} \right)^{\eta L - 1} e^{-\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu} \right)^{\eta}}$$

On a bien évidemment :

$$\mathcal{GG}[\mu, L, \eta](x) \mathcal{LMG}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \mu, \eta \right)$$

C.2.17 La loi Gamma Inverse

Dans ce document, nous avons choisi un des formalismes classiquement utilisés en imagerie cohérente[11] :

$$\mathcal{GI}[\mu, L](x) = \frac{1}{\Gamma(M)} \frac{1}{M\mu} \left(\frac{M\mu}{x} \right)^{M+1} e^{-\frac{M\mu}{x}}$$

Comme nous l'avons vu précédemment, on a :

$$\mathcal{GI}[\mu, M](x) = \mathcal{LMG}_{1,0}^{0,1} \left(x \left| \begin{array}{c} M \\ \cdot \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \mu, 1 \right)$$

C.2.18 La loi K

Comme nous l'avons vu précédemment, on a :

$$\mathcal{K}[\mu, L, M](x) = \frac{2 L M}{\mu} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \left(\frac{L M x}{\mu} \right)^{\frac{M+L}{2}-1} K_{M-L} \left[2 \left(\frac{L M x}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \mathcal{LM}_{0,2}^{2,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L, M \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \mu \right)$$

C.2.19 La loi K Inverse

Comme nous l'avons vu précédemment, on a :

$$\mathcal{KI}[\mu, L, M](x) = \frac{2}{LM\mu} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \left(\frac{L M \mu}{x} \right)^{\frac{M+L}{2}+1} K_{M-L} \left[2 \left(\frac{L M \mu}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \mathcal{LM}_{2,0}^{0,2} \left(x \left| \begin{array}{c} L, M \\ \cdot \end{array} \right. ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \mu \right)$$

C.2.20 La distribution de Kumaraswamy

Elle vérifie la relation :

$$p_{Kumaraswamy}[\alpha, \beta](x) = \alpha\beta x^{\alpha-1} (1-x^\alpha)^{\beta-1}$$

Par identification, il est facile de montrer que c'est une loi Beta Généralisée $\mathcal{BG}[\mu, L, M]$ avec :

$$\begin{cases} L = 1 \\ M = \beta + 1 \\ \mu = \left(\frac{1}{\beta+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ \eta = \alpha \end{cases}$$

On a donc :

$$p_{Kumaraswamy}[\alpha, \beta](x) = \mathcal{BG}\left[1, \beta + 1, \left(\frac{1}{\beta + 1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \alpha\right] = \mathcal{LMG}_{1,1}^{1,0}\left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ 1 \end{array} ; \begin{array}{c} \beta + 1 \\ \cdot \end{array}, \left(\frac{1}{\beta + 1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \alpha\right)\right)$$

C.2.21 La distribution de Lévy

Sous sa forme "Standard", elle est donnée par la relation :

$$p_{Levy}[c](x) = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{c}{2x}}$$

On reconnaît aisément une loi Gamma Inverse avec $M = \frac{1}{2}$ et $\mu = c$.

C.2.22 La distribution Log-Logistique

Elle sera étudiée comme un cas particulier de la distribution de Singh Maddala au paragraphe C.2.28.

C.2.23 La distribution de Maxwell

Elle vérifie la relation :

$$p_{Maxwell}[\sigma](x) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma^3 \sqrt{\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

On reconnaît l'expression de la loi Gamma généralisée et une simple identification permet d'écrire :

$$\begin{cases} \eta = 2 \\ L = \frac{3}{2} \\ \mu = \sqrt{3}\sigma \end{cases}$$

ce qui donne :

$$p_{Maxwell}[\sigma](x) = \mathcal{GG}\left[\mu = \sqrt{3}\sigma, L = \frac{3}{2}, \eta = 2\right](x) = \mathcal{LMG}_{0,1}^{1,0}\left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ \frac{3}{2} \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \sqrt{3}\sigma, 2\right)\right)$$

C.2.24 La loi de Nakagami

Définie par :

$$\mathcal{RN}[\mu, L](x) = \frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{L}}{\Gamma(L)} \left(\frac{\sqrt{L}x}{\mu}\right)^{2L-1} e^{-\left(\frac{\sqrt{L}x}{\mu}\right)^2}$$

elle s'exprime simplement sous la forme d'une loi de Meijer généralisée :

$$\mathcal{LMG}_{0,1}^{1,0}\left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \mu, 2\right)\right)$$

C.2.25 La loi de Nakagami Inverse

Définie par :

$$\mathcal{RN}[\mu, L](x) = \frac{2}{\mu} \frac{1}{\sqrt{L}\Gamma(L)} \left(\frac{\sqrt{L}\mu}{x} \right)^{2L-1} e^{-\left(\frac{\sqrt{L}\mu}{x} \right)^2}$$

elle s'exprime simplement sous la forme d'une loi de Meijer généralisée :

$$\mathcal{LMG}_{0,1}^{0,1} \left(x \left| \begin{matrix} L & ; \cdot \\ \cdot & ; \cdot \end{matrix} \right. , \mu, 2 \right)$$

C.2.26 La distribution de Pareto-2

La distribution de Pareto-2 vérifie la relation :

$$p_{Pareto-2}[b, q](x) = \frac{q b^q}{(b+x)^{q+1}}$$

Par identification, il est facile de montrer que c'est une loi de Fisher $\mathcal{F}[\mu, L, M]$ avec :

$$\begin{cases} L = 1 \\ M = q \\ \mu = b \end{cases}$$

On a donc :

$$p_{Pareto-2}[b, q](x) = \mathcal{FG}[1, q, b, 1] = \mathcal{LMG}_{1,1}^{1,1} \left(x \left| \begin{matrix} q & ; & \cdot \\ 1 & ; & \cdot \end{matrix} \right. , b, 1 \right)$$

C.2.27 La distribution de Rayleigh

La distribution de Rayleigh est donnée par la relation :

$$p_{Rayleigh}[\sigma](x) = \frac{1}{\sigma^2} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

C'est un cas particulier de la loi de Nakagami :

$$p_{Rayleigh}[\sigma](x) = \mathcal{RN}[\mu = \sqrt{2}\sigma, L = 1](x)$$

ce qui donne :

$$p_{Rayleigh}[\sigma](x) = \mathcal{LMG}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{matrix} \cdot & ; \cdot \\ 1 & ; \cdot \end{matrix} \right. , \sqrt{2}\sigma, 2 \right)$$

C.2.28 La distribution de Singh Maddala

Elle est définie par :

$$p_{Singh}[a, q, b](x) = \frac{a q}{b} \frac{x^{a-1}}{\left(1 + \left(\frac{x}{b}\right)^a\right)^{q+1}}$$

Par identification, il est facile de montrer que c'est une loi de Fisher Généralisée $\mathcal{FG}[\mu, L, M, \eta]$ avec :

$$\begin{cases} L = 1 \\ M = q \\ \mu = \frac{b}{q^{\frac{1}{a}}} \\ \eta = a \end{cases}$$

On a donc :

$$p_{Singh}[a, q, b](x) = \mathcal{FG}\left[1, q, \frac{b}{q^{\frac{1}{a}}}, a\right] = \mathcal{LMG}_{1,1}^{1,1}\left(x \left| \begin{array}{c} q \\ 1 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \frac{b}{q^{\frac{1}{a}}}, a\right.\right)$$

Un cas particulier de la distribution de Singh Maddala est la distribution Log-Logistique :

$$p_{LogLogistique}[\gamma, \sigma](x) = \frac{x^{\gamma-1}}{(1 + (\frac{x}{\sigma})^\gamma)^2} = p_{Singh}[\gamma, q = 1, b = \sigma](x)$$

On a donc :

$$p_{LogLogistique}[\gamma, \sigma](x) = \mathcal{FG}[1, 1, \sigma, \gamma] = \mathcal{LMG}_{1,1}^{1,1}\left(x \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \sigma, \gamma\right.\right)$$

C.2.29 La distribution “Student-t”

Elle est définie par :

$$p_{Student-t}[\nu](x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}$$

Par identification, il est facile de montrer que c’est une loi de Fisher Généralisée $\mathcal{FG}[\mu, L, M, \eta]$ avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} L = \frac{1}{2} \\ M = \frac{\nu}{2} \\ \mu = 1 \\ \eta = 2 \end{array} \right.$$

On a donc :

$$p_{Singh}[a, q, b](x) = \mathcal{FG}\left[\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}, 1, 2\right] = \mathcal{LMG}_{1,1}^{1,1}\left(x \left| \begin{array}{c} \frac{\nu}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, 1, 2\right.\right)$$

C.2.30 La loi de Weibull

Elle est donnée par l’expression [11] :

$$\mathcal{W}[\mu, \eta](u) = \frac{\eta}{\mu} \left(\frac{u}{\mu}\right)^{\eta-1} e^{-\left(\frac{u}{\mu}\right)^\eta}$$

C’est donc de manière évidente la loi de Meijer généralisée $\mathcal{LMG}_{0,1}^{1,0}\left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ 1 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}, \mu, 1\right.\right)$

C.3 Tableau récapitulatif des lois usuelles définies sur $\mathbb{R}^+$ et exprimées comme lois de Meijer

		$\mathcal{LMG}_{2,2}^{1,1} \left(x \left \begin{array}{c} M \\ L \end{array} ; \begin{array}{c} \tilde{M} \\ \tilde{L} \end{array} , \mu, \eta \right. \right)$					
		μ	L	M	$\tilde{L}$	$\tilde{M}$	η
Amoroso $p_{Amoroso} [\nu, \theta, \alpha, \beta] (x)$	$\mathcal{LMG}_{0,1}^{1,0}$	$\alpha^{\frac{1}{\beta}} \theta$	α	-	-	-	β
Beta $\mathcal{B} [\mu, L, M] (x)$	$\mathcal{LMG}_{1,1}^{1,0}$	μ	L	-	-	M	1
Beta Inverse $\mathcal{BI} [\mu, L, M] (x)$	$\mathcal{LMG}_{1,1}^{0,1}$	μ	-	L	M	-	1
Beta Généralisée $\mathcal{BG} [\mu, L, M, \eta] (x)$	$\mathcal{LMG}_{1,1}^{1,0}$	μ	L	-	-	M	η
Beta Prime $p_{BetaPrime} [\alpha, \beta] (x)$	$\mathcal{LMG}_{1,1}^{1,1}$	$\frac{\beta}{\alpha}$	α	β	-	-	1
Burr $p_{Burr} [k, c] (x)$	$\mathcal{LMG}_{1,1}^{1,1}$	1	1	k	-	-	c
Chi $p_{\chi} [\sigma, k] (x)$	$\mathcal{LMG}_{0,1}^{1,0}$	$\sqrt{k} \sigma$	$\frac{k}{2}$	-	-	-	2
Chi-2 $p_{\chi^2} [\sigma, k] (x)$	$\mathcal{LMG}_{0,1}^{1,0}$	$k \sigma^2$	$\frac{k}{2}$	-	-	-	1
Dagum $p_{Dagum} [a, b, p] (x)$	$\mathcal{LMG}_{1,1}^{1,1}$	b	p	1	-	-	a
Erlang $p_{Erlang} [\beta, m] (x)$	$\mathcal{LMG}_{0,1}^{1,0}$	βm	m	-	-	-	1
F-distribution $p_{F-distribution} [\nu_1, \nu_2] (x)$	$\mathcal{LMG}_{1,1}^{1,1}$	1	$\frac{\nu_1}{2}$	$\frac{\nu_2}{2}$	-	-	1
Fisher $\mathcal{F} [\mu, L, M] (x)$	$\mathcal{LMG}_{1,1}^{1,1}$	μ	L	M	-	-	1
Fisher Généralisée $\mathcal{FG} [\mu, L, M, \eta] (x)$	$\mathcal{LMG}_{1,1}^{1,1}$	μ	L	M	-	-	η
Fréchet $p_{Frechet} [\alpha, \beta] (x)$	$\mathcal{LMG}_{1,0}^{0,1}$	β	-	1	-	-	α
Gamma $\mathcal{G} [\mu, L] (x)$	$\mathcal{LMG}_{0,1}^{1,0}$	μ	L	-	-	-	1
Gamma Généralisée $\mathcal{GG} [\mu, L, \eta] (x)$	$\mathcal{LMG}_{0,1}^{1,0}$	μ	L	-	-	-	η
Gamma Inverse $\mathcal{GI} [\mu, L] (x)$	$\mathcal{LMG}_{1,0}^{0,1}$	μ	-	M	-	-	1

		$\mathcal{LMG}_{2,2}^{1,1} \left(x \left \begin{array}{c} M \\ L \end{array} ; \begin{array}{c} \tilde{M} \\ \tilde{L} \end{array}, \mu, \eta \right. \right)$					
		μ	L	M	$\tilde{L}$	$\tilde{M}$	η
Loi K $\mathcal{K} [\mu, L, M] (x)$	$\mathcal{LMG}_{0,2}^{2,0}$	μ	L, M	-	-	-	1
Kumaraswamy $p_{Kumaraswamy} [\alpha, \beta] (x)$	$\mathcal{LMG}_{1,1}^{1,0}$	$\left(\frac{1}{\beta+1} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$	1	$\beta + 1$	-	-	α
Lévy $p_{Levy} [c] (x)$	$\mathcal{LMG}_{1,0}^{0,1}$	c	-	$\frac{3}{2}$	-	-	1
Log-Logistique $p_{LogLogistique} [\gamma, \sigma] (x)$	$\mathcal{LMG}_{1,1}^{1,1}$	σ	1	1	-	-	γ
Maxwell $p_{Maxwell} [\sigma] (x)$	$\mathcal{LMG}_{0,1}^{1,0}$	$\sqrt{3}\sigma$	$\frac{3}{2}$	-	-	-	2
Nakagami $\mathcal{RN} [\mu, L] (x)$	$\mathcal{LMG}_{0,1}^{1,0}$	μ	L	-	-	-	2
Nakagami Inverse $\mathcal{RN}\mathcal{I} [\mu, L] (x)$	$\mathcal{LMG}_{0,1}^{1,0}$	μ	-	L	-	-	2
Pareto-2 $p_{Pareto-2} [b, q] (x)$	$\mathcal{LMG}_{1,1}^{1,1}$	b	1	q	-	-	1
Rayleigh $p_{Rayleigh} [\sigma] (x)$	$\mathcal{LMG}_{0,1}^{1,0}$	$\sqrt{2}\sigma$	1	-	-	-	2
Singh Maddala $p_{Singh} [a, q, b] (x)$	$\mathcal{LMG}_{1,1}^{1,1}$	$\frac{b}{q^{\frac{1}{a}}}$	1	q	-	-	a
Student-t $p_{Student-t} [\nu] (x)$	$\mathcal{LMG}_{1,1}^{1,1}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\nu}{2}$	-	-	2
Loi U $Q_U [\mu, L, M, N]$	$\mathcal{LM}_{1,2}^{2,1}$	μ	L, M	N	-	-	1
Loi W $Q_W [\mu, L, M, N]$	$\mathcal{LM}_{1,2}^{2,0}$	μ	L, M	-	-	N	1
Weibull $\mathcal{W} [\mu, \eta] (x)$	$\mathcal{LMG}_{0,1}^{1,0}$	μ	1	-	-	-	η
Loi Z $Q_Z [\mu, L, M, N] (x)$	$\mathcal{LM}_{1,2}^{1,1}$	μ	L	M	N	-	1

Références

- [1] L. Amoroso *Ricerca intorno alla curva di redditi* Ann. Mat. Pura Appl. 21 (1925), 123-159
- [2] H. Bateman *Higher transcendental functions* McGraw-Hill, 1953
- [3] H. Bateman *Table of integral transforms, vol. 1* McGraw-Hill, 1954
- [4] H. Cramèr *Mathematical methods of statistics* Princeton University press, 1946
- [5] G. Crooks *The Amoroso Distribution* <http://arxiv.org/abs/1005.3274v1>, mai 2010
- [6] B. Epstein *Some applications of the Mellin transform in statistics* Annals of Mathematical Statistics, 19 (1948), pp 370-379
- [7] R.A. Fisher *On a distribution yielding the error functions of several well known statistics* Proceedings of the International Congress of Mathematics, Toronto, 2 :805-813, 1924
- [8] Norman N. Johnson, Samuel Klotz *Continuous univariate distributions-1* John Wiley & Sons, 1970
- [9] James B. McDonald *Some generalized functions for the size distribution of income* Econometrica, Vol 52, No 3 (mai 1984), pp 647-664
- [10] J.G. Mauldon *A generalization of the Beta distribution* Annals of Mathematical Statistics, 30 (1959), 509-520
- [11] J.M. Nicolas *Application de la transformée de Mellin : étude des lois statistiques de l'imagerie cohérente* Rapport TélécomParisTech 2006D010
- [12] J.M. Nicolas *Projet EFIDIR : aspects théoriques en imagerie RSO. Lois statistiques des images "produits" et des images "rapports"* Rapport TélécomParisTech 2010D012
- [13] A. Papoulis *Probability, Random Variables and Stochastic Processes* McGraw-Hill, 2002
- [14] E.W. Stacy *A generalization of the Gamma distribution* Annals of Mathematical Statistics, 33 (1962), 1187-1192
- [15] G. Vikas et N. Deepak *n-Rayleigh Distribution in Mobile Computing over Flat-Fading Channel* International Conference on Methods and Models in Computer Science, 2009

Télécom ParisTech

Institut TELECOM - membre de ParisTech

46, rue Barrault - 75634 Paris Cedex 13 - Tél. + 33 (0)1 45 81 77 77 - www.telecom-paristech.fr

Département TSI